

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



30/II-75

Б-742

P9 - 8698

2300/2-75

И.Л.Боголюбский

МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ БУССИНЕСА  
И ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

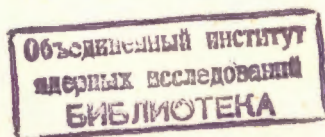
**1975**

Р9 - 8698

И.Л.Боголюбский

МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ БУССИНЕСА  
И ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

*Направлено в ЖЭТФ*



Боголюбский И.Л.

P9 - 8698

Модифицированное уравнение Буссинеса и динамика  
нелинейных волн

Аналитически и численно исследованы свойства солитонов корректного аналога уравнения Буссинеса и взаимодействие солитонов при встречных столкновениях.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований  
Дубна 1975

Bogolubsky I.L.

P9 - 8698

Modified Boussinesq Equation and Nonlinear  
Wave Dynamics

Modified Boussinesq equation is studied both analytically and by computer. Head-on-collisions of solitons turn out to be inelastic and coefficient of inelasticity seems to grow up when amplitude of counter solitons increases. Closed equation has been obtained and investigated which describes the dynamics of nonlinear ion-sound waves.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research  
Dubna 1975

Введение

В 1844 году Скотт-Рассел /1/ наблюдал уединенные волны конечной амплитуды на мелкой воде. Для описания этих волн Буссинес /2/ в 1872 году предложил уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx}, \quad (1)$$

которое описывает нелинейные волны, распространяющиеся в обоих направлениях. В 1895 году для волн, движущихся в положительном направлении оси  $x$ , было получено уравнение Кортевега-де Вриса (КдВ)

$$u_t + (u^2)_x + u_{xxx} = 0. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) имеют частные решения в виде нелинейных уединенных волн (солитонов):

$$u = A \operatorname{sech}^2 \left[ \kappa \left( \frac{A}{6} \right)^{1/2} (x - Mt) \right], \quad \kappa = 1, \quad (3)$$

$$M_1 = \pm \left( 1 + \frac{2}{3} A \right)^{1/2} \text{ в случае (1), } M_2 = \frac{2A}{3} \text{ в случае (2).}$$

Уравнения КдВ и Буссинеса описывают широкий круг физических явлений, учитывая первые исчезающие поправки, связанные с нелинейностью и отклонением от линейного закона дисперсии. Необходимо подчеркнуть, что они являются приближенными и справедливы только для длинных волн.

В работе /4/ было показано, что с помощью (2) можно исследовать также нелинейную динамику длинных

ионно-звуковых ( $s$ ) волн малой, но конечной амплитуды, распространяющихся в одну сторону. В работе /5/ было отмечено, что описание длинных  $s$ -волн, испытывающих воздействие в.ч. силы Миллера и распространяющихся в произвольную сторону оси  $x$ , осуществляется неоднородным уравнением Буссинеса, которое было затем с помощью фурье-анализа получено в /6/. В частном случае отсутствия в.ч. поля (например, ленгмюровских колебаний) для  $s$ -волн, движущихся с околосвуковой скоростью, получается (1).

Известно, наконец, что (1) моделирует распространение волн в нелинейной решетке и тесно связано с проблемой Ферми-Паста-Улама (ФПУ) (см., например, /7,8/).

В работе /9/ найдены так называемые  $N$ -солитонные решения (1), из анализа которых следует, что взаимодействие солитонов не приводит к асимптотическому изменению их формы, амплитуд и скоростей. Этот факт, по-видимому, является следствием того, что (1) обладает счетным набором законов сохранения и, весьма вероятно, является полностью интегрируемой системой, не допускающей стохастизации /10/. В этой же работе были найдены операторы, необходимые для решения (1) методом обратной задачи теории рассеяния (ОЗТР). В результате решения (1) этим методом, скорее всего, должны получиться  $N$ -солитонные решения работы /9/. Уравнение Буссинеса не допускает прямого решения на ЭВМ с достаточно мелкой сеткой по оси  $x$ , поскольку задача Коши для него оказывается некорректной.

В §1 предлагается модификация этого уравнения.

В §2 обсуждаются вопросы численного исследования (1) и (7) на ЭВМ.

В §3 изложены физические результаты исследования модифицированного уравнения Буссинеса.

В §4 предложено и исследовано уравнение для описания динамики нелинейных  $s$ -волн малой амплитуды и на его основе рассмотрено взаимодействие встречных солитонов.

## §1. Модификация уравнения Буссинеса

Ионно-звуковые волны в пренебрежении кинетическими эффектами, как известно (см., например, /11/), описываются следующим образом (используем безразмерные переменные, обозначения общепринятые:  $\vec{v}$  - скорость,  $\phi$  - потенциал,  $n_i$ ,  $n_e$  - плотность ионов и электронов):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = - \nabla \phi ,$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div} (n_i \vec{v}) = 0 , \quad (4)$$

$$\Delta \phi = e \phi - n_i .$$

Линеаризуя эту систему,  $n_i = 1 + \delta n_i$ ,  $n_e = 1 + \delta n_e$ ,  $|\delta n_i|, |\delta n_e|, |\phi|, |\vec{v}| \ll 1$ , легко получить уравнение  $L_3 A = 0$ , где  $A$  - любая из величин  $\delta n_i, \delta n_e, \phi, \vec{v}$ , а

$$L_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta - \Delta \frac{\partial^2}{\partial t^2} . \quad (5)$$

Таким образом, линейная часть оператора для  $s$ -волн в плоском случае имеет вид

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} . \quad (6)$$

При этом, естественно, получается точное линейное дисперсионное соотношение для  $s$ -волн,  $\omega^2 = k^2(1+k^2)^{-1}$ , в то время как уравнение (1) для линейных волн дает  $\omega^2 = k^2(1-k^2)$ , что является хорошим приближением лишь при  $k \ll 1$  и дает неверные результаты для коротких волн,  $k \gg 1$  (длина волны порядка дебаевского радиуса  $d_e$  и меньше), приводя к появлению нефизической неустойчивости. В этом и состоит физическая причина математической некорректности задачи Коши для уравнения (1). В §2 мы обсудим этот вопрос дополнительно.

Уравнение с оператором, линейная часть которого совпадает с  $\mathcal{L}$ , было получено при выводе (2) для волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю, в работе /12/. Для замены линейной части оператора Буссинеса (1) на  $\mathcal{L}$  (т.е.  $u_{xxxx}$  на  $u_{xxtt}$ ) в других физических задачах, описываемых уравнением типа (1), могут быть использованы следующие соображения: в (1) члены  $(u^2)_{xx}$  и  $u_{xxxx}$  являются для длинных волн и малых амплитуд малыми поправками по сравнению с членами  $u_{tt}$  и  $u_{xx}$ , которые в нулевом порядке по  $k$  и амплитуде равны друг другу. Воспользовавшись этим, можно вновь получить оператор  $\mathcal{L}$ . Это рассуждение эквивалентно очевидному при  $k \ll 1$  переходу от  $\omega^2 = k^2(1-k^2)$  к  $\omega^2(1+k^2) = k^2$ . Физически понятно, что динамика процессов, определяющую роль в которых играют длинные волны,  $k \ll 1$ , при таком переходе практически не меняется.

Сохраняя форму нелинейного члена в (1), получим модификацию уравнения Буссинеса в виде

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxtt} \quad (7)$$

Перепишем (7) в виде эквивалентной системы, вводя функцию  $v$ , имеющую смысл "скорости":

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u &= - \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x} (u + u^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Используя систему (8), легко получить при нулевых условиях на бесконечности,  $x \rightarrow \pm \infty$  (которые далее подразумеваются всегда, когда речь идет об интегралах движения), законы сохранения "массы" и "импульса"

$$\frac{dB_1}{dt} = 0, \quad B_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx, \quad (9)$$

$$\frac{dB_2}{dt} = 0, \quad B_2 = \int_{-\infty}^{\infty} v \, dx. \quad (10)$$

Отметим, что интеграл движения для (1), выражающий закон сохранения энергии (см., например, /10,13/) в виде

$$\frac{dB_3}{dt} = 0, \quad B_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{(u_x)^2}{2} \right] dx, \quad (11)$$

не является интегралом движения для (7).

Для нелинейного члена фурье-анализ /6/ дает выражение  $(u^2)_{tt}$ . Однако уравнение  $\mathcal{L}u - (u^2)_{tt} = 0$  имеет закон сохранения  $\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (u+u^2) dx = 0$ , т.е. для конечных амплитуд, вообще говоря, не выполняется закон сохранения "массы".

Уравнение (7) имеет солитонные решения, описываемые формулой (3) с  $\kappa = 1/M_1$ . (Солитонные решения  $\mathcal{L}u - (u^2)_{tt} = 0$  описываются формулой (3) с  $\kappa = 1$ ,  $M = (1 - \frac{2}{3}A)^{-1/2}$ . Как и следовало ожидать, при малых  $A \ll 1$  и  $(M-1) \ll 1$  солитоны уравнений (1) и (7), имеющие характерную ширину  $L \gg 1$ , практически не отличаются друг от друга.

Следует отметить, что (2) не удается преобразовать к одному дифференциальному уравнению третьего порядка, дающему точное дисперсионное соотношение для линейных  $s$ -волн. Задача Коши для него оказывается математически корректной, несмотря на неверное описание волн с  $k \geq 1$ . Как показано в работах /12,14/, (2) имеет автомодельное решение; необходимо отметить, что при малых характерных размерах (малых временах) это решение выходит за рамки применимости (2). Так, волны с  $k > 1$  даже не удовлетворяют основному допущению, согласно которому все гармоники движутся с положительной скоростью  $v_{\phi} = \omega/k$ . Для сравнения укажем, что уравнения (1) и (7) не имеют аналогичных автомодельных решений. Отметим также, что (2) не требует выполнения закона сохранения (10), который имеет место для (1) и (7).

## §2. Методика вычислений на ЭВМ

Рассмотрим для (1) простейшую разностную схему ( $\tau, n$  - шаг и индекс по времени,  $h, i$  - по координате  $x$ , для простоты будем считать их постоянными):

$$u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} = \frac{\tau^2}{h^2} [(u+u^2)_{i+1}^n - 2(u+u^2)_i^n + (u+u^2)_{i-1}^n] + \frac{\tau^2}{h^4} (u_{i+2}^n - 4u_{i+1}^n + 6u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n). \quad (12)$$

Анализ устойчивости этой схемы приводит к условиям  $\tau < h, h > 2$ . Рассмотрение других схем не снимает последнего ограничения. Этот результат объясняется изложенными в §1 соображениями о некорректном описании с помощью (1) коротких волн. Редкая сетка автоматически исключает такие волны из рассмотрения (для выполнения условия  $k \ll 1$  требуется  $h \gg 1, h = 2$  примерно соответствует  $k = 1/2$ ) и ликвидирует неустойчивость счета.

Для исследования на ЭВМ уравнения (7) была использована естественная 9-точечная схема

$$u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} = \frac{\tau^2}{h^2} [(u+u^2)_{i+1}^n - 2(u+u^2)_i^n + (u+u^2)_{i-1}^n] + [(\delta^2 u_i)^{n+1} - 2(\delta^2 u_i)^n + (\delta^2 u_i)^{n-1}] \frac{1}{h^2}; \delta^2 u_i = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \quad (13)$$

Эта схема оказывается безусловно устойчивой при анализе линейной части разностного оператора, связанной с  $L$ . Действительно, подставляя  $u^{n+1} = \lambda u^n$  в (13) при  $u \rightarrow 0$ , получаем ( $t = \frac{\sin \phi}{2}$ , где  $u_{i+m} = u_i e^{im\phi}$ )

$$\lambda^2 - 2\lambda \left[ 1 - \frac{2t^2\tau^2}{h^2} \left( 1 + \frac{4t^2}{h^2} \right)^{-1} \right] + 1 = 0. \quad (14)$$

Легко убедиться, что  $|\lambda| = 1$  при произвольном отношении  $\tau/h$ . Этот неожиданный на первый взгляд результат является следствием неявности схемы (13). Модельное исследование схемы (13) с заменой члена  $\frac{\partial^2(u^2)}{\partial x^2}$  выражением  $\frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial u}{\partial x}$ , где  $A$  - константа,  $|u| < |A|$ , и анализ численных расчетов показывают, что в пределах применимости (7) эта схема является устойчивой.

Рассмотрим кратко вопрос о граничных условиях при моделировании на ограниченном отрезке. Применительно, например, к задаче ФПУ в ее первоначальной постановке представляет интерес решение (1) и (7) с "закрепленными концами", т.е.  $u(S) = 0$  ( $S$  - граница области решения).

При исследовании волн на мелкой воде и  $s$ -волн из условия непротекания  $v(S) = 0$  и (8) следует  $u_x(S) = 0$ . Наконец, возможна постановка граничных условий, учитывающих выход возмущений из области решения с заданной постоянной скоростью, например, единичной или скоростью солитона.

## §3. Нелинейная динамика решений модифицированного уравнения Буссинеса

Рассмотрим решение (7) при следующих начальных данных:  $u(0, x) = A \operatorname{sech}^2(m\sqrt{\frac{A}{6}}x)$ ,  $u_t(0, x) = 0$ . Эволюция такого возмущения изображена на рис. 1 ( $A=0,5; m=0,3$ ). Строго говоря, волны такой большой амплитуды нельзя описывать уравнениями типа (1), (2), (7). Однако существуют экспериментальные подтверждения высокой точности (2) при значительных нелинейностях  $/15/$ . С другой стороны, характерное время нелинейного эволюционного процесса может быть оценено как  $t \sim u_{\max}^{-3/2}$ . Отсюда следует, что характерная эволюционная длина  $L \sim 1 \cdot t \sim A^{-3/2}$ .

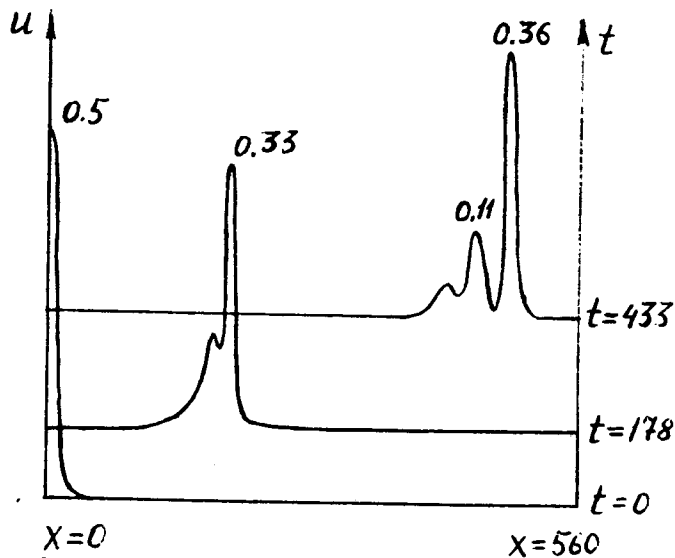


Рис. 1. Формирование цуга солитонов из симметричного неподвижного возмущения (изображена половина картин-ки).

Начальная стадия эволюции - расплывание этого пакета на два - отличается от такого же процесса, описываемого уравнением  $u_{tt} = u_{xx}$ , главным образом, тем, что передний фронт каждого из двух образовавшихся пакетов круче заднего, который растянут вследствие дисперсии фазовой скорости,  $v_{\phi} = (1+k^2)^{-1/2} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Впоследствии передний участок отделяется, и из него формируется солитон. В зависимости от начальных данных возможно последовательное образование различного числа солитонов и некоторого "хвоста", для которого удовлетворительным является линейное описание  $\Delta u = 0$ . При увеличении параметра  $m$  при фиксированной величине  $A$  число образующихся солитонов уменьшается, однако из любого начального возмущения, для которого  $\int_{-\infty}^{\infty} u dx > 0$ , формируется по крайней мере два солитона.

Задача об эволюции начального возмущения вида

$$u(0, x) = A \operatorname{sech}^2 \left( m \sqrt{\frac{A}{6}} x \right), \quad u_t(0, x) = -u_x(0, x), \quad (15)$$

переносимого при  $t=0$  с единичной скоростью, соответствует задаче об эволюции при решении (2) неподвижного возмущения, задаваемого при  $t=0$  той же формулой. Исследование такой задачи для (2) на ЭВМ проще, так как пакет перемещается очень медленно:  $|M-1| \ll 1$  при  $A \ll 1$ . Однако (2) имеет некоторые "дефекты" (см. §1).

При эволюции возмущений (15) с  $m < 1$ , описываемой уравнением (7), в зависимости от параметров  $m, A$  формируется различное число солитонов - тем большее, чем меньше  $m$  (как и в работе [14]).

При  $m > 1$  образуется один солитон и "шлейф" осциллирующий (рис. 2,  $A=0,1; m=2$ ) с монотонно уменьшающейся к хвостовой части длиной волны ( $k \rightarrow \infty$ ). Амплитуда осциллирующий спадает по закону, напоминающему экспоненциальный.

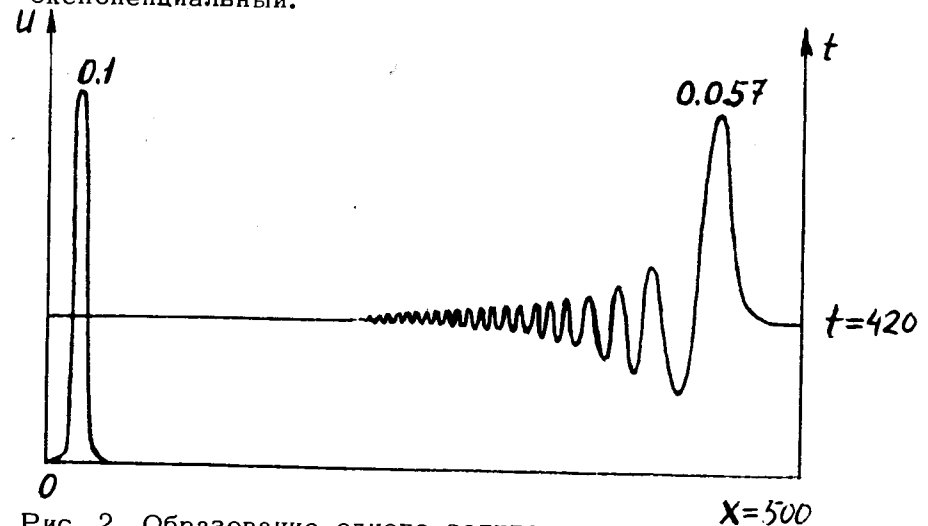


Рис. 2. Образование одного солитона и волнового шлейфа из возмущения (15) при  $m=2$ .

При численном решении (7) с начальными данными (15) были обнаружены волны, бегущие влево со скоростью, близкой к единице. Их появление легко понять с помощью закона сохранения (10). Однако при малых амплитудах ( $A \ll 1$ ) относительная величина этих возмущений невелика.

Рассмотрим далее взаимодействие двух встречных солитонов, описываемое уравнением (7). Как и следовало ожидать (см. §1), процессы взаимодействия солитонов малых амплитуд ( $A \ll 1$ ) при описании с помощью (1) и (7) мало отличаются друг от друга. Картина взаимодействия меняется при переходе к солитонам большой амплитуды (меньшей ширины); доля коротких гармоник экспоненциально нарастает с уменьшением ширины солитонов\*. Именно изменение в их описании (переход от (1) к (7)) приводит к тому, что столкновение становится неупругим (рис. 3,  $A_1 = A_2 = 2$ ). За расходящимися солитонами остается зона знакопеременного решения в виде волн, близких к линейным (их

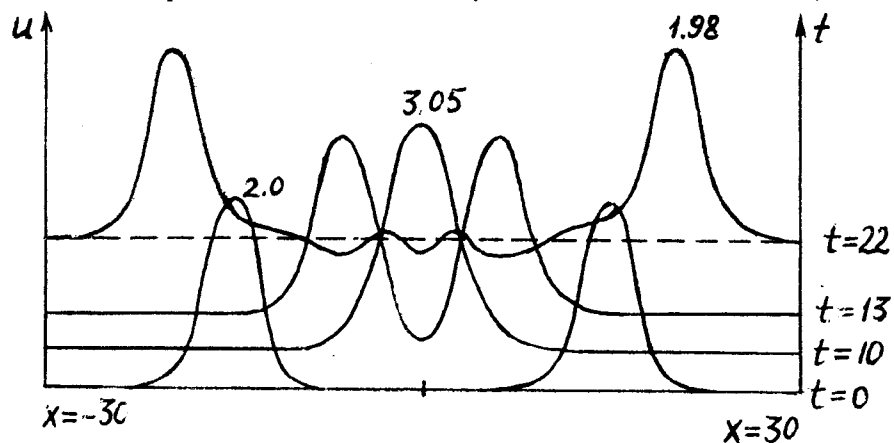


Рис. 3. Динамика неупругого взаимодействия солитонов уравнения (7) ( $A_1 = A_2 = 2$ ).

амплитуда сравнительно мала, а длина волны порядка размера исходных солитонов). Амплитуда солитонов практически не меняется в результате взаимодействия.

\* За обсуждение этого круга вопросов автор благодарен В.Г.Маханькову.

Во всех экспериментах с одинаковыми встречными солитонами уравнения (7) максимальная величина функции  $u$ , наблюдаемая в момент их перекрытия, была меньше удвоенной амплитуды каждого солитона (таким же свойством обладают встречные солитоны уравнения (1) /9/ ).

Динамика взаимодействия встречных солитонов разной амплитуды изображена на рис. 4 ( $A_1 = 1, A_2 = 2$ ).

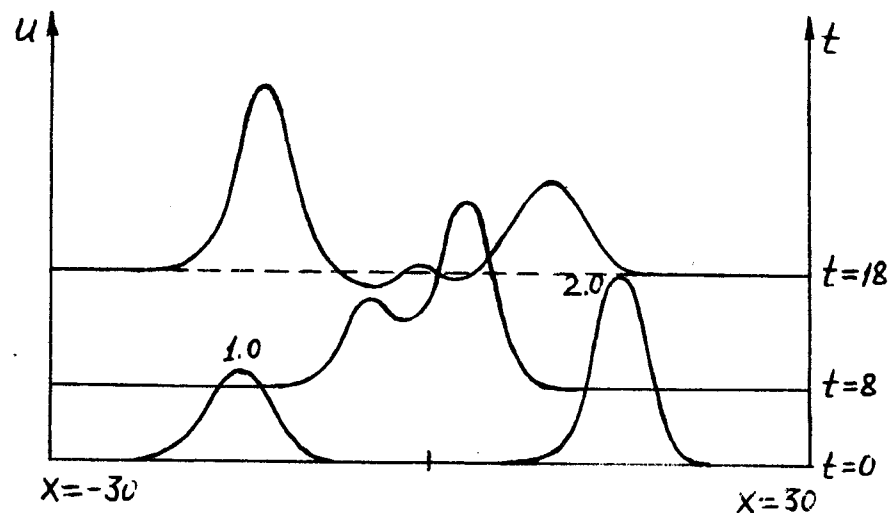


Рис. 4. Столкновение встречных солитонов уравнения (7) различной амплитуды ( $A_1 = 2, A_2 = 1$ ).

Естественным обобщением (7) является уравнение с кубической нелинейностью

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^3)_{xx} + u_{xxtt}, \quad (16)$$

которое может быть наряду с модифицированным уравнением КдВ применено для исследования свойств ангармонической решетки и нелинейных альфвеновских волн.

Солитонные решения (16), имеющие вид



$$u = A \operatorname{sech} \left[ \frac{A}{M\sqrt{2}} (x \pm Mt) \right], \quad M = \sqrt{1 + \frac{A^2}{2}}, \quad (17)$$

описывают как волны сжатия, так и волны разрежения.

Проведенные с помощью ЭВМ эксперименты показали, что столкновение встречных солитонов (17) оказывается также неупругим.

Уравнения (7), (16) не могут быть решены методом ОЗТР; все  $N$ -солитонные решения, получаемые этим методом, описывают асимптотически невзаимодействующие солитоны (например, (1), (2), уравнение Шредингера с кубической нелинейностью /16/, модифицированное уравнение КдВ и т.д.). Построить аналитические решения для (7), (16) эвристическим способом Хироты не удается. Возможно, методика Хироты /9/ является плодотворной лишь для тех уравнений, для которых возможно построение пары операторов ОЗТР.

В §4 обсуждаются свойства еще одного нелинейного уравнения с оператором  $L$ .

#### §4. О динамике нелинейных ионно-звуковых волн

Система (4) в приближении малых нелинейных и дисперсионных эффектов преобразуется методом, близким к изложенному в работе /17/, к одному нелинейному уравнению относительно скорости  $v$ , которое в плоском случае имеет вид

$$v_{tt} = v_{xx} - (v^2)_{xx} + v_{xxx} \quad (18)$$

Оно правильно описывает поведение ионно-звуковых солитонов малой амплитуды (для них выполнено условие  $A(\Delta x)^2 \sim 1$ ,  $\Delta x$  - полуширина солитона амплитуды  $A$ ) и, в частности, их встречные столкновения. Солитонные решения уравнения (16) имеют вид:

$$v = \pm A \operatorname{sech}^2 \left[ (x \pm Mt) \sqrt{\frac{A}{6}} \frac{1}{\sqrt{M}} \right], \quad (19)$$

$$M = \sqrt{1 + \left(\frac{A}{3}\right)^2 + \frac{A}{3}}. \quad (20)$$

При малых амплитудах ( $A \ll 1$ ) скорость солитона  $M = 1 + \frac{A}{3}$  совпадает со скоростью солитонов уравнений (1) и (7). Знаки в формуле (19) соответствуют движению солитонов в положительном и отрицательном направлении оси  $x$ .

Введением "плотности"  $u$  (18) может быть записано в виде системы двух уравнений:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left( 1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v + \frac{\partial (v^2)}{\partial x}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (22)$$

Отсюда легко получить, что для (18) выполняются законы сохранения "массы" и "импульса" (9) и (10).  $N$ -солитонные решения уравнения (18) методом ОЗТР или способом Хироты получить не удается.

Динамика нелинейных волн, описываемых с помощью (18), была исследована на ЭВМ. Вычислительный процесс оказывается устойчивым, если для нелинейного члена использовать аппроксимацию в виде

$$\left[ v_{i+1}^n (v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^{n-1}) - v_{i-1}^n (v_{i-1}^{n+1} - v_{i-1}^{n-1}) \right] (2\tau h)^{-1}. \quad (23)$$

Используя (18), рассмотрим лобовое столкновение солитонов равной амплитуды, имея в виду, что для стационарных решений вида  $f(x - Mt)$  из уравнения неразрывности следует  $n = (1 - vM^{-1})^{-1}$ , или, при малых амплитудах,  $\delta n \equiv u \approx vM^{-1}$  ( $v < 0$ , если  $\delta n > 0$  и  $M < 0$ ).

Численный эксперимент с солитонами амплитуды  $A=2$  показал, что в рамках (18) их столкновение является неупругим (рис. 5).

Этот результат, однако, не противоречит сделанному в работе /18/ на основании численного решения точной системы (4) выводу об упругом характере взаимодействия  $s$ -солитонов с амплитудой, не превышающей некоторую критическую, так как уравнение (18) является приближенным и описывает лишь поведение  $s$ -волн

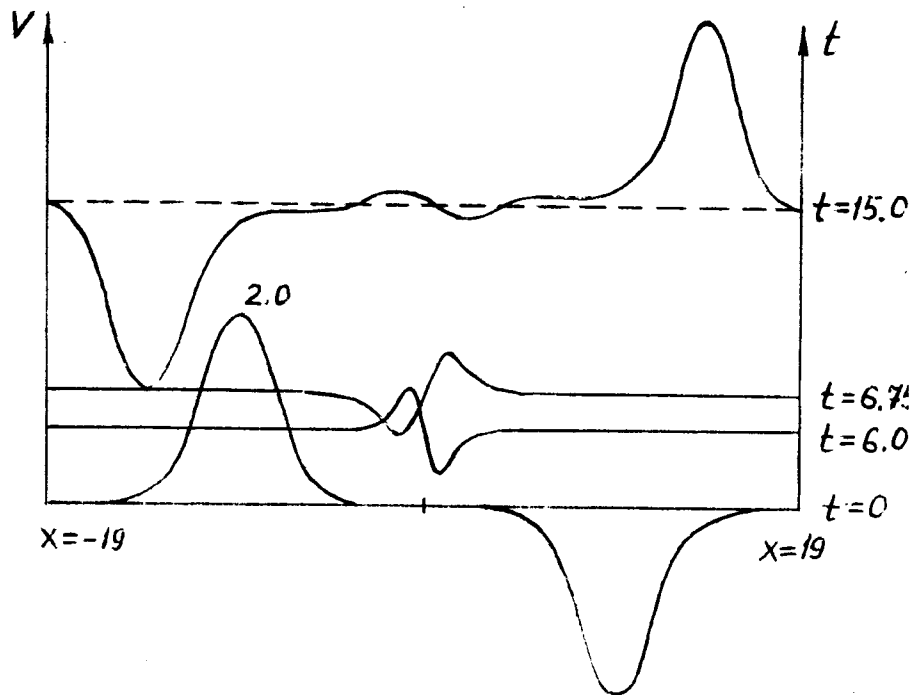


Рис. 5. Неупругое столкновение солитонов уравнения (18) ( $A_1 = A_2 = 2$ ).

малых амплитуд. С другой стороны, окончательно ответить на вопрос о том, является ли взаимодействие  $s$ -солитонов, описываемое системой (4), упругим, может лишь аналитическое исследование.

#### Краткие выводы

Исследование динамики нелинейных волн с помощью (7) и (16) позволяет заключить, что широкий круг физических задач имеет частные решения в виде солитонов, неупруго взаимодействующих между собой при столкновениях (см. также результаты работ /19-21/, где было получено неупругое взаимодействие геликонных и ленгмюровских солитонов, приводящее даже к слипанию

последних в широкой области параметров /5/ ). Аналитические решения дифференциальных уравнений в частных производных в виде  $N$ -солитонных формул ( $N > 1$ ), описывающие упругие взаимодействия солитонов, получены к настоящему времени лишь для специального класса уравнений, решаемых либо методом ОЗТР, либо методом Хироты; эти уравнения не всегда являются точными моделями физических задач\*.

Увеличение "коэффициента неупругости" с ростом амплитуды, по-видимому, является характерным свойством неупруго взаимодействующих солитонов.

Автор весьма признателен проф. В.Г.Маханькову за предложенное направление исследований и обсуждение полученных результатов, проф. Е.П.Жидкову за интерес к работе и поддержку, С.И.Сердюковой за обсуждение методики вычислений на ЭВМ.

#### Литература

1. J.Scott-Russel.Proc.Roy.Soc. Edinburgh, 319,(1844).
2. J.Boussinesq. J.Math.Pures Appl., ser. 2, 17, 55 (1872).
3. D.J.Korteweg and G.de Vries. Phil.Mag., 39, 422 (1895).
4. В.Е.Захаров. ПМТФ, 3, 167,(1964).
5. Х.О.Абдуллоев, И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков. Препринт ОИЯИ, Р9-7992, Дубна, 1974; Kh.O.Abdullov, I.L.Bogolubsky and V.G.Makhankov.Nucl.Fusion, 15, 21, (1975).
6. V.G.Makhankov.Phys.Lett., A50, 42 (1974).
7. M.Toda and M.Wadati.Journ.Phys.Soc.Japan, 34, 18 (1973).

\* Это замечание не относится к так называемой "решетке Тоды" /7/.

8. Э.Ферми. Научные труды, II, серия "Классики науки", "Наука", М., 1972.
9. R.Hirota. Journ.Math.Phys., 14, 810 (1972).
10. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 65, 219 (1973).
11. Р.З.Сагдеев. Вопросы теории плазмы, т. 4, стр. 20, Атомиздат, М., 1964.
12. Ю.А.Березин, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 46, 1880 (1964).
13. В.Г.Маханьков, И.Л.Боголюбский, Х.О.Абдуллоев. Доклад на II Международной конференции по теории плазмы, г. Киев, 1974.  
Preprint JINR, E9-8225, Dubna, 1974.
14. Ю.А.Березин, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 51, 1557 (1966).
15. N.J.Zabusky and C.J.Galvin. J.Fluid Mech., 47, 811 (1971).
16. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ, 64, 1627 (1973).
17. Б.А.Альтеркоп, А.А.Рухадзе. ЖЭТФ, 62, 989 (1972).
18. D.Biskamp and D.Parkinson. Phys.Fluids, 13, 2295 (1970).
19. I.L.Bogolubsky and V.G.Makhankov. Preprint JINR, E9-8315, Dubna, 1974.
20. Kh.O.Abdulloev, I.L.Bogolubsky and V.G.Makhankov. Phys.Lett., A48, 161 (1974).
21. Л.М.Дегтярев, В.Г.Маханьков, Л.И.Рудаков. ЖЭТФ, 67, 533 (1974).

Рукопись поступила в издательский отдел  
18 марта 1975 года.