

**сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна**

**P9-85-892**

**В.Н.Мамонов, С.Б.Рубин**

**О РАСЧЕТЕ ПОЛЯ, ВОЗБУЖДАЕМОГО  
ДВИЖУЩИМСЯ ЭЛЕКТРОННЫМ СГУСТКОМ  
В КАНАЛЕ  
ЛИНЕЙНОГО ИНДУКЦИОННОГО УСКОРИТЕЛЯ**

**1985**

Известно, что движущийся в пространственно-неоднородной структуре /в рассматриваемом случае такой структурой является канал линейного индукционного ускорителя/ компактный сгусток заряженных частиц с достаточно большим полным зарядом или большим внутренним током наводит на элементах структуры переменные заряды и токи. Эти заряды и токи порождают электромагнитное поле, часто называемое "вторичным". Пространственно-временное распределение и величина поля представляют интерес при изучении поведения ускоряемого сгустка. Ниже мы ограничиваемся определением "вторичного" поля, возбуждаемого при движении сгустка, в виде тонкого заряженного кольца. Эта задача имеет некоторую специфику.

1/ В отличие от обычных линейных ускорителей, основу структуры которых составляет диафрагмированный волновод или система резонаторов, "холодная" структура индукционного ускорителя, если рассматривать ее с точки зрения возбуждения движущимся сгустком, представляется нам как состоящая из системы пролетных труб, соединяющих между собой ряд узких полостей типа радиальных линий /см.рис.1/. Расстояние между полостями  $D \gg d$  - ширины полости.

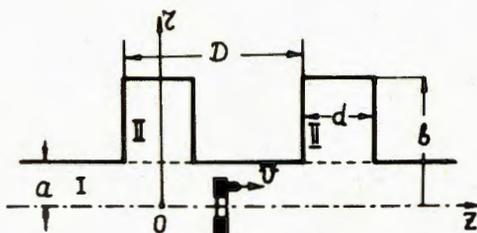


Рис. 1.

Радиус канала  $a \sim D$ , внешний радиус  $b$  в несколько раз больше  $a$ . Радиальные линии могут быть незамкнутыми при  $r = b$ .

2/ Будем рассматривать движение сгустка в канале со сравнительно небольшой /постоянной/ скоростью  $v = c\beta$ ,  $\beta \sim 0,1 \div 0,2$ , и интересоваться не только потерями его энергии на возбуждение поля излучения, но и распределением квазистатического поля ближней зоны сгустка. Учитывая, что число полостей велико, можем рассматривать структуру как периодическую.

## I

Используя метод "сшивания", разбиваем внутреннюю область системы на систему резонаторных областей\* /которую обозначим

\* Относительно замкнутости системы полостей при  $r = b$  см. далее.

$G_{II}$  / и канал системы ( $G_I$ ). Полное поле в канале представим как решение однородной и неоднородной задач для уравнений Максвелла  $(\vec{E}; \vec{H})^I_{\text{полн}} = (\vec{E}; \vec{H})^I_{\text{одн}} + (\vec{E}^0; \vec{H}^0)$ . Решением неоднородной системы является поле кольца радиуса  $R_0$ , движущегося по оси  $Oz$  со скоростью  $v = c\beta = \text{const}$ . При временном разложении Фурье  $/k = \omega/c$ , множитель  $e^{-i\omega t}$  - опущен/:

$$E_{z\omega}^0 = \frac{-iQk\Gamma^2}{4\pi^2 c \epsilon_0} K_0(k\Gamma r) I_0(k\Gamma R_0) e^{ikz/\beta}, \quad r > R_0, \Gamma = 1/(\gamma\beta),$$

$$E_{r\omega}^0 = \frac{Qk\Gamma}{4\pi^2 c \beta \epsilon_0} K_1(k\Gamma r) I_0(k\Gamma R_0) e^{ikz/\beta}, \quad H_{\phi\omega}^0 = \epsilon\beta c E_{r\omega}^0,$$

$Q = Ne$  - полный заряд кольца. Решением однородной задачи для области  $G_I$  будет система пространственных гармоник ( $0 \leq r \leq a$ ):

$$\left. \begin{aligned} (E_r^I)_{\text{одн}} &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n h_n}{\sigma_n} \frac{J'(\sigma_n r)}{J_0(\sigma_n a)} e^{ih_n z}, \quad h_n = h(k) + \frac{2\pi n}{D} \\ (E_z^I)_{\text{одн}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{J_0(\sigma_n r)}{J_0(\sigma_n a)} e^{ih_n z}, \quad \sigma_n = \sqrt{k^2 - h_n^2} \\ (H_{\phi}^I)_{\text{одн}} &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{k A_n}{\sigma_n} \frac{J_0'(\sigma_n r)}{J_0(\sigma_n a)} e^{ih_n z} \end{aligned} \right\} /1/$$

с подлежащими определению коэффициентами.

Учтем, что при  $v = \text{const}$  полное поле в системе является стационарным в следующем смысле  $/m$  - целое/:

$$\{\vec{E}; \vec{H}(r, z + mD, t + \frac{mD}{v})\} = \{\vec{E}; \vec{H}(r, z, t)\}.$$

При переходе к Фурье-представлению по  $t$  получим отсюда следующую форму для Фурье-компонент:

$$\{\vec{E}_{\omega}; \vec{H}_{\omega}(r, z)\} = e^{ikz/\beta} \{\vec{E}_{\omega}; \vec{H}_{\omega}(r, z)\},$$

где  $\vec{E}_{\omega}, \vec{H}_{\omega}$  - периодические функции от  $z$  с периодом  $D$ . Таким образом в /2/ следует считать  $h(k) = k/\beta$ .

В зоне  $G_{II}$   $/a \leq r \leq b$ , на периоде  $qD - \frac{D}{2} \leq z \leq qD + \frac{D}{2}$ ;  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  /имеем только однородное поле

$$E_r^{II} = \sum_{n'=1}^{\infty} i^{n'} \sin[\eta_{n'}(z - qD + d/2)] \left\{ \frac{-\eta_{n'} B_n^{(q)}}{2\kappa_{n'}} \frac{Z'(\kappa_{n'}, r)}{Z(\kappa_{n'}, a)} \right\},$$

$$E_z^{II} = \sum_{n'=0}^{\infty} i^{n'} \frac{(2 - \delta_{0n'})}{4} B_{n'}^{(q)} \cdot \cos[\eta_{n'}(z - qD + d/2)] \frac{Z(\kappa_{n'}, r)}{Z(\kappa_{n'}, a)} \cdot /3/$$

$$H_{\phi}^{II} = i \sum_{n'=0}^{\infty} i^{n'} \frac{(2 - \delta_{0n'}) k B_{n'}^{(q)}}{4\kappa_{n'}} \cdot \cos[\eta_{n'}(z - qD + d/2)] \frac{Z'(\kappa_{n'}, r)}{Z(\kappa_{n'}, a)} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}},$$

где  $\eta_{n'} = \pi n' / d$ ,  $\kappa_{n'} = \sqrt{k^2 - \eta_{n'}^2}$ ,

$$Z(\kappa_{n'}, r) = J_0(\kappa_{n'}, r) N_0(\kappa_{n'}, b) - N_0(\kappa_{n'}, r) J_0(\kappa_{n'}, b). \quad /4/$$

Штрих у  $Z(\kappa_{n'}, r)$  - дифференцирование по аргументу;  $B_n^{(q)}$  надо определить. На границе областей  $G_I, G_{II}$ , т.е. при  $r = a$  поля должны быть "сшиты".

Заметим следующее: в реальной системе структура такова, что при  $r = b$  она может быть замкнута неидеально проводящими или даже плохо проводящими элементами. Учет этого обстоятельства примененным здесь методом возможен, но приводит к значительно более громоздким вычислениям. Поэтому мы принимаем идеальную проводимость стенок и при  $r = b$ . Если надо в какой-то мере исключить влияние стенок при  $r = b$ , то можно считать, что  $b$  достаточно велико, так что двойное время распространения волны  $T_1 = 2b/c > T = D/v$ .

Используем метод сшивания с учетом особенностей полей на острых краях внутренней поверхности структуры, данный в /1/ для однородной задачи/. На границе области  $G_I$  полагаем /на периоде  $q$ /:

$$(E_z^I)_{\text{полн}} \Big|_{r=a-0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ih_n z} + E_z^0 \Big|_{r=a-0} = \left[1 - \frac{z - qD}{d/2}\right]^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{ih_n z} \equiv \mathcal{F}(z), \quad /5/$$

причем считаем, что  $\mathcal{F}(z)$  внутри этого периода отлична от нуля только в пределах  $qD - d/2 \leq z \leq qD + d/2$ . Таким образом  $f_n$  - новые неизвестные коэффициенты.

Умножая /5/ на  $e^{-ih_m(z - qD)}$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и интегрируя в пределах  $qD - D/2 \leq z \leq qD + D/2$ , найдем связь:

$$A_m = \frac{\pi d}{2D} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \alpha_s^m f_s - \epsilon_m, \quad /6/$$

$$\alpha_m^s = J_0\left(\frac{\pi d}{D} \cdot (s-m)\right), \quad \epsilon_m = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq 0, \\ \frac{-iQk}{4c\pi^2 \gamma^2 \beta^2 \epsilon_0} K_0(k\Gamma a) I_0(k\Gamma k_0), & \text{при } m=0. \end{cases} \quad /7/$$

Из /6/, /7/ номер периода  $q$  выпадает, т.е. выражения справедливы для любого периода.

Связь системы коэффициентов  $\{B_n\}$  и  $\{f_n\}$  получим, если рассмотрим предельный переход  $\Gamma \rightarrow a$ ,  $\Gamma > a$  в /3/. Тогда на периоде  $q$  имеем

$$\sum_{n'=0}^{\infty} i^{n'} \frac{2-\delta_{0n'}}{4} B_{n'}^{(q)} \cdot \cos[\eta_{n'}(z-qD+d/2)] = \mathcal{F}(z). \quad /8/$$

Умножая /8/ на  $\cos\left[\frac{m\pi(z-qD)}{d} + \frac{m\pi}{2}\right]$  и интегрируя в пределах  $qD-d/2 \leq z \leq qD+d/2$ , в которых отличны от нуля правая и левая части в /8/, получим

$$B_m^{(q)} = e^{ihqD} \cdot B_m^{(0)}; \quad B_m^{(0)} = \pi \sum_{s=-\infty}^{\infty} \beta_m^s f_s, \quad /9/$$

где

$$\beta_m^s = J_0(\zeta_{sm}^+) + (-1)^m J_0(\zeta_{sm}^-), \quad \zeta_{sm}^{\pm} = \frac{d}{2} h_s \pm \pi m/2. \quad /10/$$

Система уравнений для определения неизвестных  $\{f_n\}$  получается из условия непрерывности магнитного поля  $H_\phi$  на границе областей, т.е. при  $\Gamma = a$ . Таким образом, сшивая на периоде  $q$  с учетом /1/, /2/, /3/, получим

$$i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{k A_n}{\sigma_n} \cdot \frac{J_0'(\sigma_n r)}{J_0(\sigma_n a)} \Big|_{r=a-0} \cdot e^{i(k/\beta + \frac{2\pi n}{D})z} + H_\phi^0 \Big|_{r=a-0} =$$

$$= i \sum_{n'=0}^{\infty} i^{n'} \cdot k \frac{2-\delta_{0n'}}{4\kappa_{n'}} B_{n'}^{(q)} \cdot \frac{Z'(\kappa_{n'}, r)}{Z(\kappa_{n'}, a)} \Big|_{r=a+0} \cdot \cos\left[\frac{n'\pi}{d} \cdot (z-qD+\frac{d}{2})\right] \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}. \quad /11/$$

Выражение /11/ справедливо на отрезке  $qD - \frac{d}{2} \leq z \leq qD + \frac{d}{2}$ . Заменяем в /11/ системы неизвестных коэффициентов  $\{A_n\}$ ,  $\{B_n\}$  с помощью /6/, /9/ через систему  $\{f_n\}$ , умножим полученное равенство

на  $\cos\left[\frac{\pi m}{d} (z-qD+\frac{d}{2})\right]$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и интегрируем обе части равенства в пределах  $qD - \frac{d}{2} \leq z \leq qD + \frac{d}{2}$ . Учтем из /9/ равенство  $B_m^{(q)} = e^{ihqD} \cdot B_m^{(0)}$ , ( $h = k/\beta$ ), тогда получим систему неоднородных уравнений относительно неизвестных  $\{f_t\}$

$$i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\pi k d}{2D} \left\{ \sum_{t=-\infty}^{\infty} \alpha_n^t f_t \frac{J_0'(\sigma_n a)}{J_0(\sigma_n a) \sigma_n} \cdot \frac{2h_n i^m}{h_n^2 - \eta_m^2} \sin\left(\frac{h_n d}{2} + \frac{\pi m}{2}\right) \right\} e^{ihqD} +$$

$$+ \frac{Q}{2\pi^2 a} \frac{I_0(k\Gamma R_0)}{I_0(k\Gamma a)} \frac{h_0 i^m}{h_0^2 - \eta_m^2} \sin\left(\frac{h_0 d}{2} + \frac{\pi m}{2}\right) e^{ihqD} =$$

$$= i \cdot i^m e^{ihqD} \cdot \frac{d \cdot \pi \cdot k}{4} \left\{ \sum_{t=-\infty}^{\infty} \beta_m^t f_t \right\} \frac{Z'(\kappa_m a)}{Z(\kappa_m a) \kappa_m} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}, \quad /12/$$

где  $h = h_0 = k/\beta$ . Множитель  $e^{ihqD}$  в /12/ сокращается, и оказывается, что равенство вообще не зависит от номера  $q$  периода. Перегруппировав суммирование по  $n$  и  $t$  в двойной сумме левой части и сгруппировав члены, получим единую /не зависящую от номера периода/ систему уравнений для определения  $\{f_t\}$ :

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} f_t c_{mt} = R_m, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad /13/$$

где

$$c_{mt} = \frac{\pi k d}{D} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_{nm} \alpha_n^t h_n \frac{J_0'(\sigma_n a)}{J_0(\sigma_n a) \sigma_n} - \frac{\pi k d}{4} \beta_m^t \frac{Z'(\kappa_m a)}{Z(\kappa_m a) \kappa_m} \left. \right\} \cdot /14/$$

$$\varphi_{nm} = \sin\left(\frac{h_n d}{2} + \frac{\pi m}{2}\right) / (h_n^2 - \eta_m^2),$$

$$R_m = \frac{iQk}{2\pi^2 a \beta} \frac{I_0(k\Gamma R_0)}{I_0(k\Gamma a)} \cdot \varphi_{0m} \quad /15/$$

При отсутствии сгустка  $R_m = 0$  система /13/, /14/ соответствует полученной в /1/ для изучения дисперсионных свойств системы. Приравняв нулю детерминант матрицы  $\|c_{mt}\|$ , получаем дисперсионное уравнение для структуры. При  $R_m \neq 0$  находим при заданном значении  $k = \omega/c$  неизвестные  $f_t = f_t(k)$ , затем с учетом /6/, /9/ - коэффициенты  $A_n = A_n(k)$ ,  $B_n = B_n(k)$  и, наконец, по формулам /2/ - частотные компоненты поля. Для получения распределения поля по времени необходимо сделать обратное преобразование Фурье.

Таким образом, имеем

$$\{\bar{E}; \bar{H}(\bar{r}, t)\} = 2\text{Re} \left\{ \int_0^{\infty} \{\bar{E}_\omega; \bar{H}_\omega(\bar{r})\} e^{ickt} dk \right\}. \quad /16/$$

Численная процедура требует вычисления  $\bar{E}(k; \bar{r}), \bar{H}(k; \bar{r})$  с определенным шагом и использования квадратурных формул. Вычисления значительно осложняются ввиду наличия особых точек /полюсов/ у функций  $\bar{E}(k; \bar{r}), \bar{H}(k; \bar{r})$ , лежащих на контуре интегрирования. Особые точки соответствуют нулям детерминанта матрицы  $\|s_{mn}\|$ , т.е. дисперсионного уравнения структуры. Для вычисления поля создана программа ALFGOL.

## II

Приведенные аналитические формулы являются точными и пригодны как для высокочастотной, так и для низкочастотной областей спектра. Если  $\beta$  мало, то частотная область, существенная для расчетов, ограничивается интервалом порядка  $/0, k_{\max}/$ , где  $k_{\max} \cdot D \leq$

$\leq 2\pi\beta \leq 1$ . Тогда все значения  $\kappa_n = \sqrt{k^2 - (\frac{\pi n}{d})^2}$  при  $n > 0$  оказываются чисто мнимыми.

Поэтому входящее, например, в  $E_z^{II}$  отношение комбинаций цилиндрических функций приведет к виду ( $\bar{\kappa}_n \equiv |\kappa_n|$ )

$$\frac{Z(\kappa_n r) K_0(\bar{\kappa}_n r) I_0(\bar{\kappa}_n b) - I_0(\bar{\kappa}_n r) K_0(\bar{\kappa}_n b)}{Z(\kappa_n a) K_0(\bar{\kappa}_n a) I_0(\bar{\kappa}_n b) - I_0(\bar{\kappa}_n a) K_0(\bar{\kappa}_n b)}$$

/Видно, что при узком зазоре  $d/a < 1$ , даже при  $n = 1$ , можно пользоваться асимптотикой цилиндрических функций/. Теперь для оценки фурье-компоненты  $E_z^{II}$  важно определить порядок коэффициентов  $B_n$ . Заметим следующее: если взять член с  $n' = 0$  в  $E_z^{II}$  и тождественно преобразовать его, вводя вместо  $J_0, N_0$  функции  $H_0^{(1)}, H_0^{(2)}$ , то будет

$$\frac{1}{4} B_0 \frac{Z(kr)}{Z(ka)} = \frac{1}{4} B_0 \frac{H_0^{(1)}(kr) H_0^{(2)}(kb) - H_0^{(2)}(kr) H_0^{(1)}(kb)}{H_0^{(1)}(ka) H_0^{(2)}(kb) - H_0^{(2)}(ka) H_0^{(1)}(kb)}. \quad /17/$$

В правой части в /17/ получилось стандартное выражение  $E_z$ -составляющей поля основной волны в радиальной линии, коротко замкнутой на внешнем радиусе  $r=b$  и азимутально-симметрично возбужденной на частоте  $\omega = kc$  приложенным на внутреннем радиусе  $r=a$  напряжением  $V = \frac{d}{4} B_0$ .

Следующие члены сумм в /3/ с  $n \neq 0$  имели бы тот же смысл и соответствовали бы неоднородным по  $z$  волнам, однако они в принятом ограничении  $k < k_{\max}$  представляют экспоненциально-затухающее по радиусу квазистатическое поле.

Попытаемся оценить возбуждение основной волны, т.е. коэффициент  $B_0$ . Из /15/ видно, что сходимость правых частей  $R_m$  систе-

мы /13/ квадратична по индексу  $m$ . Сходимость рядов по  $n$  в выражениях /14/ для  $s_{mn}$  порядка  $n^{-5/2}$  тоже достаточно быстрая. Посмотрим, каково будет значение  $B_0$ , если в системе /13/ ограничиться только одним уравнением, положив  $m=0, t=0$ . Делая предельный переход, положим  $d\xi = \frac{2\pi}{D}, \xi = \frac{2\pi n}{D}, h_n = \frac{k}{\beta} + \xi$ , имеем

$$f_0 = \frac{iQ\beta \sin(kd/2\beta) I_0(k\Gamma R_0)}{\pi^2 a k d \cdot I_0(k\Gamma a)} \left\{ k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(k/\beta + \xi)d/2]}{(k/\beta + \xi) \sqrt{k^2 - (k/\beta + \xi)^2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{J_0(\xi d/2) J_0'(a \sqrt{k^2 - (k/\beta + \xi)^2})}{J_0(a \sqrt{k^2 - (k/\beta + \xi)^2})} d\xi - \pi \cdot \frac{Z'(ka) J_0(-kd/2\beta)}{Z(ka)} \right\}^{-1} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}. \quad /18/$$

С учетом /9/, /10/ имеем

$$B_0 = 2\pi J_0(kd/2\beta) f_0. \quad /19/$$

Оценивая интеграл при малых  $kd$ , получаем

$$f_0 = \frac{-iQ\beta \sin(kd/2\beta) I_0(k\Gamma R_0)}{2\pi^3 a k d \cdot J_0(kd/2\beta) I_0(k\Gamma a)} \left[ \frac{ka}{4\pi} + \frac{Z'(ka)}{Z(ka)} \right]^{-1} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}. \quad /20/$$

С учетом /19/, /17/ получаем уже для единичного зазора

$$E_z^{II} = \frac{-iQ}{4\pi^2 c a \epsilon_0} \cdot \frac{\sin(kd/2\beta) I_0(k\Gamma R_0)}{(kd/2\beta) I_0(k\Gamma a)} \frac{Z(kr)}{\left[ \frac{ka}{4\pi} Z(ka) + Z'(ka) \right]}. \quad /21/$$

Оценка /21/ получилась в результате далеко идущего упрощения формул, получаемых на основе точного решения. Приведем другой подход для получения оценки. Используем /17/, считая сразу, что

$$E_z = \frac{1}{4} B_0 \frac{Z(kr)}{Z(ka)} \quad /22/$$

есть поле основной волны в радиальной линии /замкнутой при  $r=b$ /, и будем определять возбуждающий ее потенциал  $V = \frac{d}{4} B_0$ , где  $d$  - расстояние между пластинками линии, если исходить из наводимого сгустком в линии при  $r=a$  тока, см. /2/.

При условии замкнутости при  $r=b$ , задавая ток  $I(r)|_{r=a}$ , получаем

$$E_z = \frac{-il(a)}{2\pi a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{Z(kr)}{Z'(ka)}. \quad /23/$$

Будем считать, что наведенный ток  $I(t)$  отличен от нуля только тогда, когда сгусток пересекает зазор  $d$ ; скорость  $v$  сгустка считаем постоянной. Тогда, используя формулу Шокли-Рамо для наведенного тока

$$I_{\text{нав}}(t) = Qv/d, \quad /24/$$

подставим в /23/:

$$I(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-d/2v}^{d/2v} \frac{Qv}{d} e^{i\omega t} dt = \frac{Q}{2\pi} \frac{\sin(kd/2\beta)}{(kd/2\beta)} \quad /25/$$

и получим

$$E_z = \frac{-iQ}{4\pi^2 a \epsilon_0} \cdot \frac{\sin(kd/2\beta)}{(kd/2\beta)} \cdot \frac{Z(kr)}{Z'(ka)}, \quad /26/$$

Существенным недостатком формулы /26/ является предположение о том, что  $I(t) \neq 0$  только при  $0 \leq t \leq d/v$ . По-видимому, это правдоподобно, если радиус кольца близок к радиусу канала, так что  $(a-R_0)/d$  мало. В противном случае можно пытаться /см. также /4/ / заменить наведенный в зазоре радиальной линии ток обратным поверхностным током /током изображения/, текущим по стенке сплошного канала при движении в нем сгустка. Этот ток легко сосчитать исходя из выражения для  $H_{\phi\omega}$ :

$$I = 2\pi a j_z = -\frac{Qe^{ikz/\beta}}{2\pi} \frac{I_0(k\Gamma R_0)}{I(k\Gamma a)}. \quad /27/$$

Подставив его в /23/, находим

$$E_z = \frac{-iQe^{ikz/\beta}}{\pi a \cdot 4\pi \epsilon_0} \frac{I_0(k\Gamma R_0)}{I_0(k\Gamma a)} \cdot \frac{Z(kr)}{Z'(ka)}. \quad /28/$$

Теперь можно сравнить /21/, /26/, /28/. На самых низких частотах все три выражения практически не отличаются друг от друга. В /28/ входит несколько неопределенный множитель  $e^{ikz/\beta}$  - мы исходили из представления о токе в гладком волноводе, но приписывали существование зазора шириной  $d$  с серединой в точке  $z = 0$ . Поэтому можно считать в /28/  $z = 0$ .

Теперь заметим: 1/ Частотная область, по которой приходится суммировать поле, равна примерно  $(0, k_{\text{max}})$ ,  $k_{\text{max}} \cdot (a - R_0) < 2\pi\beta$ . 2/ В рассматриваемом диапазоне  $I_0(k\Gamma R_0)/I_0(k\Gamma a) \sim 1$  - этот множитель станет существенным /обрезающим/, если мы захотим провести асимптотическое интегрирование, распространив верхний предел  $k \rightarrow \infty$ . 3/ В формулу /28/ вообще не входит параметр  $d$  - зазор. Как видим, наиболее информативной все же оказывается формула /21/, несмотря на то, что она получена при далеко идущих упрощениях аналитически точных выражений. Если в /26/ феноменологически

ввести "фактор экранировки"  $I_0(k\Gamma R_0)/I_0(k\Gamma a)$ , то использование формулы Шокли-Рамо для наведенного тока в рассматриваемом нами случае может оказаться физически обоснованным.

При вычислении полей с помощью обратного преобразования Фурье, имея обрезающий фактор, мы "забудем", что наши формулы соответствуют низкочастотному приближению, и распространим интегрирование на всю ось  $-\infty < k < \infty$ .

Имея оценочные выражения для  $E_z$  /21/, /26/, /28/, попытаемся определить энергию, идущую на возбуждение вторичного поля.

Можем записать  $W = \int U I dz$ , где  $U = d \cdot E_z$ ,  $I$  - напряжение и ток на входе линии. Будем для  $I(t)$  использовать выражение /24/, следовательно, формулу /26/ для  $E_{z\omega}$ . Учитывая, что  $E_z(t) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E_{z\omega} e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{и вводя фактор экранирования, получим}$$

$$W = \frac{-iQ^2 d}{4\pi^2 \epsilon_0 a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(kd/2\beta)}{(kd/2\beta)^2} \frac{Z(ka)}{Z'(ka)} \left[ \frac{I_0(k\Gamma R_0)}{I_0(k\Gamma a)} \right]^2 \cdot dk. \quad /29/$$

То же выражение мы получили бы, если бы стали вычислять поток вектора Пойтинга  $\mathcal{P}_\omega = E_{z\omega} H_{\phi\omega}^*$  через поверхность  $s = 2\pi ad$  внутрь полости.

При интегрировании /29/ необходимо обойти полюса, сместив контур интегрирования с действительной оси. Из условия отсутствия вторичного поля при  $t = -\infty$  следует, что контур интегрирования нужно провести выше действительной оси. В силу нечетности подинтегральной функции интеграл в смысле главного значения в /29/ исчезает, поэтому  $W$  равно сумме полувычетов в полюсах  $k_n$ . Таковыми являются корни уравнения  $Z'(a\xi) = 0$ . Получаем\*

$$W = \frac{-Q^2 d}{\pi \epsilon_0 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k_n d/2\beta)}{(k_n d/2\beta)^2} \left[ \frac{I_0(k_n \Gamma R_0)}{I_0(k_n \Gamma a)} \right]^2 \frac{\mathcal{J}_0^2(k_n b)}{\mathcal{J}_0^2(k_n b) + \mathcal{J}_1^2(k_n a)}. \quad /30/$$

Итак, структура формулы /30/ и то обстоятельство, что при ее получении исчез интеграл в смысле главного значения, показывает резонансный характер потерь.

Переход к оценочной формуле /30/ кажется физически правдоподобным и приводит к правдоподобным численным результатам для

\* Если вместо /26/ использовать более точную формулу /21/, то следует искать нули функции  $\frac{ka}{4\pi} Z'(ka) + Z'(ka)$ , и выражение /30/ усложняется. Расчеты с использованием этого уточнения далее отмечаем добавлением штриха к ссылке на формулу /30/.

оценки потерь энергии. Однако можно заметить, что при переходе  $D \rightarrow \infty$  исходная система /13/ вырождается, т.к. при этом коэффициенты  $c_{mt}$  перестают зависеть от индекса  $t$ . Поэтому ограничение лишь одним уравнением  $c_{00}f_0 = R_0$  недостаточно, если мы собираемся вычислять сами поля. Даже если использовать основную систему /13/, то при малом отношении  $d/D$  необходимо брать большое число уравнений, чтобы получить достаточную точность. Например, ограничиваясь тремя уравнениями, мы имели бы систему /13/ с коэффициентами следующей структуры:  $c_{mt} = \bar{c}_m + \frac{d}{D} a_{mt}$ ,  $m = 0, 1, 2$ ;  $t = -1, 0, 1$ , причем  $\bar{c}_m$  и  $a_{mt}$  слабо зависят от величины  $td/D$ . Отсюда получим  $\text{Det} \|c_{mt}\| \sim (\frac{d}{D})^2$ , а неизвестные  $f_t$  оказываются пропорциональными  $D/d$ , и значения полей завышаются по мере роста отношения  $D/d$ . С увеличением порядка системы проявляется зависимость коэффициентов  $td/D$ , и детерминант матрицы стабилизируется. Однако условия численного счета усложняются.

Как видно из /13/-/15/, в силу того, что  $c_{mt}$  - действительные, а  $R_m$  - мнимые величины, значения полей получаются мнимыми. Из /6/-/10/ заключаем, что  $A_n$  и  $B_n$  тоже чисто мнимые. Тогда из /16/ с учетом /2/ следует, что при помещении точки наблюдения в канале системы в плоскости сгустка  $r \leq a$ ,  $z = c\beta t$ , главная часть интеграла для члена суммы при  $n = 0$  не дает вклада в  $E_z$ . Действительно, множитель  $e^{ikz/\beta}$ , входящий в  $e^{in^2z}$ , сокращается с множителем  $e^{ickt}$  и, при  $n = 0$ , соответственно член суммы  $E_{z\omega}^{(n)}$  для  $E_{z\omega}$  становится чисто мнимым, а  $E_z^{(0)}(t)$  - нулем. При  $n \neq 0$  периодический множитель  $e^{i2\pi n z/D}$  в членах сумм остается. Учитывая, что в этой ситуации члены сумм имеют вид  $iF_\omega^{(n)}(r)e^{i2\pi n z/D}$ , где  $F_\omega^{(n)}(r)$  - действительно, находим

$$E_{z\omega}^{(n)} = 2\text{Re} \{ iF_\omega^{(n)}(r) e^{i2\pi n z/D} \} = 4F_\omega^{(n)}(r) \sin \frac{2\pi n z}{D}.$$

Таким образом, главное значение интеграла для  $E_z$  в /16/ есть нечетная периодическая функция, и, следовательно, не может дать вклада в потери.

Если, однако, учитывать нули знаменателя, т.е. обходить полюса /как уже было сказано, над осью абсцисс/, то получаем основной вклад в несимметричную часть поля. Эта часть поля и определяет потери энергии сгустком.

### III.

С помощью программы ALFCOL были сделаны расчеты полей для кольцевого сгустка радиуса  $R_0 = 3,5$  см, при  $N = 10^{13}$  и  $\beta = 0,1$ . Параметры структуры  $a = 6$ ,  $b = 100$ ,  $D = 4,6$ ,  $d = 0,6$  см. На рис.2 даны графики  $E_z'$  в месте расположения сгустка в зависимости от его положения вдоль оси структуры в процессе движения ( $z = \beta T$ ;  $T = ct$ ). Кривая 1 соответствует квазистатической части поля, т.к. в расчете учтен только интеграл в смысле главного значения. При добавлении вклада полюсов симметрия кривой 1 на-

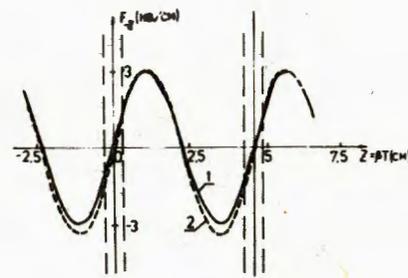


Рис. 2

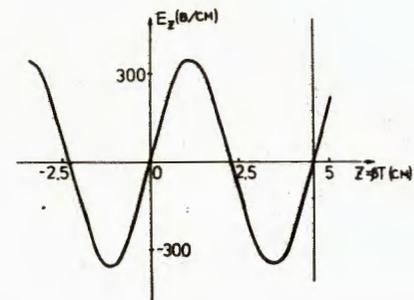


Рис. 3.

рушается, и получаем кривую 2. Соответствующую тормозящую силу можно оценить, и она оказывается  $\sim 670$  эВ/период. част. /При расчете по формуле\* /30/ получается 530 эВ/част./

В рассматриваемой ситуации кольцо движется довольно близко от стенки структуры, и получается большое амплитудное значение  $E_z' \sim 3$  кВ/см. Аналогичный график, данный на рис.3 /учтена только квазистатическая часть/ соответствует структуре с радиусом канала  $a = 8$  см и радиусу кольца  $R_0 = 4$  см, т.е. "прицельный параметр"  $a - R_0$  увеличен в  $\xi = 1,6$  раза. При этом амплитудное значение  $E_z'$  уменьшилось до 360 В/см - примерно в  $2\xi^3$  раза. Расчет потерь по формуле /30/ дает 233 эВ/част. При увеличении радиуса канала и прицельного параметра до  $\xi = 3$  /  $a = 10$  см,  $R_0 = 3,5$  см/ получаем падение  $E_z'$  снова примерно в  $2\xi^3$  раза. Для потерь по формуле /30/ получим  $\sim 92$  эВ/част.

Для структуры и сгустка с параметрами, такими же, как и для рис.2, но с вдвое меньшим периодом, для потерь на периоде структуры получаем  $\sim 536$  эВ/част, однако амплитуда квазистатической части  $E_z'$  уменьшается до 200 В/см.

При выполнении расчетов вычисления проводились с учетом 15 пространственных гармоник в канале системы и 5 стоячих волн в резонаторных ячейках. Контрольные вычисления делались соответственно при /19 и 8/ и /23 и 13/. Практически уточнения получались в пределах графической точности. Достоверность счета можно подтвердить с помощью независимого результата. Был проведен счет для системы, состоящей из двух связанных резонаторов с подводными волноводами бесконечной длины /по программе EHRK2\*\*/. Параметры были взяты сопоставимыми с параметрами пе-

\* См. примечание на стр.9.

\*\* Программа EHRK2 /модифицированный вариант/ основана на другом способе разбиения структуры при решении электродинамической задачи, и полностью отлична от программы ALFCOL.

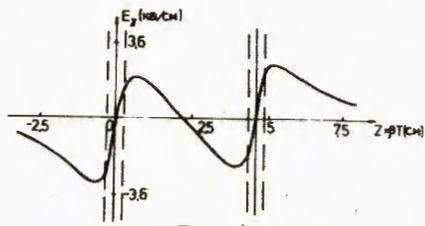


Рис. 4.

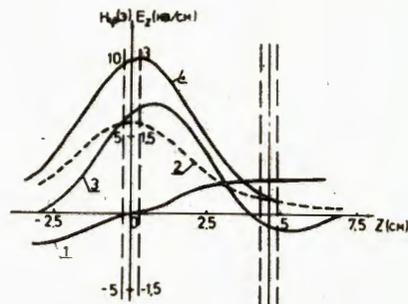


Рис. 5.

риодической структуры  $b = 100$  см - радиус резонаторов,  $d = 0,6$  см - ширина,  $D = 4,6$  см - расстояние между ними,  $a = 6$  см - радиус подводящих волноводов и волновода связи между резонаторами. Параметры кольца те же  $R_0 = 3,5$  см,  $\beta = 0,1$ ,  $N = 10^{13}$ . На рис. 4 дан результат расчета - график  $E_z'$ . Теперь  $E_z'$ , конечно, не обладает периодичностью - в подводящем и выводном волноводах поле просто спадает. Однако средние части кривых на рис. 2 и 4 похожи, и амплитудное значение  $E_z'$  в последнем случае равно  $\sim 2,6$  кВ/см. Можно вычислить и другие составляющие поля как в канале, так и в ячейках структуры. На рис. 5 даны графики  $E_z'$  и  $H_\phi'$  при разных положениях сгустка, движущегося внутри канала, когда точка наблюдения фиксирована и находится на внутренней вертикальной стенке ячейки. Координаты точки наблюдения  $r_{\text{наб}} = 14$  см,  $z_{\text{наб}} = -0,3$  см /параметры структуры и сгустка те же, что и для рис. 2/. Кривая 1 соответствует  $E_z'$ , кривая 2 -  $H_\phi'$  /квазистатическая часть поля/. Добавление вклада полюсов приводит к нарушению симметрии кривых. Например, тогда вместо кривой 2 для  $H_\phi'$  получим кривую 3. Наконец, кривая 4 соответствует значениям  $H_\phi'$  при смещении точки наблюдения по боковой стенке ближе к входу в резонаторную область / $r_{\text{наб}} = 8$  см/.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бурштейн Э.Л., Воскресенский Г.В. Линейные ускорители электронов с интенсивными пучками. Атомиздат, М., 1970, с.190.
2. Рамо С., Уиннери Д. Поля и волны в современной радиотехнике, Гостехиздат, М., -Л., 1948.
3. Лопухин В.М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. Государственное издательство технико-теорет. л-ры, 1953, с.324.
4. Алексахин Ю.И., Казача В.И. ОИЯИ, P9-83-752, Дубна, 1983.
5. Мамонов В.Н., Рубин С.Б. Программы ENRK, ENRK2. ОИЯИ, 61-9-10361, Дубна, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел  
11 декабря 1985 года

Мамонов В.Н., Рубин С.Б.

P9-85-892

О расчете поля, возбуждаемого движущимся электронным сгустком в канале линейного индукционного ускорителя

Исследуются поля, наведенные движущимся сгустком электронов в системе, представляющей собой модель канала индукционного ускорителя. Структура канала представлена последовательностью узких полостей типа радиальных линий, соединенных пролетными трубками. Получены расчетные формулы, позволяющие построить программу для ЭВМ. Проведен анализ этих формул с учетом специфики задачи: сравнительно умеренного значения скорости сгустка.

На основе построенной программы проведены расчеты наведенного поля в месте положения сгустка при его движении, а также для "фиксированных" точек наблюдения внутри структуры в зависимости от времени. Оценивается энергия, теряемая сгустком на возбуждение структуры.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Mamonov V.N., Rubin S.B.

P9-85-892

About Calculation of the Field Excited by  
A Moving Electron Bunch in a Linear Induction  
Accelerator Channel

The fields induced by a moving electron bunch in the system representing the model of linear accelerator channel are investigated. The channel structure is represented by a succession of narrow cavities of radial line type connected by flying tubes. The calculation formulas are derived which permit to design the computer program. The analysis of these formulas is performed taking into account the specific task: a comparatively moderate meaning of velocity bunch. On the basis of developed program calculations of induced field in the place of bunch position at its motion and for "fixed" observation points inside the structure in dependence on time are performed. The power lost by the bunch because of structure excitation is evaluated.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985