

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



С 34512
М-225

26/2-75

P9 - 8625

1916/2-75
В.Н.Мамонов, С.Б.Рубин

К РАСЧЕТУ ПОЛЕЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ
ДВИЖУЩИМЯ СГУСТКОМ ЭЛЕКТРОНОВ
В КООКСИАЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ

1975

P9 - 8625

В.Н.Мамонов, С.Б.Рубин

К РАСЧЕТУ ПОЛЕЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ
ДВИЖУЩИМСЯ СГУСТКОМ ЭЛЕКТРОНОВ
В КОАКСИАЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

I.

Методика определения вторичного поля, возбужденного при движении сгустка электронов вдоль оси цилиндрического резонатора с подводящими волноводами /см. 1/, состоящая в том, что вторичное поле в каждой частичной области структуры раскладывается по собственным волноводным гармоникам этой области, а поле источника представляется как поле сгустка, движущегося в бесконечном волноводе соответствующего данной частичной области радиуса, распространяется и на случай коаксиального резонатора.

Структура с обозначением размеров и необходимым разбиением на частичные области представлена на рис. 1. Область G_3 коаксиального резонатора может быть заполнена средой с $\epsilon \neq 1, \mu \neq 1$.

Представление фурье-компонент вторичного аксиально-симметричного поля E-волн в областях коаксиального резонатора будет иметь вид:

$$E'_{\omega r} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} g_n A_n J_1\left(\frac{\kappa_n}{a} r\right) e^{-ig_n z}, \dots \text{ обл. } G_1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} g_n D_n J_1\left(\frac{\kappa_n}{a} r\right) e^{ig_n z}, \dots \text{ обл. } G_2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left[N_1(k_n r) - \frac{N_0(k_n d)}{J_0(k_n d)} J_1(k_n r) \right] [G_n e^{iy_n z} + F_n e^{-iy_n(z-L)}] + \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{r} [\xi_0 e^{ik\sqrt{\mu\epsilon}z} + F_0 e^{-ik\sqrt{\mu\epsilon}(z-L)}], \dots \text{ обл. } G_3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n J_1\left(\frac{\kappa_n r}{b}\right) [B_n e^{ih_n z} + C_n e^{-ih_n(z-h)}], \dots \text{ обл. } G_4, \quad /1/$$

$$E'_{\omega z} = \begin{cases} -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{a} A_n J_0\left(\frac{\kappa_n r}{a}\right) e^{-ig_n z}, \dots \text{ обл. } G_1 \\ i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{a} D_n J_0\left(\frac{\kappa_n r}{a}\right) e^{ig_n z}, \dots \text{ обл. } G_2 \\ i \sum_{n=1}^{\infty} k_n \left[N_0(k_n d) - \frac{N_0(k_n d)}{J_0(k_n d)} J_0(k_n r) \right] \times \\ \times [\xi_n e^{i\gamma_n z} - F_n e^{-i\gamma_n(z-L)}] \dots \text{ обл. } G_3 \\ i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{b} J_0\left(\frac{\kappa_n r}{b}\right) [B_n e^{ih_n z} - C_n e^{-ih_n(z-h)}], \dots \text{ обл. } G_4, \end{cases} \quad /2/$$

$$H'_{\omega\phi} = \begin{cases} -k \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1\left(\frac{\kappa_n r}{a}\right) e^{-ig_n z}, \dots \text{ обл. } G_1 \\ k \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_1\left(\frac{\kappa_n r}{a}\right) e^{ig_n z}, \dots \text{ обл. } G_2 \\ k\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[N_1(k_n r) - \frac{N_0(k_n d)}{J_0(k_n d)} J_1(k_n r) \right] [\xi_n e^{i\gamma_n z} - F_n e^{-i\gamma_n(z-L)}] + \\ + \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\xi_0 e^{ik\sqrt{\mu\epsilon}z} - F_0 e^{-ik\sqrt{\mu\epsilon}(z-L)}], \dots \text{ обл. } G_3 \\ k \sum_{n=1}^{\infty} J_1\left(\frac{\kappa_n r}{b}\right) [B_n e^{ih_n z} - C_n e^{-ih_n(z-h)}], \dots \text{ обл. } G_4, \end{cases} \quad /3/$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, κ_n , $(n=1,2,3,\dots)$ - корни уравнения

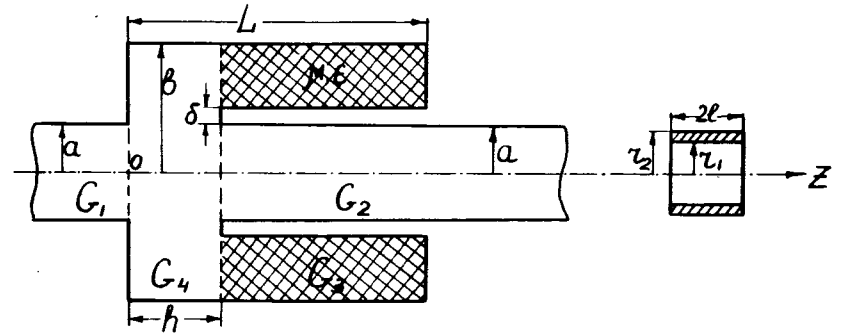


Рис. 1. Схема структуры и форма сгустка.

$$J_0(\xi) = 0; \quad d = a + \delta; \quad g_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\kappa_n}{a}\right)^2}; \quad h_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\kappa_n}{b}\right)^2}; \\ \gamma_n = \sqrt{k^2 \mu\epsilon - k_n^2}; \quad k_n \approx \frac{n\pi}{b-d}, \quad /4/$$

$A_n, B_n, C_n, D_n, \xi_n, F_n, (n=1,2,\dots), \xi_0, F_0$ - подлежащие определению коэффициенты.

Представление поля E_{ω}^0 сгустка /форма сгустка показана на рис. 1/ в соответствующих областях можно взять, например, из работы /1/. Условия "сшивки полей" на границах областей для коаксиального резонатора имеют вид:

$$[E_{\omega r}^0 + E'_{\omega r}]_{-0} = \begin{cases} 0, & a \leq r \leq b \\ [E_{\omega r}^0 + E'_{\omega r}]_{+0}, & r \leq a \end{cases}$$

$$[H_{\omega\phi}^0 + H'_{\omega\phi}]_{-0} = [H_{\omega\phi}^0 + H'_{\omega\phi}]_{+0}, \quad r \leq a$$

$$[E_{\omega r}^0 + E'_{\omega r}]_{h-0} = \begin{cases} [E_{\omega r}^0 + E'_{\omega r}]_{h+0}, & r \leq a \\ 0, & a \leq r \leq d \\ [E'_{\omega r}]_{h+0}, & d \leq r \leq b \end{cases}$$

/5/

$$[H_{\omega\phi}^0 + H'_{\omega\phi}]_{h-0} = [H_{\omega\phi}^0 + H'_{\omega\phi}]_{h+0}, \quad r \leq a$$

$$[H_{\omega\phi}^0 + H'_{\omega\phi}]_{h-0} = [H'_{\omega\phi}]_{h+0}, \quad d \leq r \leq b$$

$$[E'_{\omega r}]_L = 0, \quad d \leq r \leq b.$$

Путем умножения уравнений /5/ на подходящие системы ортогональных функций /например, для границы

$$\text{областей } G_4, G_3 \text{ на } r [N_1(k_m r) - \frac{N_0(k_m d)}{J_0(k_m d)} J_1(k_m r)], (m=1,2,\dots)$$

и интегрирования по r получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

II.

Системы уравнений для коэффициентов, после их усечения, и выражения /1/-/5/ служат основой для программы ЭВМ.

Программа вычисляет частотные компоненты составляющих поля $E_{\omega}(\bar{r}, t)$, $H_{\omega}(\bar{r}, t)$ в любой пространственно-временной точке (\bar{r}, t) , лежащей внутри самих резонаторов или в подводящих волноводах, а также полные величины полей $E(\bar{r}, t)$, $H(\bar{r}, t)$, соответствующие заданной частотной области, т.е. интегралы

$$\{\bar{E}, \bar{H}\} = 2\text{Re} \left\{ \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} E'_{\omega}(\bar{r}, t); \bar{H}'_{\omega}(\bar{r}, t) d\omega \right\} \quad /6/$$

в этой точке. Представление полей в форме /1/-/5/, /6/ является удобным для вычислений в том отношении, что постоянные коэффициенты A_n, B_n, \dots зависят только от частотной области, геометрических параметров структуры и параметров источника, но не от пространственно-временной точки наблюдения. Это обстоятельство было использовано в программе для того, чтобы с помощью однажды рассчитанной системы коэффициентов /при фиксированном ω / получить величины полей сразу в нескольких точках. Число необходимых коэффициентов определяется методом проб.

При вычислении интегралов по ω в /6/ в некоторых частотных областях приходится учитывать наличие полюсов подынтегральных функций, которые появляются при обращении в нуль детерминанта системы уравнений для коэффициентов. Эти полюса соответствуют собственным частотам рассматриваемой структуры.

При заданном шаге интегрирования программа ЭВМ автоматически выявляет окрестности, внутри которых могут находиться значения ω , соответствующие полюсам подынтегральной функции. В процессе вычисления интегралов эти окрестности /интервалы по переменной ω , длина которых соответствует шагу интегрирования/ программой опускаются и делается обход полюса сверху с помощью численного вычисления полувычета /при принятой временной зависимости $e^{-i\omega t}$ /.

Процедура вычисления основывается на следующем. Исходя из обычных соотношений

$$\{\bar{E}; \bar{H}\}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\bar{E}; \bar{H}\}_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega; \{\bar{E}; \bar{H}\}_{-\omega} = \{\bar{E}^*; \bar{H}^*\}_{\omega}$$

и учитывая, что в окрестности какого-либо полюса $\omega = \omega_j$ каждая из подынтегральных функций должна иметь вид

$$\frac{P(\omega)}{\omega^2 - \omega_j^2}, \quad \text{при переходе к интегрированию только по об-}$$

ласти частот $\omega \geq 0$ и при обходе полюса сверху получим соответствующий вклад в виде:

$$2\left\{ \operatorname{Re} \int_{\omega_j - \rho}^{\omega_j} () d\omega + \operatorname{Re} \int_{\omega_j}^{\omega_j + \rho} () d\omega \right\} + \frac{\pi}{2\omega_j} \operatorname{Im} \{P(\omega_j)\}, \quad /7/$$

где $\rho \rightarrow 0$. Величина $P(\omega_j)$ приближенно может быть вычислена, если взять значения подинтегральной функции в двух близких точках слева и справа от точки $\omega = \omega_j$ /см. /1/ /. Существенно, однако, чтобы расстояние от середины вырезаемого отрезка до точки ω_j было значительно меньше половины его длины, т.е. практически необходим двойной переход к пределу $\lim \delta \rightarrow 0$ и $\lim \xi/\delta \rightarrow 0$, где δ - длина вырезаемого отрезка, а ξ - расстояние точки ω_j от его середины. При этих условиях достаточно точно вычисляется и главное значение интеграла. В некоторых случаях оказывается необходимой итерация. Вырезаемый около полюса интервал принимается за исходный и, таким образом, положение полюса уточняется уже внутри него. После этого необходимо возвратиться к шагу интегрирования прежнего порядка, передвинув начало области так, чтобы полюс оказался близко к центру. Более подробно методика вычисления интегралов в смысле главного значения в рассмотренном случае приведена в /2/.

III.

По изложенной методике был выполнен ряд расчетов. Рассматривался коаксиальный резонатор следующих размеров: $a = 6$ см, $b = 15$ см, $h = 7$ см, $L = 40$ см; в другом варианте длина ускоряющего промежутка h равнялась 12 см. Варьировались размеры сгустка /при одинаковом во всех случаях числе частиц в сгустке $N = 10^{13}$ /. Изменялись также скорость сгустка v и ее направление.

Ширина охватываемой частотной области, по которой необходимо подсчитывать интегралы, в /6/ изменяется в зависимости от $\beta = v/c$. расширяясь с увеличением β .

* При числе частиц $N = N_1 \cdot 10^{13}$ все величины полей на графиках надо умножить на N_1 .

Соответствующий верхний предел в /6/ поэтому определялся численно из условия достаточного убывания амплитуды подинтегральных функций *.

Верхний предел в суммах в /1/-/3/, т.е. число коэффициентов, после ряда проб был принят равным 30, что давало точность $\sim 10\%$ - 15%.

В табл. приведено несколько последовательных собственных частот резонатора для $h = 7$ см и $h = 12$ см /т.е. значения величины $k = \omega/c$ для которых детерминант системы обращался в нуль/.

Расчеты довольно хорошо согласуются с предельным случаем движения с малой скоростью, когда следует ожидать, что главный вклад дают наводимые квазистатические поля. Так, для сгустка $\ell = 2,5$ см, $r_1 = 3$ см, $r_2 = 4,5$ см, $\beta = 0,01$; $h_{\text{резон.}} = 7$ см, $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ / поля оказываются практически не зависящими от направления его движения.

Распределение составляющей поля E'_z действующего в торцевых точках сгустка в трех последовательных его положениях внутри резонатора ** показано на рис. 2а. Стрелками дано направление действия силы, а цифры соответствуют величине E'_z в кВ/см. Резкую несимметрию сил в отмеченных положениях, когда создается впечатление, что сгусток как бы втягивается в волновод справа, можно объяснить большой концентрацией наведенного в это время заряда на более острой кромке коаксиальной трубки. Величина наведенного магнитного поля в рассматриваемом случае мала /порядка нескольких эрстед/, хотя ТЕМ-волна проникает в коаксиальную область.

На рис. 2б приведено распределение E'_z /В/см/ для двух положений длинного сгустка $\ell = 100$ см, $r_1 = 4,8$ см, $r_2 = 5,1$ см; $h_{\text{резон.}} = 7$ см/. В этом случае принято $\gamma = 4$,

* Известно теоретически, что асимптотический закон спада амплитуд с частотой - экспоненциальный.

** Сгусток в каждом положении условно изображен заштрихованным отрезком, длина которого дана в том же масштабе, что и зазор резонатора; направление движения - слева направо.

Таблица

№	$h=7\text{ см}$	$h=12\text{ см}$
1	0.0394	0.0461
2	0.1150	0.1323
3	0.1819	0.1908
4	0.2465	0.2529
5	0.3222	0.3270
6	0.3807	

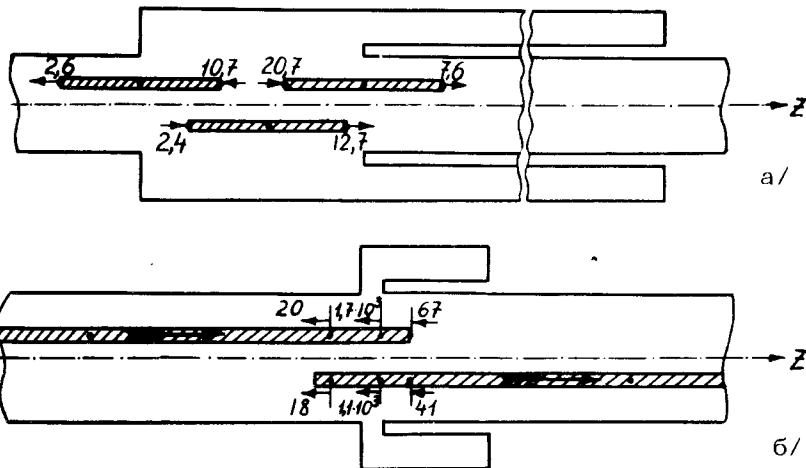


Рис. 2. Распределение сил, действующих в различных точках короткого и длинного сгустков в разные моменты времени.

и положения центра сгустка соответствуют моментам $ct_1 \approx -85$ см, $ct_2 \approx 85$ см. Как видно, при таком движении силы уже чисто тормозящие; из-за некогерентности возбуждения коротких волн основное поле сосредоточено внутри зазора.

На рис. 3 /кривая 5/ дано E'_z , действующее на короткий сгусток / $l = 0,1$ см, $r_1 = 4,8$ см, $r_2 = 5,1$ см; $\gamma = 1,2$; $h_{\text{резон.}} = 7$ см/ в месте его положения, т.е. тормозящая сила. На том же рисунке кривые 1-4 последовательно показывают вклады в E'_z в каждой расчетной точке: интеграла в смысле главного значения /по формуле /7// - кривая 1, полюсов 1,2,3 /см. табл/ - кривые 2-3-4 и, наконец, суммарная добавка от полюсов 4,5,6 приводит уже к кривой 5. Таким образом, видно, что интеграл описывает в основном квазистатическое поле, в котором сгусток не теряет и не приобретает энергию, а обходы полюсов дают потери на возбуждение мод резонатора*.

На рис. 4 кривые 1,2 повторяют соответственно кривые 5 и 1 рис. 3. Кроме того, даны кривые 3 и 4, взятые из рис. 4 работы /3/. В этой работе практически при тех же геометрических параметрах и при $\gamma = 1,02$ - кривая 4 и $\gamma = 1,2$ - кривая 3 аналогичная задача решалась путем модельного представления коаксиального резонатора с помощью двух коаксиальных переходов с использованием "согласования" точных решений методом Винера-Хопфа, соответствующих одному коаксиальному переходу. Модель в /3/ пригодна только для слаборелятивистского движения сгустка, когда когерентно возбуждаются лишь длинные волны. Однако в этом случае, как видно из рис. 4, имеет место достаточное согласование результатов по обоим методам. Так, кривая 4, ближе соответствующая квазистатическому случаю, качественно подходит на "квазистатическую кривую" 2. С увеличением энергии сгустка сближаются уже кривые 1 и 3.

* Пунктирные вертикальные линии на рис. 3-5 показывают ширину зазора резонатора /от точки $z=0$ /.

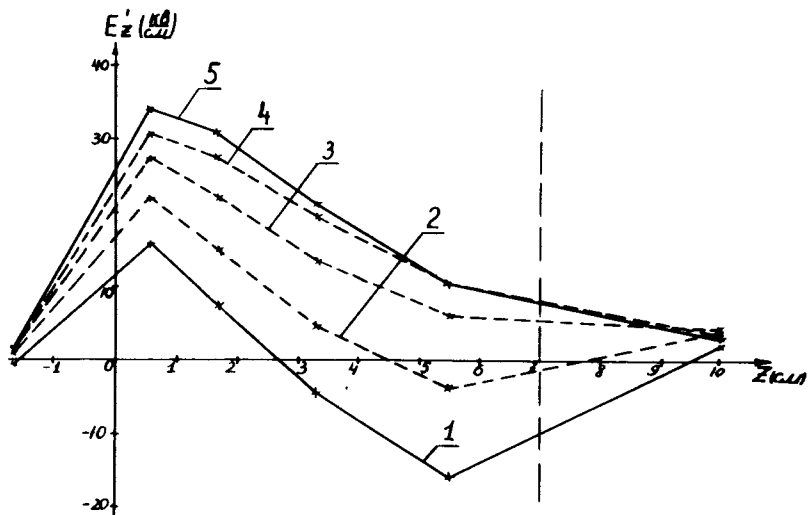


Рис. 3. Вклад разных мод в составляющую E_z' возбужденного в резонаторе поля.

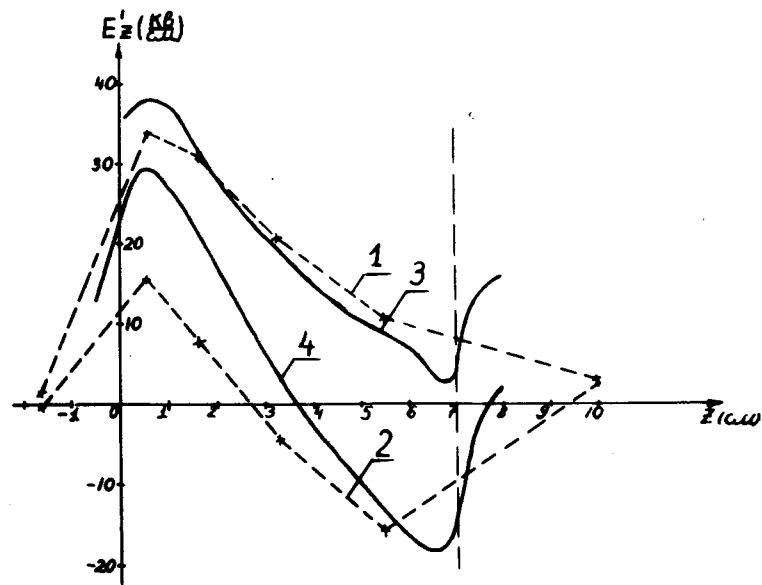


Рис. 4. График E_z' для различных случаев движения короткого сгустка.

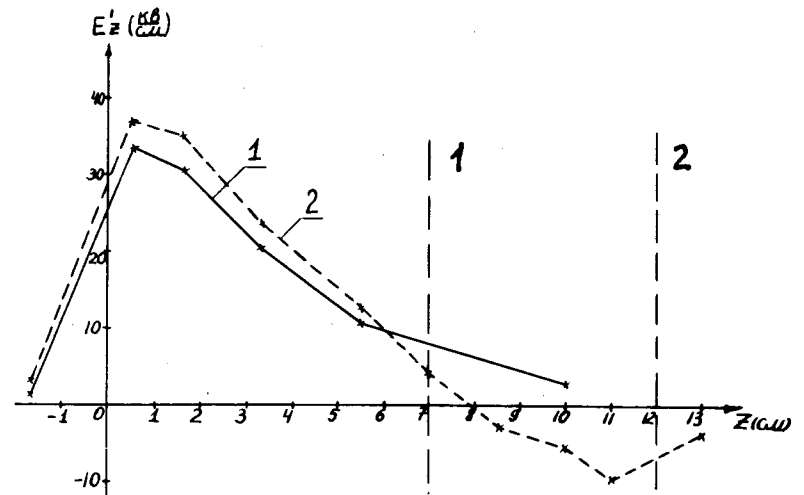


Рис. 5. График значений E_z' в месте нахождения короткого сгустка в процессе движения в резонаторе с зазором $h = 7$ см /кривая 1/ и зазором $h = 12$ см /кривая 2/.

Сравнение случаев движения короткого сгустка /при $\gamma = 1,2$ / в резонаторах с зазором $h = 7$ см и $h = 12$ см дано на рис. 5. Кривая 1 повторяет кривую 5 рис. 3, пунктирная кривая соответствует зазору $h = 12$ см.

В заключение авторы выражают благодарность В.А.Прейзендорфу за многочисленные консультации по вопросам программирования.

Литература

1. Г.В.Воскресенский, В.Н.Курдюмов. ЖТФ, №10, 1971 г.
2. В.А.Прейзендорф, С.Б.Рубин. Депонированное сообщение ОИЯИ, Б1-11-8671, Дубна, 1975.
3. З.Г.Гаврилова, М.Г.Нехаева, С.Б.Рубин. Сообщение ОИЯИ Р9-7544, Дубна, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 февраля 1975 года.