объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р9-86-608

Ю.И.Алексахин

О ПРОХОЖДЕНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В ИНТЕНСИВНЫХ ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫХ КОЛЬЦАХ

Доклад на X Всесоюзном совещании по ускорителям заряженных частиц (Дубна, октябрь 1986 г.)

1986

Влияние собственных полей пучка заряженных частиц на параметрический резонанс бетатронных колебаний изучалось в работах /1,2/. Было показано, что оно приводит к сдвигу резонансных значений показателя спада ведущего магнитного поля /1/ и нелинейному ограничению амплитуды колебаний /2/. Полученные в /1,2/ результаты относятся к колебаниям огибающей пучка (квадрупольным колебаниям), и для когерентных дипольных колебаний они, очевидно, неприменимы. Кроме того, наличие даже небольшой зарядовой компенсации может радикально изменить условия благоприятного прохождения резонанса в ультрарелятивистском пучке.

Соответствующий анализ проведен ниже для аксиальных колебаний электронного кольца в мягкофокусирующем поле.

1. Введем полные моменты функции распределения электронов в четырёхмерном фазовом пространстве поперечных степеней свободы /3,4/:

$$\overline{z^k v_z^\ell} = \int z^k v_z^\ell f \, d\Omega \ , \quad \int f \, d\Omega = 1,$$

где $d\Omega = dx\,dz\,dv_r\,dv_z$ -элемент фазового объёма, $x = r - r_0$, $r_0 \equiv \overline{r}$ - большой радиус кольца. Интегрируя уравнение Власова с соответствующими весами, найдем

$$\dot{\overline{z}} = \overline{v_z} \ , \quad \dot{\overline{v_z}} = -n\omega_0^2 \overline{z} + \overline{F_z} \ , \tag{1}$$

$$\dot{\overline{z^2}} = 2\overline{z v_z} \ , \quad \dot{\overline{z v_z}} = \overline{v_z^2} - n\omega_0^2 \overline{z^2} + \overline{z F_z} \ , \quad \dot{\overline{v_z^2}} = -2n\omega_0^2 \overline{z v_z} + 2\overline{v_z F_z} \ , \tag{2}$$

где n -эффективный показатель спада внешнего магнитного поля (включающий, при наличии проводящих стенок, градиент поля изображений /5/), $\omega_0 = v_\theta / r_0$ -частота обращения, F_z -отнесённая к поперечной массе сила, обусловленная собственными (неэкранированными) полями электронов и ионов кольца. Точка в (1,2) означает полную производную по времени: $\dot{\overline{z}} = \partial \overline{z}/\partial t + \omega_0 \partial \overline{z}/\partial \theta$, где θ -азимут.

Определим среднеквадратичные размеры сечения кольца как $a = 2\sqrt{\overline{z^2}}$, $b = 2\sqrt{\overline{x^2}}$, считая когерентные колебания отсутствующими. Вводя эмиттанс $\mathcal{E}_z = 4(\overline{z^2}\,\overline{v_z^2} - \overline{z v_z}^2)^{1/2}$, из (2) получим

$$\ddot{a} + n\omega_0^2 a - \frac{\mathcal{E}_z^2}{a^3} = \frac{4}{a} \overline{z F_z} \ , \tag{3а}$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_z^2 = 8a^2 \left(\overline{v_z F_z} - \frac{\dot{a}}{a} \overline{z F_z} \right) . \tag{3б}$$

Предположим, следуя [3], постоянство функционального вида плотности электронов:

$$\rho_e = \frac{q_e}{\pi a b} R\left(\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}\right), \qquad (4)$$

где R –некоторая функция, q_e –линейная плотность заряда. Анализ показывает, что это предположение совместимо с уравнением непрерывности, если гидродинамические скорости $w_{x,z}$ имеют вид

$$w_z = z\frac{\dot a}{a} + \frac{x}{b^2} P\left(\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}\right), \quad w_x = x\frac{\dot b}{b} - \frac{z}{a^2} P\left(\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}\right),$$

где P - произвольная функция. В силу антисимметричности членов с P имеем $\overline{v_z F_z} = \overline{w_z F_z} = \overline{z F_z}\, \dot a / a$, так что предположение (4) автоматически приводит к постоянству эмиттанса и оно допустимо, строго говоря, только в случае линейных полей. Однако игнорируемые члены квадратичны по нелинейности и проявятся лишь через большое время. Поэтому будем считать функциональный вид плотности постоянным и, более того, задавать конкретный вид функции R при вычислении вириала $\overline{zF_z}$, что позволит обойтись без неоднозначной операции[4] приближения F_z конечным степенным рядом.

Представим вириал, как функцию a^2, в виде

$$4\overline{zF_z}/\omega_0^2 = \varkappa_1 a^2 + \varkappa_2 a_0^4/a^2 + \Phi(a^2)/a^2, \qquad (5)$$

где a_0 –стационарное решение уравнения (3а) для невозмущенного n (согласованный размер), константы $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ выбираются так, чтобы $\Phi(a_0^2) = \Phi'(a_0^2) = 0$. Вводя теперь эффективную частоту $\omega_z = \omega_0\sqrt{n - \varkappa_1}$ и эмиттанс $\tilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_z^2 + \varkappa_2 \omega_0^2 a_0^4)^{1/2}$, получим уравнение

$$\ddot a + \omega_z^2 a - \frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{a^3} = \frac{\Phi(a^2)}{a^3}, \qquad (6)$$

правая часть которого квадратична по величине рассогласования:

$$\Phi = \eta\,(a^2 - a_0^2)^2/2 + \ldots$$

2. Собственные поля электронов не дают, очевидно, вклада в среднюю силу F_z, действующую на электроны в данном сечении (логарифмическими поправками, связанными с кривизной кольца, пренебрегаем). Вклад в вириал не зависит, как показано в [3], от конкретного вида функции R в (4) и равен [3]

$$\overline{zF_z}^{(e)} = c^2 \frac{\nu}{\gamma^3} \frac{a}{a+b}, \qquad (7)$$

где $\nu = e q_e / mc^2$ –параметр Будкера, $\gamma \simeq (1-\beta^2)^{-1/2}$ –релятивистский фактор электронов, $\beta = v_\theta / c$.

При вычислении электрического поля накопленных в кольце ионов воспользуемся "эргодической" функцией распределения [6], соответствующей их равномерному распределению по поверхностям постоянной энергии. Пространственная плотность ионов, образовавшихся в равноплотном электронном пучке с круговым сечением радиуса a_i, при этом равна

$$\rho_i = \frac{2q_i}{\pi a_i^2} \ln\frac{a_i}{r} \cdot \theta(a_i - r), \qquad (8)$$

где q_i –линейная плотность заряда ионов, $r = (x^2 + z^2)^{1/2}$, $\theta(x) = (1 + \mathrm{sgn}\, x)/2$ –функция Хэвисайда. Будем полагать далее, что плотность ионов сохраняет вид (8), а плотность электронов постоянна по сечению: $R(x) = \theta(1-x)$. Средняя сила, действующая со стороны ионов на смещенный на величину $\bar z \ll a_i = a_0$ пучок с $a = b = a_0$, приближенно равна

$$\overline{F_z} = -c^2 \frac{2\nu f}{\gamma a_0^2} \bar z \left(1 - \frac{\bar z^2}{4a_0^2}\right), \qquad (9)$$

где введен фактор зарядовой нейтрализации $f = -q_i/q_e$. Вклад в вириал для $a \simeq a_i \simeq b = a_0$ с точностью до квадратичных по рассогласованию членов имеет вид

$$\overline{zF_z}^{(i)} = -c^2 \frac{3\nu f}{4\gamma}\left[1 + \frac{3a^2 - 2a_i^2 - a_0^2}{6a_0^2} - \frac{(a^2 - a_0^2)(7a^2 - 4a_i^2 - 3a_0^2)}{24 a_0^4}\right]. \qquad (10)$$

Входящие в (5) коэффициенты $\varkappa_{1,2}$ и $\eta = \Phi''(a_0^2)$ весьма слабо зависят от конкретной формы плотностей и закона изменения a_i. Так, в случаях $a_i \equiv a_0$ (неподвижный ионный фон) и $a_i = a$ коэффициент $\varkappa_1^{(i)}$ отличается на ±12% от среднего значения, а коэффициент $\eta^{(i)}$ одинаков. Пренебрегая изменением радиального размера электронного сечения ($b \equiv a_0$), из (5), (7) и (10) имеем окончательно

$$\omega_z^2 = \omega_0^2\left[n + \frac{2\nu}{\beta^2\gamma}\left(\frac{r_0}{a_0}\right)^2\left(f - \frac{5}{8\gamma^2}\right)\right], \quad \eta = \frac{2\nu}{\beta^2\gamma}\left(\frac{r_0}{a_0}\right)^2\left(\frac{15}{8}f - \frac{1}{\gamma^2}\right). \qquad (11)$$

При ультрарелятивистском движении электронов даже незначительной зарядовой нейтрализации ($f \gtrsim 1/2\gamma^2$) достаточно, чтобы изменить знак кулоновского сдвига частоты и коэффициента нелинейности η, что меняет направление благоприятного пересечения резонанса на противоположное.

3. Колебания размера в отсутствие искажений показателя спада ($n=n_0=const$) и нелинейности ($\eta=0$) даются формулой [1]:

$$a^2/a_0^2=\sqrt{1+A^2}+A\cos(2\omega_{z0}t+\phi), \tag{12}$$

где A и ϕ – произвольные периодические функции $\theta-\omega_0 t$ (ϕ – с точностью до целого кратного этого аргумента). Если следить за выделенным сечением ($\theta=\omega_0 t+\theta_0$), то при $A^2\ll 1$ его размер пульсирует с частотой $2\omega_{z0}$, а при $A^2\gg 1$, когда эмиттансом в (6) можно пренебречь, равен абсолютной величине смещения отдельной частицы (осциллирующей с частотой ω_{z0}).

С квазистационарным пространственно-модулированным магнитным полем ($n=n_0+n_1\cos\theta$) наиболее эффективно взаимодействует медленная волна с одной пространственной вариацией: $\phi=\theta-\omega_0 t+\phi_0$. Производя в (6) усреднение по азимуту, будем считать A и ϕ_0 медленными функциями времени и пренебрежём их вторыми производными. Для канонически-сопряженных переменных[x] $I=\sqrt{1+A^2}-1$ (относительного увеличения средней энергии электронов) и $\psi=(2\omega_{z0}-\omega_0)t+\phi_0$ укороченные уравнения имеют вид

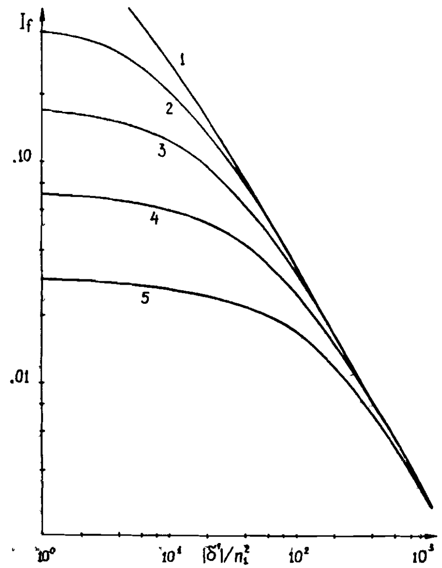
$$\frac{dI}{d\tau}=n_1\sqrt{I(2+I)}\sin\psi, \tag{13а}$$

$$\frac{d\psi}{d\tau}=\delta+n_1\frac{1+I}{\sqrt{I(2+I)}}\cos\psi-\eta\frac{I}{2+I}, \tag{13б}$$

где $\delta=(4\omega_{z0}^2-\omega_0^2)/2\omega_0^2$ (предполагается $\delta\ll 1$), $\tau=\omega_0 t$. При малых амплитудах ($I\ll 1$) уравнения (13) совпадают, с точностью до обозначений, с укороченными уравнениями для одночастичного целого резонанса [7], а при $I\gg 1$ –для параметрического [7]. В согласии с отмечавшимися свойствами решения (12) первый случай отвечает целому резонансу колебаний размера ($2\omega_{z0}=\omega_0$), второй–параметрическому резонансу колебаний отдельных частиц ($\omega_{z0}=\omega_0/2$). Отметим, что вследствие ограниченности вириала при $a\to\infty$ во втором случае поправки, связанные с собственными полями, исчезают [2] (в уравнении

x Выбор канонической переменной, сопряжённой фазе ψ, допускает известный произвол, в частности к I можно добавить любую константу. Конкретное значение постоянной выбрано из соображений удобства представления фазовых траекторий системы (13) на плоскости с полярными координатами $\sqrt{2I}$, ψ : в этом случае отсутствует нефизическая область [2], в которой гамильтониан неопределен, и площадь, охватываемая фазовой траекторией, является адиабатическим инвариантом.

(13б) компенсация не совсем полная из-за использования в (6) приближенных выражений для Φ).



На рисунке показана зависимость конечного значения I_f при благоприятном прохождении резонанса ($\mathrm{sgn}\,\delta'=-\mathrm{sgn}\,\eta$) от скорости $\delta'=d\delta/d\tau=2dn_0/d\tau$, рассчитанная по приближенным ($I\ll 1$) уравнениям для значений $|\eta/n_1|=2^{2k+1}$, k –номер кривой. При адиабатически-медленном прохождении $I_f\approx 3(2n_1/\eta)^{2/3}$, при быстром [7] $I_f\approx\pi n_1^2/|\delta'|$.

В челночном электронно-кольцевом ускорителе [8] допустимо увеличение средней энергии при однократном прохождении резонанса $I_f\lesssim 5\cdot 10^{-3}$. Поскольку манипулирование кольцом производится с помощью импульсных малоиндуктивных систем, достижимы скорости $|\delta'|\approx 10^{-3}$. Соответствующий допуск на амплитуду модуляции показателя спада $n_1\lesssim 10^{-3}$.

4. Дипольные колебания электронного кольца совершаются с частотой $\approx\omega_0/2$, что позволяет считать ионы неподвижными. Для исследования системы уравнений (1), (9) воспользуемся методом связанных волн [9], вводя переменные

$$u=(\Omega_z\bar{z}+i\bar{v}_z)/\sqrt{2},\qquad u^*=(\Omega_z\bar{z}-i\bar{v}_z)/\sqrt{2},$$

где $\Omega_z^2=\omega_0^2[n_0+2\nu f r_0^2/\beta^2\gamma a_0^2]$. Из (1), (9) следует уравнение

$$\dot{u}=-i\Omega_z u-\frac{i\omega_0^2 n_1}{2\Omega_z}\cos\theta\,(u+u^*)+\frac{i\omega_0^2\mu}{4\Omega_z^3}(u+u^*)^3, \tag{14}$$

где $\mu=\nu f r_0^2/2\gamma a_0^4$. Коэффициенты ряда Фурье

$$u=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\exp(il\theta)\,u_l(t)$$

при $n_1=\mu=0$ являются гармоническими функциями $u_l\sim\exp[-i(l\omega_0+\Omega_z)t]$. Пространственная модуляция ($n_1\neq 0$) связывает u_l с $u_{l\pm1}$ и $u^*_{-(l\pm1)}$, причем существенна связь между волнами, представляющие векторы которых на комплексной плоскости вращаются в одном направлении с близкими частотами. Таковыми при $\Omega_z \approx \omega_0/2$ являются u_ℓ, $u^*_{(\ell+1)}$, то есть быстрая волна с ℓ азимутальными вариациями и медленная волна с $\ell+1$ вариацией. Резонанс когерентных колебаний можно трактовать, следовательно, как неустойчивость вследствие связи волн с положительной и отрицательной энергией ($\ell\omega_0+\Omega_z \approx (\ell+1)\omega_0-\Omega_z$). Амплитуды каждой такой пары волн растут с одинаковым в нашем приближении для всех пар инкрементом и пропорциональны своим начальным, обусловленным флуктуациями, значениям. Максимальную начальную амплитуду имеет, по-видимому, медленная волна с $\ell=1$, наименее эффективно подавляемая разбросами по частотам обращения и некогерентным амплитудам. Нелинейность ($\mu \neq 0$) связывает пары, в результате чего первоначально выделенная пара, выйдя на нелинейную стадию, выводит из резонанса и все остальные волны, оставляя их амплитуды на низком уровне. Учитывая, соответственно, только волны u_0, u_{-1} из (I4) и комплексно-сопряженного уравнения, получим систему

$$\frac{du_0}{dt} = -i\Omega_z u_0 - \frac{i\omega_0^2 n_1}{4\Omega_z} u^*_{-1} + \frac{3i\omega_0^2\mu}{4\Omega_z^3} u_0 \left(|u_0|^2 + 2|u_{-1}|^2\right), \quad (I5)$$

$$\frac{du^*_{-1}}{dt} = -i(\omega_0-\Omega_z)u^*_{-1} + \frac{i\omega_0^2 n_1}{4\Omega_z} u_0 - \frac{3i\omega_0^2\mu}{4\Omega_z^3} u^*_{-1}\left(2|u_0|^2 + |u_{-1}|^2\right),$$

имеющую интеграл $|u_{-1}|^2 - |u_0|^2 = 2P_0$. Считая $P_0>0$ и вводя канонически-сопряженные переменные I, $\psi=\psi_0+\psi_1$, связанные с u_0, u_{-1} соотношениями $u_0=\sqrt{P_0 I}\exp(-i\psi_0)$, $u_{-1}=\sqrt{P_0(2+I)}\exp(-i\psi_1)$, из (I5) получим уравнения, совпадающие с уравнениями (I3) при $\delta=2\Omega_z/\omega_0-1$, за исключением нелинейного члена, который следует заменить на $-36\mu P_0(1+I)/\omega_0^2 = -9\mu a_0^2\xi$, где ξ есть отношение средней энергии, связанной с дипольными колебаниями, к энергии некогерентного движения. Таким образом, при быстром изменении показателя спада, обеспечивающем малость квадрупольных колебаний, энергия дипольных остается на уровне шумов. В присутствии ионов медленное пересечение дипольного резонанса с уменьшением частоты приводит к относительному приращению средней поперечной энергии электронов на величину $\xi \approx n_1/9\mu a_0^2$, также существенно меньшую, чем приращение из-за квадрупольного резонанса. Однако в отсутствие ионов ($\mu=0$) медленное пересечение дипольного резонанса в любом направлении сопровождается фактически неограниченным ростом амплитуды колебаний.

Пересечение резонансов может быть зафиксировано по ВЧ-активности кольца: дипольного – на частоте, равной половине частоты обращения ($\omega_0/2$), квадрупольного – на существенно более низкой частоте ($\omega_0-2\omega_z$).

Автор благодарен Г.В.Долбилову, Н.Ю.Казаринову и Э.А.Перельштейну за обсуждение затронутых в работе вопросов.

Литература

I. Smith L. В сб.: Труды Междунар.конф.по ускор. М.,Атомиздат, I964, с.897.
2. Kazarinov N.Yu., Perelstein E.A. et al. Particle Accelerat., 1977, 8, 1, p.43.
3. Sacherer F.J. IEEE Trans., NS-18, 1971, N 3, p.1105.
4. Kazarinov N.Yu., Perelstein E.A., Shevtsov V.F. Particle Acc., 1980, 10, 3-4, p.181.
5. Алексахин Ю.И., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-I2335, Дубна, I979.
6. Дроздовский А.А. В кн.: Вопросы атомной науки и техники, вып. I(3), Харьков, ХФТИ, I978, с.I07.
7. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. М., ФМ, I962, с.I33.
8. Alexahin Yu.I., Sarantsev V.P. Particle Accelerat., 1985, 16, 3, p.171.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М., Наука, I984.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 сентября I986 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды Ш Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р.50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды ХII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Алексахин Ю.И. Р9-86-608

О прохождении параметрического резонанса в интенсивных электронно-ионных кольцах

Рассмотрен параметрический резонанс колебаний размера (квадрупольных колебаний) и когерентных дипольных колебаний в интенсивных электронно-ионных кольцах. Показано, что в присутствии ионов возможно медленное пересечение с уменьшением частоты как квадрупольного, так и дипольного резонансов. В чисто электронном кольце собственный заряд позволяет медленно проходить с увеличением частоты квадрупольный резонанс, однако медленное пересечение дипольного резонанса в любом направлении сопровождается неограниченным ростом амплитуды когерентных колебаний. При быстром изменении частоты увеличение энергии колебаний вследствие дипольного резонанса пренебрежимо мало по сравнению с действием квадрупольного. Указывается возможность индикации прохождения резонансов по ВЧ-полям кольца.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Alexahin Yu.I. P9-86-608

On the Crossing of Parametric Resonance in Intence Electron-Ion Rings

The parametric resonance of the oscillations of the intense electron-ion ring axial dimension (quadrupole oscillations) as well as of the ring coherent dipole oscillations is considered. The ions are shown to make possible slow transversing of both quadrupole and dipole resonances with the oscillation frequency decreasing. In a purely electron ring its space charge allows slow crossing of the quadrupole resonance with the increasing frequency, but slow crossing in any direction of the dipole resonance leads to practically unlimited growth of the coherent oscillation amplitude. If the frequency changes rapidly then the gain in oscillation energy due to dipole resonance is negligible compared to that due to quadrupole resonance. It is noted that crossing of the resonances can be indicated by the ring of rf activity.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986