86-83

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р9-86-83

В.О.Нефедьев

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

1986

Введение

Эффективным способом решения задач электронной оптики является метод синтеза. В основе метода лежит алгоритм моделирования конфигурации электродов, необходимой для формирования электронного пучка с заданными характеристиками. Этот метод может найти применение и при расчете магнитных линз, когда требуется восстановить источники по заданному на некоторой траектории магнитному полю и его градиенту. Математически метод синтеза сводится к решению дифференциального уравнения Лапласа с граничными условиями Коши на открытой поверхности. Граничные условия и форма поверхности могут определяться решением другой задачи, поставленной для внутренней области, занимаемой пучком.

В общем случае задача Коши для уравнения Лапласа некорректно поставлена, т.е. бесконечно малому изменению начальных данных соответствует конечное или неограниченное изменение решения. В связи с этим прямое интегрирование исходного уравнения численными методами, вносящими ошибку округления в процессе решения, не приведет к достоверному результату. Однако ряд аналитических методов позволяет преобразовать данную задачу к виду, удобному для применения численных методов.

Метод Рэдли /I/ основан на решении системы интегральных уравнений в частном случае, когда границей пучка является поверхность уровня системы координат, допускающая разделение переменных в уравнении Лапласа. Более универсален метод Харкера /2/, использующий аналитическое продолжение решения с вещественной оси на комплексную плоскость. Его интегральная форма /3/ предпочтительнее для задач с граничными условиями, определяемыми простыми аналитическими функциями. При задании этих условий в виде сеточных функций интегральная форма не имеет преимуществ перед дифференциальной. Недостаток указанного метода - большой объём вычислений и связанное с этим резкое снижение точности конечных результатов. В данной работе представлен новый вариант метода Харкера, позволяющий избежать указанного недостатка.

I. Метод Харкера

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Phi_1(\zeta)\ ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \Phi_2(\zeta)\ ; \quad \varphi = \Phi_3(\zeta)$$

на кривой

$$r_{кр} = R(\zeta)\ ; \quad z_{кр} = \zeta\ , \quad \zeta \in [0; \infty[\ .$$

Конформное отображение вида $W(\xi) = Z_{кр} + \vec{i}\, \tau_{кр} = \xi + \vec{i} R(\xi)$ переводит плоскость координат (Z , τ) в плоскость (ξ , η):

$$W(\xi+\vec{i}\eta) = \xi + \vec{i}\eta + \vec{i} R(\xi+\vec{i}\eta) = U(\xi,\eta) + \vec{i} V(\xi,\eta).$$

Функции U и V удовлетворяют условиям Коши – Римана

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}, \qquad (I.I)$$

где $Z = U(\xi,\eta)$, $\tau = V(\xi,\eta)$ $\left(Z_{кр} = U(\xi,0),\ \tau_{кр} = V(\xi,0)\right)$.
Обозначим: $P = \partial\psi/\partial Z$, $Q = \partial\psi/\partial\tau$, т.е.

$$\partial P/\partial\tau - \partial Q/\partial Z = 0. \qquad (I.2)$$

Тогда уравнение Лапласа принимает вид

$$\partial Q/\partial\tau + \frac{Q}{\tau} + \partial P/\partial Z = 0. \qquad (I.3)$$

Используя (I.I), в координатах (ξ , η) (I.2) и (I.3) преобразуются в систему

$$\partial P/\partial\eta = \partial Q/\partial\xi + \frac{1}{V}\, \partial V/\partial\xi\, Q,$$
$$\partial Q/\partial\eta = -\partial P/\partial\xi - \frac{1}{V}\, \partial U/\partial\xi\, Q, \qquad (I.4)$$

которую можно дополнить третьим уравнением

$$\partial\psi/\partial\eta = \partial\psi/\partial\tau\; \partial\tau/\partial\eta + \partial\psi/\partial Z\; \partial Z/\partial\eta = \partial U/\partial\xi\, Q - \partial V/\partial\xi\, P. \qquad (I.5)$$

Формально представим $\xi = \xi_1 + \vec{i}\,\xi_2$, $\xi_2 \in]-\infty; +\infty[$. Запишем (I.4)-(I.5) при некотором фиксированном $\xi_1 = a$ в координатах (η , ξ_2):

$$\partial P/\partial\eta = -\vec{i}\,\frac{Q}{V}\,\partial V/\partial\xi_2 - \vec{i}\,\partial Q/\partial\xi_2,$$
$$\partial Q/\partial\eta = \vec{i}\,\frac{Q}{V}\,\partial U/\partial\xi_2 + \vec{i}\,\partial P/\partial\xi_2,$$
$$\partial\psi/\partial\eta = -\vec{i}\,Q\,\partial U/\partial\xi_2 + \vec{i}\,P\,\partial V/\partial\xi_2. \qquad (I.6)$$

Данная система является гиперболической и, следовательно, устойчивой. Совместно с граничными условиями $P = \Phi_1(a+\vec{i}\xi_2)$, $Q = \Phi_2(a+\vec{i}\xi_2)$, $\psi = \Phi_3(a+\vec{i}\xi_2)$ на прямой $\eta = 0$ она имеет единственное решение. Точкам физического пространства соответствуют точки плоскости $\xi_2 = 0$.

Для того чтобы найти значения функций P , Q и ψ в $Z = a$, $\eta = b$ ($\tau = V(a,b)$), необходимо произвести интегрирование

системы (I.6) вдоль границы области ABC (рис.I), образованной пересечением характеристик $\eta = -\xi_2 + b$, $\eta = \xi_2 + b$ и прямой $\eta = 0$ /4/.

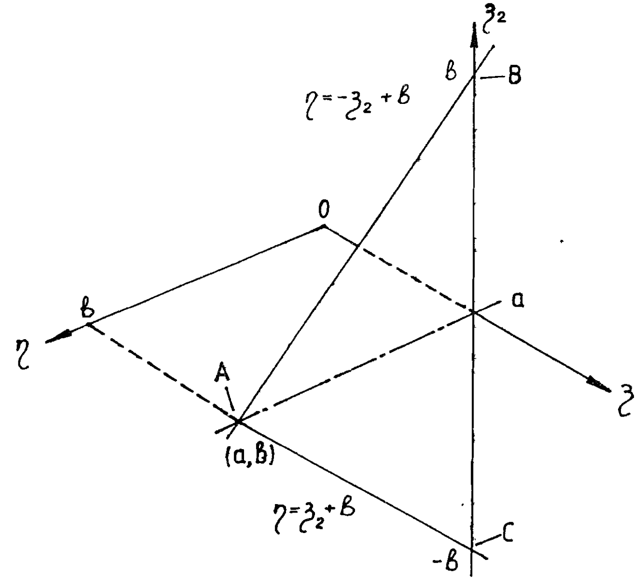


Рис.I

2. Экономичное численное интегрирование системы гиперболических уравнений

Один из вариантов интегрирования – использование явной разностной схемы $O(h^2)$ точности

$$\frac{P_{i+1\,j} - \bar{P}_{ij}}{h} = -\vec{i}\,\frac{\bar{Q}_{ij}}{V_{ij}}\left(\frac{\partial V}{\partial\xi_2}\right)_{ij} - \vec{i}\,\frac{Q_{i\,j+1} - Q_{i\,j-1}}{2h},$$
$$\frac{Q_{i+1\,j} - \bar{Q}_{ij}}{h} = \vec{i}\,\frac{\bar{Q}_{ij}}{V_{ij}}\left(\frac{\partial U}{\partial\xi_2}\right)_{ij} + \vec{i}\,\frac{P_{i\,j+1} - P_{i\,j-1}}{2h},$$
$$\frac{\psi_{i+1\,j} - \bar{\psi}_{ij}}{h} = -\vec{i}\,\bar{Q}_{ij}\left(\frac{\partial U}{\partial\xi_2}\right)_{ij} + \vec{i}\,\bar{P}_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial\xi_2}\right)_{ij}, \qquad (2.I)$$

$i = 0, 1, \ldots, I$; $Ih = b$,

$j = -I+i, \ldots, 0, \ldots, I-i$,

$P_{0j} = \Phi_1(a+\vec{i}hj)$, $Q_{0j} = \Phi_2(a+\vec{i}hj)$, $\psi_{0j} = \Phi_3(a+\vec{i}hj)$:

$j = -I, \ldots, 0, \ldots, I$;

здесь $\bar{\psi}_{ij} = (\psi_{ij+1} + \psi_{ij-1})/2$.

Недостаток этого численного процесса – необходимость вычисления значений P, Q и ψ в точках области АВС для того, чтобы найти их в единственной точке $\zeta = a$, $\eta = b$. Предлагается более эффективный путь интегрирования.

Функции, описывающие граничные условия, представим в виде дискретного преобразования Лапласа:

$$R(\zeta) = \sum_{k=0}^{M} r_k e^{-\frac{2\pi k \zeta}{L}} + O(h^2),$$
$$\Phi_\ell(\zeta) = \sum_{k=0}^{M} f_{\ell k} e^{-\frac{2\pi k \zeta}{L}} + O(h^2), \ell = 1,2,3, \qquad (2.2)$$

где L – "длина релаксации" (для $\zeta \geq L$ $R(\zeta) = r_\infty + O(h^2)$ и $\Phi_\ell(\zeta) = \Phi_{\ell\infty} + O(h^2), \ell = 1,2,3$). При подобном выборе $R(\zeta)$ схема (2.I) для $a = mh$ $(m = 0,1,\dots,N;\ L = Nh)$ имеет вид

$$2P_{i+1j} = (P_{ij+1} + P_{ij-1}) - H_{ij}(Q_{ij+1} + Q_{ij-1}) - \vec{i}(Q_{ij+1} - Q_{ij-1}),$$
$$2Q_{i+1j} = G_{ij}(Q_{ij+1} + Q_{ij-1}) + \vec{i}(P_{ij+1} - P_{ij-1}), \qquad (2.3)$$
$$2\psi_{i+1j} = (\psi_{ij+1} + \psi_{ij-1}) + E_{ij}(Q_{ij+1} + Q_{ij-1}) + D_{ij}(P_{ij+1} + P_{ij-1}),$$

$$E_{ij} = h\left(1 - \frac{2\pi}{L}\sum_{k=1}^{M} r_k k e^{-\frac{2\pi k m}{N}} e^{-\vec{i}\frac{2\pi k j}{N}} \sin\frac{2\pi k i}{N}\right),$$
$$D_{ij} = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=1}^{M} r_k k e^{-\frac{2\pi k m}{N}} e^{-\vec{i}\frac{2\pi k j}{N}} \cos\frac{2\pi k i}{N}, \qquad (2.4)$$
$$H_{ij} = D_{ij}/V_{ij}, \quad G_{ij} = 1 - E_{ij}/V_{ij},$$
$$V_{ij} = hi + \sum_{k=0}^{M} r_k e^{-\frac{2\pi k m}{N}} e^{-\vec{i}\frac{2\pi k j}{N}} \cos\frac{2\pi k i}{N}.$$

Непосредственной подстановкой выражений

$$P_{i+1j} = \sum_{k=0}^{M} e^{-\frac{2\pi k m}{N}} e^{-\vec{i}\frac{2\pi k j}{N}} f_{1k}^{i+1},$$
$$Q_{i+1j} = \sum_{k=0}^{M} e^{-\frac{2\pi k m}{N}} e^{-\vec{i}\frac{2\pi k j}{N}} f_{2k}^{i+1}, \qquad (2.5)$$
$$\psi_{i+1j} = \sum_{k=0}^{M} e^{-\frac{2\pi k m}{N}} e^{-\vec{i}\frac{2\pi k j}{N}} f_{3k}^{i+1}$$

в (2.3) легко убедиться, что $f_{\ell k}^{i+1}, \ell = 1,2,3$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$f_{1k}^{i+1} = (f_{1k}^{i} - H_{ij} f_{2k}^{i})\cos\frac{2\pi k}{N} - f_{2k}^{i}\sin\frac{2\pi k}{N},$$
$$f_{2k}^{i+1} = G_{ij} f_{2k}^{i}\cos\frac{2\pi k}{N} + f_{1k}^{i}\sin\frac{2\pi k}{N}, \qquad (2.6)$$
$$f_{3k}^{i+1} = (f_{3k}^{i} + D_{ij} f_{1k}^{i} + E_{ij} f_{2k}^{i})\cos\frac{2\pi k}{N}, \quad i = 0,1,\dots,I-1,$$
$$f_{\ell k}^{0} = f_{\ell k}, \ \ell = 1,2,3.$$

Переход в физическую область осуществляется при $j = 0$ в (2.4) – (2.6). Применение рекуррентных соотношений (2.6) ($j = 0$), а затем суммирование в соответствии с (2.5) ($j = 0$) без дополнительных вычислений дает конечные значения P_{I0}, Q_{I0}, ψ_{I0} в (2.I). По сравнению с прямым использованием разностной схемы (2.I) объём вычислений сокращается в I раз для каждой точки (ζ, η) или в $\frac{1}{2}N(N+1)$ раз для всей задачи.

3. Дискретное преобразование Лапласа

Проблема нахождения коэффициентов разложения в дискретном преобразовании Лапласа может быть решена многими способами /5/. Учитывая возможность задания граничных условий (2.2) сеточными функциями, следует отдать предпочтение методу регуляризации Тихонова /6/. В настоящее время существует множество программ, реализующих алгоритм этого метода на ЭВМ. Использование нескольких первых коэффициентов ($M \leq 5$) позволяет получать разложения вида (2.2) с высокой степенью точности и в то же время сглаживает функцию – изображение, что особенно полезно, если эта функция сеточная.

4. Примеры расчетов

Примером работы программы HARKER модифицированного метода Харкера может служить задача построения эквипотенциальных кривых вне цилиндрического пучка $r_{kp} = 1$ с потенциалом на поверхности $\psi|_{r_{kp}} = th\, z$ и $\partial\psi/\partial r|_{r_{kp}} = 0$. Эта задача имеет аналитическое решение в виде бесконечного ряда и может считаться тестовой. Картина эквипотенциалей, построенная программой HARKER, представлена на рис.2.

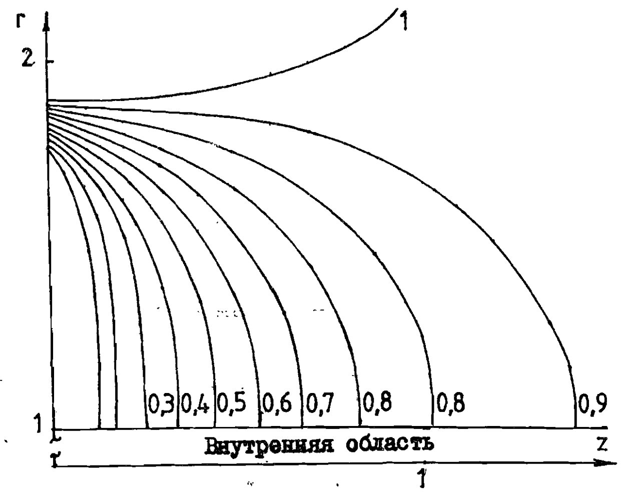
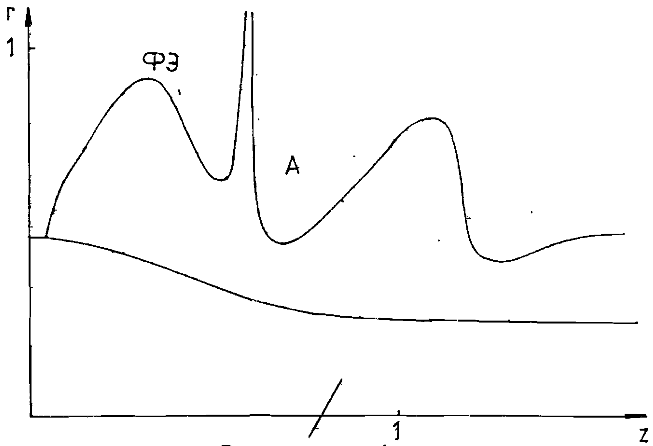


Рис.2

Практическое применение программа получила в задаче синтеза ламинарных потоков заряженных частиц. С её помощью синтезирована система электродов, формирующих сплошной бриллюэновский поток.

Геометрическая форма пучка и граничные условия на его поверхности получены численным решением "внутренней задачи" /7/. Формы фокусирующего электрода (ФЭ) и анода (А) представлены на рис.3 (φ_A : $z_A/z_{kp} = 2$ при $z \to \infty$).



Внутренняя область

Рис.3

Автор глубоко благодарен Ю.И.Алексахину за стимулирующие обсуждения.

Литература

I. Radley D.E. J.Electronics and Control., 1958, 4, p.125.
2. Harker K.J. J.Appl. Phys., 1960, 31, p.2165.
3. Harker K.J. J. Mathematical Phys., 1963, 4, p.993.
4. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. "Наука", М., 1966.
5. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z - преобразования. "Наука", М., 1971.
6. Тихонов А.Н. ДАН СССР, 1963, I, с.153.
7. Алексахин Ю.И. ОИЯИ, Р9-85-271, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 февраля 1986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р.50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Нефедьев В.О. Р9-86-83

Численное решение задачи Коши для осесимметричного уравнения Лапласа

Представлен новый вариант известного метода Харкера решения задачи Коши для уравнения Лапласа. В новом варианте используется дискретное преобразование Лапласа для численного интегрирования исходного уравнения. Это резко снижает количество необходимых вычислений, повышает точность результатов, позволяет использовать в качестве граничных условий сеточные функции. Алгоритм реализован в виде пакета программ HARKER на ЭВМ CDC-6500. С его помощью синтезирована система электродов, формирующая сплошной бриллюэновский поток.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Nefediev V.O. P9-86-83

Numerical Solution of Cauchy Problem for Laplace Axisymmetric Equation

The modification of well-known Harker's method for solving the Cauchy problem for Laplace equation is proposed. The new method uses discrete Laplace transformation for numerical integration of initial equation with split-hair accuracy and small machine time. The algorithm is realized as HARKER program package on the CDC-6500 computer. It is used to synthesize electrode system forming unbroken Brillouin flow.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986