объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р9-87-195

Ю.И.Алексахин

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОМ ОБРАТНЫХ ТОКОВ НАГРУЗКИ УСКОРЯЮЩИХ СИСТЕМ

Направлено в Оргкомитет X Всесоюзного
семинара по линейным ускорителям
заряженных частиц /Харьков, 2-4 июня 1987 г./

1987

Ряд ускоряющих структур (на радиальных линиях, с Ω - образными резонаторами, секции ЛИУ) можно рассматривать как волноводы (необязательно постоянного сечения) с узкими разрезами, нагруженными на некоторый импеданс. Если ширина разрезов мала, то анализ взаимодействия пучка со структурой особенно прост. В пренебрежении разрезами рассчитывается распределение индуцированных зарядов на стенке волновода, их поток через контур разреза позволяет найти падение напряжения на разрезе, наведенного пучком. Помимо исследования эффекта нагрузки структур упомянутых типов решение данной задачи представляет интерес также с точки зрения индикации характеристик ускоренных компактных сгустков заряженных частиц /1/.

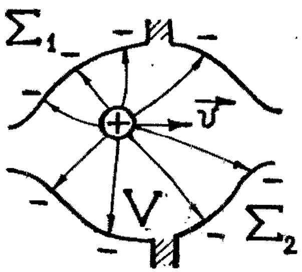
Рассмотрим сначала нерелятивистский случай, реализующийся, например, в ускорителе электронно-ионных колец /2/. Распределение зарядов, индуцированных на проводящей поверхности, даётся формулой

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_n = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial n}, \qquad (1)$$

где $\vec{n}$ - нормаль к поверхности, направленная внутрь рассматриваемой области V, а φ - потенциал электрического поля ускоряемого объекта, удовлетворяющий уравнению Пуассона с граничным условием $\varphi|_{\Sigma} = 0$. Введем вспомогательный потенциал χ, являющийся решением задачи Дирихле:

$$\Delta \chi = 0, \qquad \chi|_{\Sigma_1} = -\chi|_{\Sigma_2} = 1/2, \qquad (2)$$

где Σ_1 и Σ_2 - части поверхности Σ, разделённые разрезом (см. рисунок). Тогда полуразность зарядов на участках $\Sigma_{1,2}$, наведенных точечным сгустком (а также тонким кольцом при наличии азимутальной симметрии), можно представить в виде



$$\frac{1}{2}(Q_2-Q_1)=\frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\Sigma_2}-\int\limits_{\Sigma_1}\sigma\, dS\Big)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\chi\, dS=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\chi-\varphi\frac{\partial\chi}{\partial n}\Big)dS=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{V}(\varphi\Delta\chi-\chi\Delta\varphi)\,dV=Q\cdot\chi(\vec r_0), \qquad (3)$$

где Q - заряд сгустка, расположенного в точке $\vec r_0$ пространства (в случае кольца - плоскости r, z). При движении сгустка со скоростью $\vec v = d\vec r_0/dt$ через разрез течет ток

$$I_{ind}(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Q_2-Q_1)=Q\vec v\cdot grad\,\chi. \qquad (4)$$

Формула (4), являющаяся содержанием теоремы Рамо-Шокли (см., например, /3/), остается без изменений и при наличии дополнительных разрезов электродов Σ_1 , Σ_2 ,в частности, в периодическом случае. При известном токе (4) можно найти падение напряжения на зазоре:

$$U_{ind}=-\hat Z I_{ind}, \qquad (5)$$

где $\hat Z$ - входной импеданс, являющийся, вообще говоря, интегродифференциальным оператором, и ,соответственно, определить мощность потерь энергии сгустка.

Силы, действующие на нерелятивистский заряженный сгусток в неоднородной структуре, можно разделить на электростатическую (выражаемую через градиент ёмкости сгустка как функции его положения /2/) и силу,вызванную падением напряжения (5).Благодаря теореме Рамо-Шокли последняя может быть найдена для произвольной геометрии электродов и произвольного закона движения сгустка без явного вычисления распределения индуцированных зарядов.

Однако при релятивистских скоростях движения теорема Рамо-Шокли, в отличие от прямого метода,неприменима ввиду неэквипотенциальности электродов на высоких частотах. Нестационарность наряду с конечной величиной входного импеданса и краевыми эффектами приводит к появлению в волноводе вторичных волн, рассеянных разрезом (обстоятельство, не учтенное в /I/). Электрическое поле волны изменяет распределение зарядов,индуцированных сгустком, и,соответственно, ток, протекающий через разрез.

Ограничимся случаем круглого волновода постоянного радиуса b и гармонической зависимостью всех величин от времени ($\sim e^{-i\omega t}$). Проведенное выше построение состоит, по сути, в приближённом сшивании на зазоре магнитного поля пучка $H_\theta^{(0)}$, найденного для неразрезанного волновода, и поля в подсоединённой к разрыву структуре. Условие непрерывности электрического поля E_z при этом не выполняется, так как на входе в структуру ($r=b+0$) $E_z^{(0)}=-U_{ind}/\Delta$, а в волноводе невозмущенное поле при $r=b-0$ отсутствует: $E_z^{(0)}=0$. Для удовлетворения требованию непрерывности E_z представим поле в волноводе в виде суперпозиции $E_z=E_z^{(0)}+E_z^{(1)}$, где рассеянное поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничным условиям при $r=b$:

$$E_z^{(1)}=\begin{cases}-U_{ind}/\Delta\ , & |z|<\Delta/2\,,\\ 0\ , & |z|>\Delta/2\,.\end{cases} \qquad (6)$$

Определяя поправку к величине наведенного тока через азимутальную составляющую магнитного поля волны по формуле $I_{ind}^{(1)}=-cbH_\theta^{(1)}/2$, на границе разреза ($|z|=\Delta/2$) получим

$$I_{ind}^{(1)}/U_{ind}\equiv Y(\omega)=-\frac{i\omega}{2\Delta}\sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-k_n\Delta})/k_n^2, \qquad (7)$$

где $k_n^2=\nu_{0n}^2/b^2-\omega^2/c^2,\ (Re\,k_n>0,\ Im\,k_n<0)$, ν_{0n} - нули функции Бесселя: $J_0(\nu_{0n})=0$.

В принципе, построение последовательных приближений можно продолжить. Найденное выше поле E_z в случае, когда зазор нагружен на плоскую радиальную линию, удовлетворяет условию непрерывности на зазоре точно, в то время как H_θ – лишь приближённо. Соответствующую невязку можно использовать как граничное условие для определения поля $H_\theta^{(1)}$ в радиальной линии, а затем связанное с ним электрическое поле – для нахождения поправки $E_z^{(2)}$ к полю в волноводе. Продолжая этот процесс (для сходимости которого требуется $\Delta \lesssim b$), можно построить в явном виде точное решение рассматриваемой задачи.

Ограничиваясь поправками первого порядка, представим наведенный ток в виде суперпозиции $I_{ind} = I_{ind}^{(0)} + I_{ind}^{(1)}$, где $I_{ind}^{(0)}$ – ток, индуцируемый пучком в отсутствие разреза. Из соотношений (5,7) следует связь

$$I_{ind} = \frac{1}{1 + Z(\omega) Y(\omega)} \, I_{ind}^{(0)} , \qquad (8)$$

где $Z(\omega)$ – преобразование Фурье оператора $\hat{Z}$.

В предельных случаях для адмиттанса (7) нетрудно найти

а) $\omega \lesssim c/b \; : \; Y \approx -i \, \frac{\omega b}{2\pi} \ln \frac{b}{\Delta}$;

$$\text{б)} \quad \omega \approx \nu_{on} c/b \; : \; Y \approx \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \, c \sqrt{Q_{on}} \; ; \qquad (9)$$

в) $\pi c/b \ll \omega \ll c/\Delta : Y \approx -i \, \frac{\omega b}{2\pi} \left(\frac{\pi i}{2} + \ln \frac{3c}{\omega \Delta} \right)$,

где Q_{on} – добротность волноводной моды TM_{on} . Выражение (9в) получено в предположении, что конечная величина добротности приводит к размытию волноводных резонансов. Реактивная составляющая адмиттанса $Y(\omega)$ имеет емкостный характер и определяет поправку к ёмкости линии за счёт краевых эффектов (так называемое емкостное удлинение). В резонансном случае (9б) волноводная мода с высоким Q_{on} закорачивает вход линии – согласно (8) ток через зазор сильно подавлен. В остальных случаях найденные поправки невелики. Так, при нагрузке на неограниченную радиальную линию, входной импеданс которой имеет вид

$$Z(\omega) = -\frac{2i\Delta}{c b \sqrt{\varepsilon}} \; \frac{H_0^{(1)}(\omega b \sqrt{\varepsilon}/c)}{H_1^{(1)}(\omega b \sqrt{\varepsilon}/c)} , \qquad (10)$$

где $H_n^{(1)}(x)$ – функция Ганкеля, ε – диэлектрическая проницаемость изолятора между обкладками, эти поправки малы для частот $\omega \ll c/\sqrt{\varepsilon}\Delta$.

В качестве примера рассмотрим возбуждение разомкнутой на периферии ($r = R$) радиальной линии заряженным кольцом радиуса r_0 . Ток, наведенный движущимся со скоростью $v_z = c\beta_z$ кольцом на стенке волновода, равен

$$I_{ind}^{(0)}(z,t) = -\frac{\gamma v_z Q}{\pi b} \int_0^\infty \cos \frac{\gamma (z - v_z t) x}{b} \; \frac{I_0(x r_0/b)}{I_0(x)} \, dx , \qquad (11)$$

где $\gamma = (1-\beta_z^2)^{-1/2}$. Потери энергии W_{loss} и определяемое через них среднее значение индуцированного напряжения даются формулой

$$\overline{U_{ind}} = \frac{W_{loss}}{Q} = Q \left\{ \frac{1}{2C} + \frac{2\Delta}{\varepsilon b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1^2(\lambda_n)}{J_1^2(\alpha\lambda_n)} - 1 \right]^{-1} \frac{I_0^2(x r_0/b)}{I_0^2(x)} \right\} , \qquad (12)$$

где $C = \varepsilon (R^2 - b^2)/4\Delta$ – ёмкость линии, $x = \lambda_n / \sqrt{\varepsilon} \beta_z \gamma$, $\lambda_n \approx \pi n/(\alpha - 1)$ – корни уравнения $J_1(\lambda) N_1(\alpha\lambda) = J_1(\alpha\lambda) N_1(\lambda)$ с $\alpha = R/b$, $N_n(x)$, $J_n(x)$, $I_n(x)$ – функции Неймана и Бесселя действительного и мнимого аргументов соответственно. Сумма в (12) описывает возбуждение собственных мод разомкнутой на концах радиальной линии. При медленной зависимости входного тока от времени ($R - b \ll (b - r_0)/\sqrt{\varepsilon}\beta_z\gamma$) ею можно пренебречь, и взаимодействие сводится к зарядке линии обратным током (или, если на зазор было подано ускоряющее напряжение U_0 , к её разряду). В этом режиме возможна практически полная передача кольцу запасённой в линии энергии W_0 (при равенстве заряда кольца Q и линии $Q_0 = \sqrt{2CW_0}$). При $|Q/Q_0| \ll 1$ кольцу передаётся энергия /4/

$$W_{tr} / W_0 \approx 2 |Q/Q_0| = 4 |\overline{U_{ind}} / U_0| . \qquad (13)$$

При больших скоростях кольца и $\alpha = R/b \gg 1$ из (12) можно получить следующие оценки:

$$\text{а)}\quad 2d/R \ll \sqrt{\varepsilon}\beta_z\gamma \ll 2d/b: \quad \overline{U_{ind}} \approx Q\,\frac{\Delta(\beta_z\gamma)^2}{4d^2};$$

$$\text{б)}\quad 2d/b \ll \sqrt{\varepsilon}\beta_z\gamma \lesssim d/\Delta: \quad \overline{U_{ind}} \approx Q\,\frac{\Delta\beta_z\gamma}{\pi\sqrt{\varepsilon}\,bd}, \qquad (14)$$

где $d = b - r_0$, допускающие простую интерпретацию /4/. Область линии, принимающая участие во взаимодействии с кольцом, ограничена радиусом $r_* \approx b + 2d/\sqrt{\varepsilon}\beta_z\gamma$. Вычисляя её ёмкость, нетрудно убедиться, что (14) приблизительно соответствует напряжению, создаваемому на этой ёмкости зарядом Q.

Автор благодарен А.Б.Кузнецову за полезные замечания.

Литература

1. Батыгин Ю.В. и др. Возбуждение волноводных структур с диэлектрическими разрывами пучком заряженных частиц. - ЖТФ, 1980, т.50, в.1, с.115.
2. Алексахин Ю.И., Казача В.И. Влияние собственных полей на ускорение электронно-ионного кольца в индукционной системе КУТИ-20. - Сообщение ОИЯИ Р9-83-752, Дубна, 1983.
3. Гайдук В.И. О расчёте наведенного тока при произвольном движении заряженных частиц. - РЭ, 1960, т.5, в.2, с.239.
4. Алексахин Ю.И. О нагрузке индукторов ускоряющей секции электронным кольцом. - Деп.сообщение ОИЯИ Б1,9-83-751, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 марта 1987 года.

Алексахин Ю.И. Р9-87-195

Приближенный анализ методом обратных токов нагрузки ускоряющих систем

Методом обратных токов рассматривается взаимодействие заряженных частиц со структурой в виде волновода с узкими разрывами, нагруженными на некоторый входной импеданс /в частности, на радиальные линии/. Обсуждается его связь с известной в радиоэлектронике теоремой Рамо-Шокли, найдены поправки, обусловленные возбуждением вторичных волн в волноводе. Предложен метод построения в явном виде точного решения рассматриваемой задачи. Приведены формулы для энергетических потерь заряженного кольца при пролете мимо разрыва, нагруженного на радиальную линию, дана их качественная интерпретация.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод автора

Alexahin Yu.I. P9-87-195

An Approximate Analysis by the Return Current Method of the Accelerating Systems Loading

The interaction of charged particles with a structure formed by a waveguide with narrow gaps loaded on some impedances (radial lines in particular) is studied by the return current method. The method relation to the known in radioelectronics Ramo-Shockley theorem is discussed, corrections due to the excitation of secondary waves in the guide are found. A method is proposed for the direct derivation of the strict solution to the problem under consideration. Formulae for the energy losses by a charged ring passing a gap which is loaded on a radial line are given as well as their qualitative interpretation.

The investigation has been performed at the Department on New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987