

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



P9 - 8643

12/4-75

Б-30

Н.С.Бахвалов, В.С.Бондаренко, Е.П.Жидков,
С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова

1719/2-75

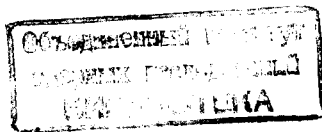
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЕТОК К РАСЧЕТУ
ПОЛЕЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ
ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СТРУКТУРЫ
ДВИЖУЩИМСЯ СГУСТКОМ ЭЛЕКТРОНОВ

1975

P9 - 8643

Н.С.Бахвалов,¹ В.С.Бондаренко,² Е.П.Жидков,
С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЕТОК К РАСЧЕТУ
ПОЛЕЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ
ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СТРУКТУРЫ
ДВИЖУЩИМСЯ СГУСТКОМ ЭЛЕКТРОНОВ



¹ Московский государственный университет

² Ереванский государственный университет

Бахвалов Н.С., Бондаренко В.С., Жидков Е.Я.,
Сердюкова С.И.,

P9 - 8643

Применение метода сеток к расчету полей возбуждения
неоднородной идеально проводящей структуры движущимся
сгустком электронов

Реализован новый подход к решению инженерно-физической модельной задачи о возбуждении замкнутой структуры движущимся сгустком электронов. Соответствующая группа уравнений Максвелла решается методом конечных разностей. Метод эффективен в смысле скорости счета и полноты выдаваемой информации по сравнению с обычным методом Фурье-разложений.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

Bakhvalov N.S., Bondarenko V.S.,
Zhidkov E.P., Serdyukova S.I.

P9 - 8643

Net Method Applied in Calculations of the
Excitation Fields of Nonhomogeneous Ideal
Conducting Structure by the Moving Electron Bunch

There has been realized a new approach to solution of the engineering-physical model problem about excitation of closed structure by the moving electron bunch. The corresponding group of the Maxwell equations was solved by the difference scheme method. The method is efficient being very rapid in computer and giving more complete information as compared with the usual method of Fourier expansion.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1975

ВВЕДЕНИЕ

Задача расчета полей, возбуждаемых движением плотных сгустков или пучков электронов в неоднородных структурах (резонаторах, отрезках волноводов и др.) представляет большой интерес для коллективных методов ускорения, таких, как метод колец или самоускоряющихся пучков. Ускоряясь, релятивистский сгусток тратит часть своей энергии на излучение сторонних зарядов, возбуждаемое его электрическим полем при пролете мимо пространственных неоднородностей. Важно знать распределение поля вдоль потока электронов и уметь оценивать потери на излучение.

На эту тему имеется большое количество работ (см., например, /1/, /2/, /3/ и т.д.). Рассматривая эти работы, можно сделать такие выводы. Во-первых, в большинстве работ закон движения источников поля предписывается заранее. Берется так называемое "приближение заданных токов", вычисляются необходимые поля, а затем рассматривается обратное влияние этих полей на движение зарядов. В известных нам работах скорость движения источников принимается постоянной, даже если нет достаточного релятивизма. Во-вторых, в качестве основного метода решения используется метод "виртуальных фотонов"/4/. Поле, несомое сгустком электронов, раскладывается на Фурье-компонен-

ты по времени, решается задача рассеяния или дифракции виртуальных фотонов в структуре, а затем полученные Фурье-компоненты полного поля собираются вновь. Такая методика, естественно, предопределяет громоздкость решений и необходимость больших затрат машинного времени на ЭВМ. Кроме того, появляются некоторые сложности при необходимости решать задачи с начальными данными. Кстати, в реальных задачах с учетом начальных условий, когда скорости электронов еще далеки от релятивистских, желательно освободиться от "приближения заданных токов".

Ниже обсуждается расчет возбуждения неоднородной структуры, основанный на методике, отличной от используемой ранее. Соответствующая группа уравнений Максвелла с разрывным пространственным распределением плотности тока (компактный сгусток электронов в виде тора прямоугольного сечения) решается непосредственно методом конечных разностей без каких-либо аналитических разложений. На таком пути удастся эффективно учитывать как начальные данные, так и граничные условия. Реализован расчет модели неоднородной структуры с ограниченным объемом. Как и в предшествующих работах, используется заданный закон движения источника: предполагается его равноускоренное движение от состояния покоя. Вопросы излучения в случае равноускоренного движения заряда в свободном пространстве подробно рассмотрены в /5/.

Дальнейшим шагом было бы решение самосогласованной задачи с тем, чтобы учесть влияние реального ускоряющего поля, когда его величина соизмерима с величиной полей, возбуждаемых сгустком *). Мы надеемся, что предложенный метод решения гиперболической системы с разрывами на малой относительно основной области Ω площадке (σ, σ) может быть использован для решения других задач. Например, *) трудность состоит в необходимости перенормировки массы сгустка зарядов.

для решения задач с более сложными краевыми условиями. Основные трудности в таких задачах связаны с обходом окрестности разрывов. Эти трудности нами преодолены.

В процессе счета мы получаем динамику полной карты поля (≈ 9000 точек в Ω и 600 шагов по времени). При этом затраты машинного времени (2 часа 40 минут на ЭВМ СДС-6200) соизмеримы с затратами на обсчет 5-6 точек при использовании метода "виртуальных фотонов".

I. Математическая постановка задачи и метод решения

Ввиду аксиальной симметрии рассматривается верхняя половина меридионального сечения структуры (см. рис. I), где даны и соответствующие обозначения.

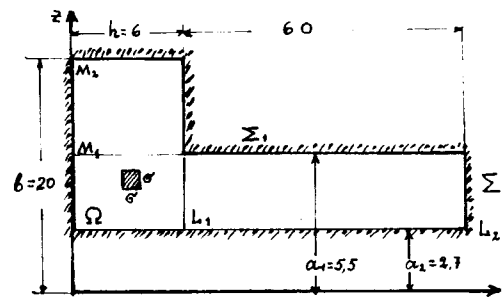


Рис. I.

Через Σ_1 и Σ_2 обозначены соответственно горизонтальные и вертикальные участки границы Γ области Ω : $\Gamma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$; $(6, 6)$ - сечение сгустка. Приняты обозначения $E_z(r, z, \xi) = U$, $E_r(r, z, \xi) = V$; $H_\varphi(r, z, \xi) = W$; $\xi = ct$. В области Ω решается краевая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{\partial W}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial(\tau W)}{\partial r} - \mathcal{F}(\tau, z, \xi) \\ \frac{\partial W}{\partial \xi} = -\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial r} \end{cases} \quad \begin{cases} U(\tau, z, 0) = U_0(\tau, z); V(\tau, z, 0) = V_0(\tau, z); W(\tau, z, 0) = 0 \\ U|_{z_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z}|_{z_1} = \frac{\partial W}{\partial \xi}|_{z_1} = 0, \\ V|_{z_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z}|_{z_2} = \frac{\partial W}{\partial \xi}|_{z_2} = 0. \end{cases} \quad (I)$$

Здесь $\mathcal{F}(\tau, z, \xi) = \begin{cases} \frac{4\pi r \rho}{\sqrt{B^2 + \xi^2}}, & (\tau, z) \in (\sigma, \sigma) \\ 0, & (\tau, z) \in (\sigma, \sigma). \end{cases}$

Сгусток электронов (центр (σ, σ)) движется по закону

$$z(\xi) = \begin{cases} q_0, & \xi \leq 0 \\ \sqrt{B^2 + \xi^2} - B + q_0, & \xi > 0, \end{cases}$$

B - постоянная, параметр ускорения, q_0 - начальное положение сгустка. Начальное значение поля определяется из решения потенциальной электростатической задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \mathcal{F}^*(\tau, z) \\ \phi|_r = 0, \quad \mathcal{F}^* = \begin{cases} 4\rho, & (\tau, z) \in (\sigma, \sigma) \\ 0, & (\tau, z) \in (\sigma, \sigma) \end{cases} \\ U_0(\tau, z) = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad V_0(\tau, z) = -\frac{\partial \phi}{\partial z}. \end{cases} \quad (2)$$

Решение краевой задачи (I) удовлетворяет энергетическому соотношению:

$$\frac{1}{2} \iint_{\Omega} (u^2 + v^2 + w^2) r dr dz \Big|_{\xi} - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (u^2 + v^2 + w^2) r dr dz \Big|_0 = - \iint_{\Omega} \mathcal{F} v r dr dz d\eta. \quad (3)$$

Численно последовательно решаются (2), (I) и для каждого $n\tau$ (τ - временной шаг) считаются левый и правый интегралы (3). Численный метод должен удовлетворять условиям:

1. Для более точной аппроксимации область Ω должна быть покрыта сеткой с достаточно мелким шагом.

2. Для сходимости решения разностной задачи к решению (I) необходимо подобрать устойчивую схему.

3. Программа должна быть компактной и не должна расходовать слишком много машинного времени.

В качестве основной была использована схема-тренога, хорошо зарекомендовавшая себя при счете сложных газодинамических задач /6,7/.

Для устранения неустойчивых явлений, наблюдавшихся в процессе счета, были использованы результаты общей теории устойчивости разностных краевых задач /8-14/. Метод решения выбирался с помощью численных экспериментов на модельных задачах.

На первом этапе работы были сосчитаны начальные данные. В результате численных экспериментов на малом (1,5 см x 1,5 см) квадрате был получен эффективный метод численного решения (2) на ЭВМ - метод прогноза /15/. Этот метод позволил сократить время счета задачи (2) приблизительно в 700 раз и освободить большое место в оперативной памяти ЭВМ.

Теоретическим исследованием модельной задачи, близкой к (I), было получено ограничение на отношение шагов сетки $\frac{\tau}{h} = \alpha \leq 1$. Основные расчеты проводились с $\tau = \frac{h}{2}$. При расчетах с $\tau = h$ наблюдалась неустойчивость.

Предварительно решалась динамическая задача на урезанной области $\tilde{\Omega}$ с длиной по z , равной $\frac{1}{4}$ длины Ω .

На этой области счет велся с шагами $h_r = h_z = 0.56$. Счет велся по двум схемам: А. По схеме Лакса с пересчетом по явному кресту (схема-тренога) /6/, В. По схеме Лакса с неявным пересчетом W .

В конце счета были получены также значения левых и правых интегралов в (3).

$$\begin{aligned} \text{А. } \tau &= 0,004375, \quad I_\lambda = 0,94767 \cdot 10^8, \quad I_\pi = 0,15460 \cdot 10^9 \\ \text{В. } \tau &= 0,004375, \quad I_\lambda = 0,10810 \cdot 10^9, \quad I_\pi = 0,11939 \cdot 10^9 \end{aligned}$$

Схема В лучше, чем А удовлетворяла соотношению (3), и ей было отдано предпочтение. Однако при счете на Ω расхождение в интегралах усилилось ($I_n \approx 20I_n$) и появились осцилляции, соизмеримые с основным пиком. Мы вернулись к схеме А, это устойчивая схема второго порядка точности /9/. Численные эксперименты показывали необходимость уменьшить шаги сетки. За счет сложной организации программы удалось уменьшить шаги сетки в два раза. При этом время счета возросло в 8 раз. Переход к схеме А и уменьшение шагов дало следующие результаты:

- 1) пропали осцилляции и счет стал более устойчивым,
- 2) более устойчиво стали считаться I_n и I_n , но они продолжали отличаться в 10 раз.

Счет показывал, что нужна еще более мелкая сетка. Дальнейшее уменьшение шагов сетки по всей области привело бы к перегрузке оперативной памяти. Использование внешних устройств нам казалось нецелесообразным по двум причинам: 1) счет каждого временного слоя идет быстро, слишком часто пришлось бы обращаться к внешним устройствам; 2) программа стала бы слишком сложной и большой.

Выходом из создавшегося положения было бы создание мелкой сетки в окрестности движущейся площадки. В пользу этого шага говорило следующее. Все расчеты показывали, что все неустойчивые явления рождаются в окрестности площадки и локализуются около нее. Далее расчеты показывали, что более неустойчиво считается правый интеграл в (3), зависящий от значения V на (σ, σ) . Т.к. V над площадкой меняет знак, то для правильного счета I_n на (σ, σ) необходимо иметь мелкую сетку. С учетом вышесказанного в окрестности (σ, σ) была создана движущаяся мелкая сетка с $h_x = h_x = \frac{h_x}{5}$, $\tau^* = \frac{h_x}{40}$. Мелкая сетка содержит 4632 точки, 100 из которых приходятся на (σ, σ) . Мелкая сетка Ω^* движется вместе с площадкой,

так что расположение (σ, σ) относительно Ω^* не меняется. Создание движущейся мелкой сетки существенно усложнило программу. Однако на таком пути удалось получить результаты, удовлетворяющие энергетическому соотношению на каждом шаге по ξ , и, наконец, нам удалось сосчитать интересующие нас интегралы. Локально шаг сетки был уменьшен в 5 раз. При таком уменьшении шага по всей области время счета увеличилось бы в 125 раз, даже если бы мы имели необходимое место в оперативной памяти ЭВМ.

Для основной физической модели (В=35) энергетическое соотношение удовлетворяется с двумя знаками ($I_n = 0.126 \cdot 10^9$, $I_n = 0.125 \cdot 10^9$). То есть относительно счета с равномерной сеткой точность счета увеличилась на 3 порядка при увеличении времени счета в 4 раза.

II. Обсуждение результатов счета

В результате решения задачи (I) получаются значения величин поля E_x, E_z, H_φ на некоторой сетке пространственно-временных точек $M(\tau_i, \xi_j, \xi_k)$. Эти величины дают возможность следить, как за изменением поля во времени в фиксированной точке внутри структуры (что важно для расчета автоускорения и вопросов устойчивости движения частиц в сгустке), так и за измерением поля в месте нахождения источника или за изменением полной энергии поля (что важно для расчета потерь энергии в случае метода колец).

При рассмотрении результатов счета полезно учесть следующую условную схему процесса изменения поля внутри области Ω .

1. Полное начальное статическое поле в Ω при $\xi \leq 0$; энергию этого поля обозначим W_0 .

2. Изменение поля самого источника при увеличении скорости, перестройку "несомого" им статического поля (W_1) и излучение за

счет ускорения (W_2). Эту часть энергии обозначим $W_1 + W_2$.

3. Возбуждение излучения сторонних токов, наводимых полем источника на стенках структуры. Энергия этого излучения: $W_3 = W_3' + W_3''$, где W_3' - вклад, возникший из-за наличия переходного участка структуры (когда $\alpha_1 \neq \beta$ рис.1), а W_3'' - вклад из-за торцевых стенок.

Если использовать закон сохранения (3), то W_0 выражается вторым членом левой части, а W_1 , W_2 и W_3 разделить затруднительно.

Влияние неоднородностей структуры можно оценить, например, сравнивая результаты счета (I) с результатами счета для структуры без переходного участка (когда $\alpha_1 = \beta$) или для достаточно длинной структуры. Закон движения источника и возможные предположения об изменении его размеров в процессе движения, вообще говоря, должны оказать существенное влияние на соотношение между величинами W_1 , W_2 , W_3 .

Принятые при расчетах параметры движения источника: соответствующее значение релятивистского фактора γ в зависимости от z - положения центра сгустка и параметра ускорения B , даны в таблице I. В этой таблице $z = 60$ см - соответствует конечному положению источника во всех расчетах; $z = 6$ см - положение сгустка в момент наибольшего сближения с переходом в структуре. Параметру B можно дать следующее физическое истолкование: при $B = \frac{m_0 \gamma_1 c^2}{e E_0}$ такой же закон движения, как был принят для всего сгустка, имел бы один электрон, "утяжеленный поперечным релятивистским фактором γ_1 " в ускоряющем однородном поле E_0 , если пренебречь самодействием. Например, $B=35$, при $\gamma_1 = 10$ соответствовало бы $E_0 = 150$ кВ/см.

Для приведенных случаев и для полного числа частиц в сгустке $N = 3 \cdot 10^{13}$, были обчислены полные карты полей для двух вариантов структур - с переходным участком и без него. В качестве примера на рис.2 даются графики E_z и E_x для основной структуры в зависимости

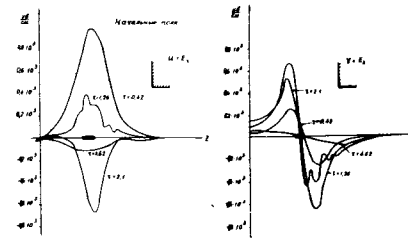


Рис.2.

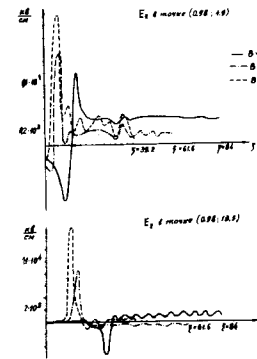


Рис.3,4.

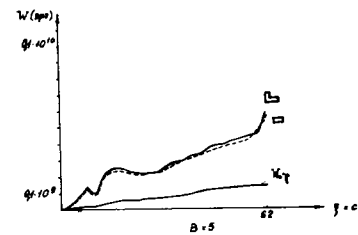


Рис.5.

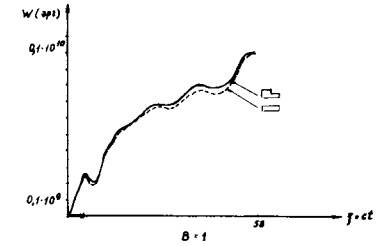


Рис.6.

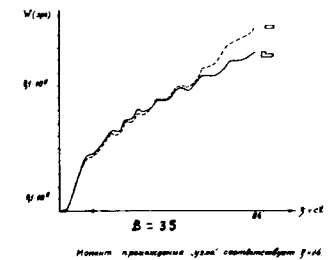


Рис.7.

Таблица 1.

$\frac{B_{см}}{z_{см}}$	35	5	1
6	1,08	1,6	4
60	2,63	12,4	58

Таблица 2.

B	$W(эВ)$	E	\tilde{W}_2
35	$1,26 \cdot 10^8$	$7 \cdot 10^8$	10^7
5	$5,72 \cdot 10^8$	$3,3 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^8$
1	10^9	$1,6 \cdot 10^9$	$8 \cdot 10^9$

от z и при разных γ для $\xi \leq 0$, т.е. начальные значения поля. На рис.3,4 приведены графики E_z в фиксированных точках (γ, z) в зависимости от времени ξ . На всех графиках расстояние z указано от нижней границы области Ω .

Из этих графиков видно, что положение главного максимума в каждом случае соответствует моменту прохождения источника около рассматриваемой точки. Время прохождения зависит от параметра B . Соответствующие графики для E_z, H_φ , а также и для структуры без переходного участка аналогичны и по величине и по характеру, хотя более регулярны в последнем случае. Проследить и идентифицировать зависимость отдельных промежуточных максимумов от прибытия возмущений от разных частей структуры в обоих случаях трудно. Однако можно сказать, что в большинстве случаев эти максимумы устойчиво сохраняются при изменении шагов сетки.

Большое внимание при счете обращалось на удовлетворение закона сохранения (3). Оказалось, что достаточно хорошее выполнение равенства (3) достигается лишь при счете с малым шагом. Однако с уменьшением шага главным образом уточняется лишь правая часть равенства, в то время как величина левой части устойчива и стабилизируется уже при умеренной величине шага. Учитывая это, разумно за энергетическую характеристику принять объемный интеграл левой части формулы (3).

Соответствующие временные зависимости для этих интегралов показаны на рис.5-7. На каждом графике приведены расчетные кривые для структур с переходом и однородной структуры. Как видно из графиков, во всех случаях переход к другой структуре мало отразился на энергетических характеристиках.

По-видимому, слабое отличие энергетических характеристик в разных случаях можно объяснить, во-первых, сильным влиянием зарядов - изоб-

ражений сначала на левой, затем на правой торцевых стенках структур, во-вторых, принятым распределением заряда источника (сохранение длины сгустка в лабораторной системе). В этом случае спектр когерентных волн, возбуждаемых за счет перехода, ограничен длиной сгустка.

В заключение можно привести таблицу 2, где в зависимости от параметра B дано конечное значение полной энергии поля W (величина объемного интеграла в левой части (3)), и, для сравнения, дана полная энергия \mathcal{E} движения сгустка для этого момента времени ξ (посчитанная по формуле $\mathcal{E} = N \cdot mc^2 \gamma_1 \gamma$ при $N = 3 \cdot 10^{13}$, $\gamma_1 = 10$ и величин γ , взятых из таблицы I - соответствующей чисто механической задаче). В этой же таблице дана оценка \tilde{W}_2 - излученной энергии для точечного сгустка с тем же полным зарядом $Q = Ne$, движущимся по тому же закону и в то же время, как и в задаче, однако в свободном пространстве (оценка сделана по формуле $\tilde{W}_2 \sim \frac{2Q^2}{3B^2} \xi_{конеч.}$, где ξ конеч. соответствует положению $z = 60$ см).

В таблице 2 наибольший интерес представляет первая строка, дающая представление о реально возможном случае ускорения. Как видно, в этом случае "условные энергетические потери" - отношение $\frac{W}{\mathcal{E}}$ составляют $\sim 18\%$. Отметим также, что при дальнейшем увеличении ускорения это отношение не имеет катастрофического роста.

Можно сказать, что рассмотренный случай соответствует сохранению размера сгустка в л-системе, однако с самого начала был взят очень короткий сгусток: $2\ell \approx 0,6$ см и таким образом, если говорить на языке Фурье-разложения, то он также должен возбуждать когерентно волны почти до миллиметрового диапазона.

Наконец, на рис.6 дана еще одна ориентировочная характеристика-график величины $W_0 \gamma$, где W_0 - начальное значение энергии поля сгустка в Ω . Для числа частиц $N = 3 \cdot 10^{13}$, $W_0 \sim 1.2 \cdot 10^7$ эрг. Изме-

ние $W_0 \gamma(\xi)$ в какой-то мере имитирует рост электромагнитной массы источника (хотя в W_0 имеется вклад и от полей, наведенных на стенках области зарядов, движение которых явно нерелятивистское). Как видно из графика, рассматриваемая кривая проходит значительно ниже кривой $W(\xi)$.

III. ВЫВОДЫ

Из всего сказанного можно сделать следующие выводы:

1. Рассмотрен и реализован новый подход к решению инженерно-физической модельной задачи о возбуждении замкнутой структуры движущимся компактным сгустком зарядов. Подход заключается в непосредственном решении группы уравнений Максвелла методом конечных разностей.

2. Разработаны схемы решений, при которых этот подход является эффективным и имеет преимущества по сравнению с обычным методом разложений в отношении полноты выдаваемых численных результатов и скорости счета.

3. В противоположность используемому обычно методу Фурье-разложений, для которого задача указанного вида с начальными данными является "наиболее неудобной", предлагаемый метод хорошо приспособлен для решения таких задач.

4. Рассматриваемый подход является методом прямого решения с корректным учетом начальных условий, поэтому, в отличие от методов, основанных на теории возмущений, он, по-видимому, может быть использован в наиболее трудном случае: для получения самосогласованного решения задачи, когда возбужденные поля сравнимы по величине с внешним полем, ускоряющим сгусток. (Правда, при решении самосогласованной задачи необходимо еще преодолеть трудности, связанные с перенормировками).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.М.Болотовский, Г.В.Воскресенский, УФН, 88, 209 (1966).
2. Б.М.Болотовский, Г.В.Воскресенский, УФН, 94, 377 (1968).
3. И.Н.Иванов и др. ЭЧАЯ I, вып.2, стр. 393, 1971.
4. В.Гайтлер - "Квантовая теория излучения" - ИЛ, 1956.
5. В.Л.Гинзбург - УФН, 96, вып.3, 569(1969).
6. С.К.Годунов, В.С.Рябенский - "Разностные схемы" - Из-во "Наука" М.1973.
7. С.К.Годунов - "Разностные методы решения уравнений газовой динамики" - лекции для студентов НГУ, Из-во СОАН СССР, 1962 г.
8. А.А.Самарский, А.В.Гулин - "Устойчивость разностных схем" - Из-во "Наука", 1973.
9. И.С.Березин, Е.П.Жидков - "Методы вычислений", том II, ФЛ, М., 1962.
10. Н.С.Бахвалов. "Численные методы". Из-во "Наука", 1973.
11. Richtmyer R.D., Morton K.W. - "Difference methods for initial value problems" - John Wiley and Sons. New York. London. Sydney. 1967.
12. С.И.Сердюкова, "Необходимые и достаточные условия устойчивости одного класса разностных краевых задач", ДАН СССР, том 208, № I, 52-55, 1973.
13. С.И.Сердюкова. "Об устойчивости в равномерной метрике систем разностных уравнений", ЖВМ и МФ, том 7,3, 497-503, 1967.
14. С.И.Сердюкова. "Об осцилляциях, возникающих при численных расчетах разрывных решений дифференциальных уравнений", ЖВМ и МФ, том II, 2, 4II-424, 1971.

15. Н.С.Бахвалов, В.С.Бондаренко, Е.П.Жидков, С.И.Сердюкова.
"Программирование и математические методы решения физических задач", ОИЯИ, Д10-7707, Дубна, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 февраля 1975 г.