объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р5-85-399

В.И.Иноземцев, Д.В.Мещеряков

СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА КОНЕЧНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫХ С АЛГЕБРАМИ ЛИ

Направлено в журнал "Physica Scripta"

1985

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию квантовых систем со многими степенями свободы, обладающих динамической симметрией и дополнительными интегралами движения, посвящено значительное число работ [1–9]. В ряде случаев [8,9] для таких систем удается, используя явный вид интегралов движения, произвести разделение переменных и тем самым упростить задачу об отыскании спектра и собственных функций соответствующих гамильтонианов. В настоящее время, однако, не найден общий способ подобной редукции многомерных интегрируемых квантовых спектральных задач к набору одномерных. В частности, неизвестно, как разделить переменные для систем с гамильтонианами, структура которых определяется системами корней алгебр Ли [4–7]

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2} + a(a-1) \sum_{j>k}^{N} [\, V(x_j - x_k) + \epsilon V(x_j + x_k)] + \sum_{j=1}^{N} W(x_j\,),$$

$$V\,(\xi) = (\mathrm{sh}\,\xi)^{-2}, \quad \epsilon = 0,1, \qquad /1/$$

$$W(\xi) = \begin{cases} g_1\,(\mathrm{sh}\,\xi)^{-2} + g_2(\mathrm{ch}\,\xi)^{-2} + g_3\,\mathrm{ch}\,2\xi + g_4\,\mathrm{ch}\,4\xi, \quad \epsilon = 1, & /2а/ \\ 2A^2(e^{4\xi} - 2\,e^{2\xi}\,) + \tilde{g}_1\,e^{-2\xi} + \tilde{g}_2\,e^{-4\xi}, \quad \epsilon = 0. & /2б/ \end{cases}$$

Полная интегрируемость классических систем вида /1,2/ для произвольных значений констант $a, g_1, \ldots, \tilde{g}_2$ была доказана нами в работах [5,6].

В частном случае $g_3 = g_4 = 0$, $g_1, g_2 > 0$, впервые рассмотренном Ольшанецким и Переломовым [4,7], системы /1/ обладают рядом интересных свойств. При некоторых значениях констант a, g_1, $g_2 > 0$, указанных в [7], гамильтонианы /1/ связаны с операторами Лапласа-Бельтрами на некоторых симметрических пространствах; найдена асимптотика волновых функций непрерывного спектра /в случае $g_1, g_2 > 0$, рассматривавшемся в [7], дискретный спектр отсутствует/. В данной работе мы будем исследовать состояния дискретного спектра квантовых систем с гамильтонианом /1/ при

$$W(\xi) = \frac{\mu(\mu-1)}{2}(\mathrm{sh}\,\xi)^{-2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}(\mathrm{ch}\,\xi)^{-2}; \quad \lambda > 0, \quad \epsilon = 1, \qquad /3а/$$

$$W(\xi) = 2A^2(e^{4\xi} - 2\,e^{2\xi}\,), \quad \epsilon = 0. \qquad /3б/$$

Для самосопряженности гамильтониана необходимо выполнение условий $a(a-1)\geq 3/4$, $\mu(\mu-1)\geq 3/4$, т.е. $a\geq 3/2$, $\mu\geq 3/2$. Функция $W(\xi)$ /3а/ - хорошо известный в физике обобщенный потенциал Пецля-Теллера. Отметим, что недавнее исследование [11] связанных состояний и рассеяния одной частицы в этом потенциале указало на их тесную связь с неприводимыми представлениями групп $SU(2)$ и $SU(1,1)$. В случае /3б/ полученные нами новые результаты допускают ясную физическую интерпретацию: гамильтониан /1/ при условии /3б/ описывает системы N попарно взаимодействующих частиц на прямой, находящиеся в осцилляторе Морса. Очевидно, имеются также и состояния непрерывного спектра. Мы, однако, сосредоточим внимание на возбужденных состояниях дискретного спектра и покажем, каким образом могут быть вычислены как энергетические уровни /их число конечно и определяется значениями параметров гамильтониана λ, μ, a /, так и волновые функции, нормированные условием

$$\int dx_1 \ldots dx_N \, |\psi(x_1,\ldots,x_N)|^2 = 1. \qquad /4/$$

Для решения этой проблемы мы будем применять способ, не использующий явного вида дополнительных интегралов движения, которые представляют собой полиномы по импульсам довольно высокой степени [7]. Наш способ, предложенный ранее в [10] для случая /3б/, основан на разложении решений уравнения Шредингера

$$H\psi = E\psi \qquad /5/$$

в ряды специального вида по функциям, симметричным относительно переменных $\{x_j\}$. Отметим также, что гамильтониан /1,3б/ может быть получен из более общего гамильтониана /1,3а/ формальным предельным переходом

$$x_j \to x_j - q \quad (j=1,\ldots,N),$$

$$\lambda \to \frac{A}{2}\exp(2q) + A - 1/2, \qquad /6/$$

$$\mu \to \frac{A}{2}\exp(2q) - A + 1/2, \quad q\to +\infty.$$

Энергетические уровни в случае /3б/ при этом весьма просто связаны с собственными значениями гамильтониана /1,3а/. Что касается волновых функций, то указанный выше предельный переход /6/ менее тривиален, и выражения для них проще получить, непосредственно изучая гамильтониан /1,3б/.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

После этих предварительных замечаний обратимся к рассмотрению уравнения Шредингера /5/, выполнив в нем замену переменных $z_j = \operatorname{th} x_j$, $j = 1,\ldots N$ /при отсутствии взаимодействия с потенциалом $V(\xi)$ такая подстановка приводит уравнение движения частицы в обобщенном потенциале Пецля-Теллера к гипергеометрическому виду/:

$$\sum_{j=1}^{N}\Big\{-\frac{1}{2}\Big[(1-z_j^2)\frac{\partial}{\partial z_j}(1-z_j^2)\frac{\partial}{\partial z_j}+(1-z_j^2)(\lambda(\lambda+1)-\mu(\mu-1)z_j^2\Big]$$

$$+\sum_{j>k}^{N}\frac{2a(a-1)(1-z_j^2)(1-z_k^2)(z_j^2+z_k^2)}{(z_j^2-z_k^2)^2}\Big\}\psi = E\psi. \qquad /7/$$

Уравнение /7/ имеет сингулярности на гиперплоскостях $z_j = 0$, $z_j \pm z_k = 0$, $j,k = 1,\ldots,N$, разбивающих N-мерное пространство на совокупность многогранных углов. Поскольку потенциальные барьеры вида gz^{-2}, $g\geq 3/4$ абсолютно непроницаемы, мы можем рассмотреть /7/ в любом из этих углов /на границах которого волновая функция должна обращаться в нуль/ и распространить результаты на остальные углы симметричным образом. Для определенности зафиксируем многогранный угол условиями $\{z_j > 0$, $z_j \pm z_k > 0$, $j>k\}$.

Осуществим теперь понижение порядка сингулярностей в /7/. Полагая

$$\psi(z_1,\ldots,z_N) = \chi(z_1,\ldots,z_N)\,\Phi_{a\mu}^{(\beta)}(z_1,\ldots,z_N), \qquad /8/$$

где

$$\Phi_{a\mu}^{(\beta)}(z_1,\ldots,z_N) = \prod_{j=1}^{N} z_j^{\mu}(1-z_j^2)^{\beta}\prod_{j>k}^{N}(z_j^2-z_k^2)^{a}, \qquad /9/$$

и выполняя замену переменных $z_j^2 = q_j$, $j = 1,\ldots,N$, получим для $\chi(z_1,\ldots,z_N)$ уравнение

$$-\Big\{\sum_{j=1}^{N}\Big[2q_j(1-q_j)^2\frac{\partial^2}{\partial q_j^2}+\Big(4a\,q_j(1-q_j)^2\sum_{k\neq j}(q_j-q_k)^{-1}+(1-q_j)(2\mu+1-(4\beta+2\mu+3)\times$$

$$\times q_j)\Big)\frac{\partial}{\partial q_j}\Big] + p(\beta)\sum_{j=1}^{N}q_j\Big\}\chi = (E-\epsilon(\beta))\chi. \qquad /10/$$

Здесь

$$p(\beta) = \beta(2\beta+2\mu+1) - \frac{(\mu-\lambda)(\mu+\lambda-1)}{2} + 2a^2(N-1)^2 + a(N-1)(4\beta+2\mu+1),$$

$$\epsilon(\beta) = -N\Big[\beta(2\mu+1) + a(N-1)(2\beta+2\mu-1) - \frac{(\mu-\lambda)(\mu+\lambda-1)}{2} + \frac{a^2}{3}(N-1)(4N-5)\Big].$$

Функция $\Phi_{a\mu}^{(\beta)}$, как будет показано ниже, при определенном значении параметра β является волновой функцией основного состояния рассматриваемого нами гамильтониана /1,3б/.

Легко видеть, что при отсутствии в /10/ слагаемых $\sum_{k\neq j}(q_j-q_k)^{-1}$ переменные разделяются, и решение можно искать в виде произведений степенных рядов по q_j, которые в общем случае расходятся при $q_j\to 1$. Сходимость на этих гиперплоскостях, обеспечивающая выполнение условия нормировки, имеет место лишь в том случае, когда ряды обрываются и превращаются в полиномы конечной степени. Это происходит лишь при определенных значениях параметров E и β; в результате получается спектр связанных состояний N невзаимодействующих частиц в обобщенном потенциале Пецля-Теллера.

Для построения решений /10/, соответствующих дискретному спектру, мы воспользуемся аналогией с описанной выше схемой, применимой при отсутствии взаимодействия. Будем искать решение /10/ в виде рядов, по функциям, симметричным относительно перестановки любых двух координат $\{q_j, q_k\}$. Согласно[1], такая симметрия необходима и достаточна для устранения сингулярностей при $q_j\to q_k$ в /10/. При этом удобно сначала выполнить в уравнении /10/ замену переменных $q_j\to 1-t_j$, $j=1,\dots,N$, приведя его к виду

$$\tilde H(\beta)\,\chi=(E-\tilde\epsilon(\beta))\,\chi, \qquad /11/$$

где

$$\tilde H(\beta)=\sum_{j=1}^{N}\Big[\,2(t_j^3-t_j^2)\frac{\partial^2}{\partial t_j^2}+(4\beta+2\mu+3)\,t_j^2-2(2\beta+1)\,t_j+4\alpha t_j^2(t_j-1)\times$$
$$\times\sum_{k\neq j}^{N}(t_j-t_k)^{-1}\frac{\partial}{\partial t_j}\Big]+p(\beta)\sum_{j=1}^{N}t_j, \qquad /12/$$

$$\tilde\epsilon(\beta)=\epsilon(\beta)-Np(\beta)=-\frac{N}{2}\Big[(2\beta+\alpha(N-1))^2+\frac{\alpha^2(N^2-1)}{3}\Big].$$

Далее, введем вместо $\{t_j\}$ новые переменные, обладающие явной симметрией относительно перестановок $t_j\to t_k$:

$$a_1=\prod_{j=1}^{N}t_j,\quad a_\ell=\frac{\hat D^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\,a_1,\quad \hat D=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial t_j},\quad \ell=1,\dots,N. \qquad /13/$$

Если в дальнейшем индекс m у величин $\{a_m\}$ будет принимать значения, меньшие 1 или большие N, то следует полагать

$$a_{N+1}=1,\quad a_0=a_{N+2}=a_{N+3}=\dots=0. \qquad /14/$$

Для перехода в /11,12/ к переменным $\{a_j\}$ /13/ необходимо представить в виде функций $\{a_j\}$ следующие выражения:

$$\hat B_i a_\ell,\qquad \hat B_i=\sum_{j=1}^{N}t_j^i\frac{\partial}{\partial t_j},\quad i=1,2, \qquad /15a/$$

$$\hat C_i a_\ell,\qquad \hat C_i=\sum_{j\neq k}^{N}\frac{t_j^i}{t_j-t_k}\frac{\partial}{\partial t_j},\quad i=2,3, \qquad /15б/$$

$$F^{(i)}_{\ell m}=\sum_{j=1}^{N}t_j^i\frac{\partial a_\ell}{\partial t_j}\frac{\partial a_m}{\partial t_j},\quad i=2,3;\quad \ell,m=1,\dots,N. \qquad /15в/$$

Вычислим сначала выражения /15а/. Замечая, что

$$[\hat D,\hat B_i]=i\hat B_{i-1},\quad \hat B_0=\hat D \qquad /16/$$

и пользуясь определением a_ℓ /13/, найдем

$$((\ell-1)!)^{-1}\hat B_i\hat D^{\ell-1}a_1=((\ell-1)!)^{-1}\Big[\sum_{j=0}^{\ell-2}\hat D^j[\hat B_i,\hat D]\hat D^{\ell-2-j}a_1+\hat D^{\ell-1}B_i a_1\Big]. \qquad /17/$$

Так как $\hat B_1 a_1=Na_1$, $\hat B_2 a_1=a_N a_1$, $\hat D^{\ell-1}(a_N a_1)=a_N\hat D^{\ell-1}a_1+N(\ell-1)\hat D^{\ell-2}a_1$, то из /16,17/ получим

$$\hat B_1 a_\ell=(N-\ell+1)a_\ell,\quad \hat B_2 a_\ell=a_N a_\ell-(N-\ell+2)\,a_{\ell-1}. \qquad /18a/$$

Перейдем к вычислению /15б/. Ограничившись вначале случаем $\ell=1$, найдем

$$\hat C_i a_1=a_1\sum_{j\neq k}^{N}(t_j-t_k)^{-1}t_j^{i-1}. \qquad /19/$$

Вычисляя суммы в /19/, получим соотношения

$$\hat C_1 a_1=0,\quad \hat C_2 a_1=\frac{N(N-1)}{2}a_1,\quad \hat C_3 a_1=a_N a_1(N-1). \qquad /20/$$

Заметим, что коммутаторы операторов $\hat C_i$, $\hat D$ также имеют простой вид:

$$[\hat C_i,\hat D]=-i\hat C_{i-1},\quad [\hat C_0,\hat D]=0. \qquad /21/$$

Последовательно применяя /21/ в тождествах, аналогичных /17/,

$$\hat C_i\hat D^{\ell-1}a_1=\sum_{j=0}^{\ell-2}\hat D^j[\hat C_i,\hat D]\hat D^{\ell-2-j}a_1+\hat D^{\ell-1}\hat C_i a_1,$$

и используя соотношения /20/, найдем

$$C_2 a_\ell=\frac{(N-\ell+1)(N+\ell-2)}{2}a_\ell,\quad C_3 a_\ell=(N-1)a_N a_\ell-\frac{(N-\ell+2)(N+\ell-3)}{2}a_{\ell-1}. \qquad /18б/$$

Наконец, получим явные выражения для величин $F^{(1)}_{\ell m}$ /15в/. Так как оператор $[\hat{D}, t_j \frac{\partial}{\partial t_j}] = \frac{\partial}{\partial t_j}$ коммутирует с $\hat{D}$, из определения полиномов a_ℓ /13/ легко получить их свойство

$$t_j \frac{\partial a_\ell}{\partial t_j} = a_\ell - \frac{\partial a_{\ell-1}}{\partial t_j}. \qquad /22/$$

Это свойство позволяет сразу же выразить $F^{(3)}_{\ell m}$ через $F^{(2)}_{\ell m}$. Действительно, группируя множители в /15в/ и применяя /22/, получим

$$F^{(3)}_{\ell m} = \sum_{j=1}^{N} (t_j \frac{\partial a_\ell}{\partial t_j}) t_j^2 \frac{\partial a_m}{\partial t_j} = \sum_{j=1}^{N} (a_\ell - \frac{\partial a_{\ell-1}}{\partial t_j}) t_j^2 \frac{\partial a_m}{\partial t_j} = a_\ell \hat{B}_2 a_m -$$

$$- F^{(2)}_{\ell-1,m} = a_N a_\ell a_m - (N-m+2) a_{m-1} a_\ell - F^{(2)}_{\ell-1,m} . \qquad /23/$$

Поскольку выражение в левой части /23/ симметрично относительно перестановки индексов ℓ и m, тем же свойством должна обладать и правая часть /23/. Это приводит к системе уравнений, которой должны удовлетворять величины $F^{(2)}_{\ell m}$:

$$F^{(2)}_{\ell-1,m} - F^{(2)}_{\ell,m-1} = (N-\ell+2) a_{m-1} a_\ell - (N-m+2) a_{\ell-1} a_m . \qquad /24/$$

Несложно получить также явное выражение для $F^{(2)}_{1,\ell}$. Так как $\frac{\partial a_1}{\partial t_j} = t_j^{-1} a_1$, то

$$F^{(2)}_{1,\ell} = \sum_{j=1}^{\ell} t_j^2 \frac{\partial a_1}{\partial t_j} \frac{\partial a_\ell}{\partial t_j} = a_1 \hat{B}_1 a_\ell = (N-\ell+1) a_1 a_\ell . \qquad /25/$$

Используя /24/ для последовательного понижения первого индекса величин $F^{(2)}$ и выражение /25/, можно найти $F^{(2)}_{\ell m}$ в явном виде:

$$F^{(2)}_{\ell m} = (N-m+1) a_\ell a_m - \sum_{r=1}^{\ell-1} (\ell + m - 2r) a_r a_{\ell+m-r} . \qquad /18в/$$

Из /18в/ и /23/ окончательно получим выражение для $F^{(3)}_{\ell m}$:

$$F^{(3)}_{\ell m} = a_\ell a_m a_N - (N-m+2) a_{m-1} a_\ell - (N-\ell+2) a_{\ell-1} a_m +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\ell-1} (\ell + m - 2r - 1) \times a_r a_{\ell+m-r-1} . \qquad /18г/$$

С учетом /18а-г/ и простого соотношения $\frac{\partial^2 a_\ell}{\partial t_j^2} = 0$, где $\ell, j = 1, \ldots, N$, уравнение /11,12/ можно записать в переменных $\{a_1, \ldots, a_N\}$:

$$(\hat{H}_1(\beta) + H_2(\beta))\chi = (E - \tilde{\varepsilon}(\beta))\chi \qquad /26/$$

$$\hat{H}_1(\beta) = 2 \sum_{\ell,m=1}^{N} [\sum_{r=1}^{\ell-1} \sum_{\nu=0}^{1} (\ell + m - 2r - \nu) a_r a_{\ell+m-r-\nu} - (N-m+2) a_{m-1} a_\ell$$

$$- (N-\ell+2) a_m a_{\ell-1} - (N-m+1) a_\ell a_m] \frac{\partial^2}{\partial a_\ell \partial a_m} - \sum_{\ell=1}^{N} [a_{\ell-1} (N-\ell+2)(4\beta + 2\mu + 3 + \qquad /27а/$$

$$+ 2\alpha (N + \ell - 3)) + 2 a_\ell (N - \ell + 1)(2\beta + 1 + \alpha(N + \ell - 2))] \frac{\partial}{\partial a_\ell} ,$$

$$\hat{H}_2(\beta) = a_N [2 \sum_{\ell,m}^{N} a_\ell a_m \frac{\partial^2}{\partial a_\ell \partial a_m} + \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell \frac{\partial}{\partial a_\ell} (4\beta + 2\mu + 3 + 4\alpha(N-1)) + p(\beta)]. \qquad /27б/$$

Именно эта форма уравнения Шредингера оказывается наиболее удобной при отыскании решений, удовлетворяющих условию нормировки /4/, которое для функций χ вследствие /8,9/ имеет вид

$$\int_{-1}^{1} \prod_{j=1}^{N} dz_j \, z_j^{2\mu} (1 - z_j^2)^{2\beta - 1} \prod_{j>k}^{N} |z_j^2 - z_k^2|^{2\alpha} |\chi|^2 = 1. \qquad /28/$$

3. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ГАМИЛЬТОНИАНА

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, естественно искать решения уравнения /26/ в виде степенных рядов по $\{a_j\}$:

$$\chi = \sum_{s=0} \sum_{\substack{0 \le j_1, \ldots, j_N \le s \\ j_1 + \ldots j_N = s}} c^{(s)}_{j_1 \ldots j_N} a_1^{j_1} \ldots a_N^{j_N} . \qquad /29/$$

Из рассмотрения структуры операторов $\hat{H}_{1,2}(\beta)$ видно, что в общем случае ряды /29/ содержат бесконечное число слагаемых и могут расходиться в некоторых областях пространства $\{a_1, \ldots, a_N\}$. Действительно, оператор $\hat{H}_2(\beta)$, действуя на полином $a_1^{j_1} \ldots a_N^{j_N}$ степени s, переводит его в полином (s+1)-й степени, так что цепочка уравнений для $c^{(s)}_{j_1 \ldots j_N}$, возникающая при подстановке /29/ в /26/, в общем случае бесконечна. Обрыв суммирования по s и превращение рядов /29/ в полиномы, не обладающие сингулярностями, может произойти только в том случае, когда оператор $\hat{H}_2(\beta)$ обращает в нуль полином максимальной степени n в /29/:

$$\hat{H}_2(\beta) a_1^{j_1} \ldots a_N^{j_N} = 0, \quad j_1 + \ldots j_N = n. \qquad /30/$$

Из /27б/ и /11/ следует, что уравнение /30/ эквивалентно следующему условию, которое должно быть наложено на параметр β:

$$2\beta^2+\beta(2\mu+1-4n+4\alpha(N-1))+n(2\mu+2n+1)+\alpha(N-1)[2\mu+4n-1$$
$$+2\alpha(N-1)]+\frac{(\mu-\lambda)(\mu+\lambda+1)}{2}=0. \qquad /31/$$

Решение /31/, совместное с условием нормировки /28/, имеет вид

$$\beta(n)=\frac{\lambda-\mu}{2}-\alpha(N-1)-n. \qquad /32/$$

Из /28/ следует также, что $\beta>0$, т.е. целое число n, определяющее максимальную степень полинома /29/ /и, следовательно, число уровней дискретного спектра/, согласно /32/, ограничено:

$$n<\frac{\lambda-\mu}{2}-\alpha(N-1). \qquad /33/$$

Обозначим посредством $\tilde{n}$ максимальное целое число, удовлетворяющее неравенству /33/. Совокупность всех полиномов по переменным $\{a_j\}$ степени, не превышающей $\tilde{n}$, образует линейное пространство L размерности $\frac{(N+\tilde{n})!}{N!\tilde{n}!}$. В этом пространстве $\hat{H}_1(\beta(\tilde{n}))$, $\hat{H}_2(\beta(\tilde{n}))$ являются линейными операторами. Полное число уровней дискретного спектра гамильтониана /1.3а/ равно размерности упомянутого выше пространства L, $\frac{(N+\tilde{n})!}{N!\tilde{n}!}$; сами эти уровни определяются собственными значениями матрицы $\hat{H}_1(\beta(\tilde{n}))+\hat{H}_2(\beta(\tilde{n}))$ с точностью до величины $\epsilon(\beta(\tilde{n}))=-\frac{N}{2}[\frac{\alpha^2}{3}(N^2-1)+(\lambda-\mu-\alpha(N-1)-2\tilde{n})^2]$.

Рассмотрим структуру этой матрицы в базисе пространства L, образованном элементами $\{a_1^{j_1}\ldots a_N^{j_N}\}$, $0\le j_1,\ldots,j_N\le\tilde{n}$, $\sum_{\alpha=1}^{N} j_\alpha=\tilde{n}$. Введем в этом базисе упорядочение по следующим правилам. Во-первых, разобьем все множество базисных элементов на подмножества M_k, определяемые условиями $j_1+\ldots j_N=k$, $k=0,1,\ldots\tilde{n}$, и будем считать, что элементы из M_k имеют меньший номер, чем элементы $M_{k'}$, если $k>k'$. При этом матрица $\hat{H}_1(\beta(\tilde{n}))+\hat{H}_2(\beta(\tilde{n}))$ разбивается на $(\tilde{n}+1)^2$ блоков, которые мы будем обозначать $\hat{H}_{kk'}$ /в дальнейшем такое представление этой матрицы будем называть блочным/. Во-вторых, установим упорядочение в каждом из множеств M_k, содержащих $\frac{(N+k-1)!}{(N-1)!k!}$ элементов: если для двух элементов из M_k $a_1^{j_1}\ldots a_N^{j_N}$, $a_1^{j'_1}\ldots a_N^{j'_N}$ имеют место соотношения $j_1=j'_1$, $j_s=j'_s$, $j_{s+1}>j'_{s+1}$, то первый элемент имеет меньший номер.

Отметим, что при данном способе упорядочения матрица оператора $\hat{H}_2(\beta(\tilde{n}))$ является верхней треугольной, и в блочном представлении единственные ее ненулевые элементы $-(\hat{H}_2)_{k+1,k}$. В этом же представлении отличны от нуля матричные элементы $(\hat{H}_1)_{kk}$, $(\hat{H}_1)_{k-1,k}$. Последнее обстоятельство, нарушающее треугольность всей матрицы $(\hat{H}_1+\hat{H}_2)$ в блочном представлении, следует из структуры первого слагаемого в $\hat{H}_1(\beta(\tilde{n}))$ /27а/: при $\ell+m\ge N+2$ в сумме по r,ν индекс у множителя $a_{\ell+m-r-\nu}$ может принимать значение N+1. Так как $a_{N+1}=1$, то в $\hat{H}_1(\beta(\tilde{n}))$ содержатся члены вида $(2(N+1)-\ell-m)\,a_{\ell+m-N-1}\frac{\partial^2}{\partial a_\ell\partial a_m}$, понижающие степень полинома $a_1^{j_1}\ldots a_N^{j_N}$.

Нетрудно доказать также, что все матрицы $(\hat{H}_1)_{kk}$ являются верхними треугольными: действие операторов $a_{\ell-1}\frac{\partial}{\partial a_\ell}$, $a_{m-1}a_\ell\frac{\partial^2}{\partial a_\ell\partial a_m}$, $\sum_{\ell>m}^{N}\sum_{r=1}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{1}(\ell+m-2r-\nu)\,a_r\,a_{\ell+m-r-\nu}\frac{\partial^2}{\partial a_\ell\partial a_m}$ на элемент $a_1^{j_1}\ldots a_N^{j_N}$ приводит к элементам с меньшими номерами, находящимися в прежнем множестве M_k.

Покажем теперь, что, несмотря на существование отличных от нуля элементов $(\hat{H}_1)_{k-1,k}$, всю матрицу $(\hat{H}_1(\beta(\tilde{n}))+\hat{H}_2(\beta(\tilde{n})))$ можно привести к треугольному виду. Заметим сначала, что блок $(\hat{H}_1)_{01}$ целиком состоит из нулей, а матрица $\hat{H}_{11}$ может быть приведена, посредством вычитания столбцов, к диагональному виду, причем эта процедура не изменяет ее диагональных элементов. Блок $(\hat{H}_1)_{12}$ уже содержит отличные от нуля элементы в некоторых столбцах /и строках $\{\ell\}$ /. Их можно обратить в нуль, вычитая из этих столбцов всей матрицы $(\hat{H}_1+\hat{H}_2)$ такие, которые, проходя через блок $(\hat{H}_1)_{11}$, имеют в этом блоке диагональные элементы, соответствующие строкам $\{\ell\}$. При этом за счет элементов блока $(\hat{H}_2)_{21}$ возникают новые слагаемые в матрице $(\hat{H}_1)_{22}$. Однако вследствие выбранного нами способа упорядочения эти слагаемые не изменяют структуры матрицы $(\hat{H}_1)_{22}$ – она по-прежнему остается верхней треугольной, причем ее диагональные элементы также не изменяются. Продолжая эту процедуру, можно последовательно устранить все отличные от нуля элементы в блоках $(\hat{H}_1)_{k-1,k}$, не изменяя диагональные элементы матриц $(\hat{H}_1)_{kk}$, которые и являются собственными значениями матрицы $(\hat{H}_1(\beta(\tilde{n}))+\hat{H}_2(\beta(\tilde{n})))$. Прямое вычисление по формуле /27а/ показывает, таким образом, что дискретный спектр гамильтониана /1,3а/ определяется набором N целых чисел $\{j_1,\ldots,j_N\}$, $0\le j_1,\ldots,j_N\le\tilde{n}$, $j_1+\ldots j_N=s\le\tilde{n}$; уровни энергии, с точностью до величины $\epsilon(\beta(\tilde{n}))$, являются диагональными элементами оператора $-2\{2\sum_{\ell>m}(N-\ell+1)a_\ell a_m\frac{\partial^2}{\partial a_\ell\partial a_m}+$

$$+\sum_{\ell=1}^{N}[(N-\ell+1)(a_\ell^2\frac{\partial^2}{\partial a_\ell^2}-2a_\ell(2\beta(\tilde{n}))+1+\alpha(N+\ell-2))\frac{\partial}{\partial a_\ell})]$$

в базисе $\{a_1^{j_1}\ldots a_N^{j_N}\}$:

$$-E_{j_1\ldots j_N}=\frac{N}{2}[\frac{\alpha^2}{3}(N^2-1)+(\lambda-\mu-\alpha(N-1)-2\tilde{n})^2]+$$

$$+2s(N+1)(s+\lambda-\mu-2\tilde{n}-aN)+\sum_{\ell=1}^{N}\ell j_\ell\,(a(2N+1)+2\tilde{n}+\mu-\lambda-j_\ell+a\ell)$$

$$+2\sum_{\ell>m}^{N}\ell j_\ell j_m \; . \qquad /34/$$

Отметим, что параметры гамильтониана /1,3а/ входят в /34/ только в виде комбинации $(\lambda-\mu)$. Поэтому можно сразу определить дискретный спектр гамильтониана /1,3б/, описывающего систему N попарно взаимодействующих посредством потенциала $a(a-1)\times(\operatorname{sh}\xi)^{-2}$ частиц на прямой, находящуюся в осцилляторе Морса: при предельном переходе /6/ $\lambda-\mu\to 2A-1$. Подстановка этого значения в /34/ приводит к нужному результату. Энергия основного состояния может быть вычислена по формуле /34/ при $j_1=\tilde{n},\ j_2=\ldots j_N=0$:

$$E^{(0)}=-\frac{N}{2}\left[\frac{a^2}{3}(N^2-1)+(\lambda-\mu-a(N-1))^2\right].$$

4. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ

После того, как найдены уровни дискретного спектра /34/, задача об отыскании волновых функций сводится к подстановке /34/, /29/ в /26/ и решению систем $\frac{(N+\tilde{n})!}{\tilde{n}!N!}$ однородных линейных алгебраических уравнений с равным нулю определителем. Для произвольных $\tilde{n}$ нам не удалось найти эти решения в явном виде. Исключение представляет собой случай $n=1$, когда функции χ имеют вид

$$\chi=\sum_{j=1}^{N}c_j a_j+c_{N+1}\,, \qquad /35/$$

и матричные элементы слагаемых в $\hat{H}_1(\beta(1))$, содержащих двукратное дифференцирование по переменным $\{a_j\}$, обращаются в нуль. Система уравнений для коэффициентов c_j /35/ может быть записана в форме

$$(E-\epsilon(\beta(1)))\,c_{N+1}=0,$$

$$(N-j+1)[2\lambda-1-2a(N-j)]c_{j+1}+[2(N-j+1)(\lambda-\mu-1-a(N-j))+E-\epsilon(\beta(1))]c_j=0. \qquad /36/$$

При подстановке в /36/ вместо E уровней энергии при $n=1$, $E^{(\ell)}=\epsilon(\beta(1))-2(N-\ell+1)(\lambda-\mu-1-a(N-\ell))$, получим

$$(N-\ell+1)\,c^{(\ell)}_{N+1}=0,$$

$$(N-j+1)[2\lambda-1-2a(N-j)]c^{(\ell)}_{j+1}-2(j-\ell)[a(j+\ell-2N-1)+\lambda-\mu-1]c^{(\ell)}_j=0, \qquad /37/$$

$$\ell=2,\ldots N+1.$$

Непосредственное вычисление коэффициентов $c_j^{(\ell)}$, согласно /37/, позволяет в явном виде найти волновые функции $\chi^{(\ell)}$ при $n=1$ /с точностью до нормировочного множителя/:

$$\chi^{(1)}_\ell=d_\ell\sum_{j=1}^{\ell}(-1)^{\ell-j}\frac{(N-j+1)!}{(N-\ell+1)!(\ell-j)!}\,\frac{\Gamma(\frac{2\lambda-1}{2a}-N+\ell)\;\Gamma(\frac{\lambda-\mu-1}{a}-2N+\ell+j-1)\,a_j}{\Gamma(\frac{2\lambda-1}{2a}-N+j)\;\Gamma(\frac{\lambda-\mu-1}{a}-2N+2\ell-1)}\,. \qquad /38/$$

Волновая функция основного состояния системы с гамильтонианом /1,3а/ имеет вид /9/

$$\Phi_{a\mu}^{(\frac{\lambda-\mu}{2}-a(N-1))}=Z^{-1/2}\prod_{j=1}^{N}z_j^{\mu}(1-z_j^2)^{\frac{\lambda-\mu}{2}-a(N-1)}\prod_{j>k}^{N}(z_j^2-z_k^2)^{a}\,. \qquad /39/$$

Интеграл, определяющий нормировочный множитель Z в /39/, был вычислен в работе /12/:

$$Z=\prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(ja)}{\Gamma(a)}\prod_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(\mu+1/2+ja)\,\Gamma(\lambda-\mu-a(N-1)+ja)}{\Gamma(\lambda+1/2+ja)}\,.$$

Для функций /38/ нам не удалось найти явных выражений для d_ℓ.

Заметим, что при $0<\frac{\lambda-\mu}{2}-a(N-1)<2$ величины $\chi_1^{(\ell)}\Phi_{a\mu}^{(\frac{\lambda-\mu}{2}-a(N-1)-1)}$ /38/, $\Phi_{a\mu}^{(\frac{\lambda-\mu}{2}-a(N-1))}$ /39/ образуют весь набор волновых функций дискретного спектра нашего гамильтониана. В физически интересном случае /3б/ волновые функции дискретного спектра при $n=1$ могут быть получены путем решения систем уравнений, аналогичных /37/:

$$\Psi_1^{(\ell)}(x_1,\ldots x_N)=\tilde{d}_\ell\prod_{m=1}^{N}\exp\{x_m(2A-2a(N-1)-3)-Ae^{2x_m}\}\prod_{j>k}^{N}|e^{2x_j}-e^{2x_k}|^{a}$$

$$\times\sum_{j=1}^{\ell}\frac{(-1)^{\ell-j}}{(j-1)!}\left(\frac{2A}{a}\right)^{\ell-j}\frac{(N-j+1)!}{(\ell-j)!(N-\ell+1)!}\,\frac{\Gamma(\frac{2A-2}{a}-2N+j+\ell-1)}{\Gamma(\frac{2A-2}{a}-2(N-\ell)-1)}\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{e^{-2x_m}}{2}\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{j-1}\exp(2\sum_{i=1}^{N}x_i).$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы нашли в явном виде энергетические уровни и простейшие волновые функции возбужденных состояний дискретного спектра как абстрактного гамильтониана /1,3а/, так и гамильтониана /1,3б/, представляющего физический интерес и описывающего системы взаимодействующих частиц на прямой в осцилляторе Морса. При этом мы не использовали явный вид дополнительных интегралов движения, существующих для этих гамильтонианов. Естественно поэтому, что примененный нами способ не может быть распространен на более сложные гамильтонианы/1,2а-б/, которые также, по-видимому, описывают интегрируемые квантовые системы. В случае /1,2б/ волновая функция основного состояния может быть представлена в факторизованном виде, подобном /39/, лишь при некоторых ограничениях на параметры потенциала внешнего поля A, $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ [14]; о волновых функциях возбужденных состояний при $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \neq 0$ в настоящее время отсутствует какая-либо информация. Возможно, системы с гамильтонианами /1,2а-б/ удастся тем или иным способом включить в схему квантовой обратной задачи рассеяния [18], универсальность которой была недавно продемонстрирована успешной редукцией задачи о спектре квантовой периодической N-частичной цепочки Тода [15]. Реализация такой программы даже в простейшем нетривиальном случае $N = 2$ позволила бы, на наш взгляд, достичь существенного продвижения в изучении квантовых систем /1,2а-б/ и понимании природы той симметрии уравнения Шредингера, которая приводит к сравнительно простому выражению /34/ для уровней дискретного спектра интегрируемых систем /3а-б/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Calogero F. J.Math.Phys., 1971, vol.12, p.419.
2. Calogero F., Marchioro C., Ragnisco O. Lett.Nuovo Cim., 1975, 13, p.383.
3. Sutherland B. Phys.Rev., 1972, A5, p.1372.
4. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Lett.Math.Phys., 1977, 2, p.7; Препринт ИТЭФ-18, М., 1979.
5. Inozemtsev V.I. Phys.Scripta, 1984, 29, p.518.
6. Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. Lett.Math.Phys., 1985, 9, p.13.
7. Olshanetsky M.A., Perelomov A.M. Phys.Rep., 1983, 94, p.313.
8. Gutzwiller M.S. Ann.Phys., 1981, 133, p.304.
9. Komarov V.I., Zalipaev V.V. J.Phys.A, 1984, 17, p.1439.
10. Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. In: JINR Rapid Comm., No.4-84, Dubna, 1984, p.22.
11. Gürsey F. In: Lecture Notes in Physics, 1983, 180, p.106.
12. Dotsenko Vl.S., Fateev V.A. Nordita preprint 84/22, 1984.
13. Kulish P.P., Sklyanin E.K. Lect.Notes in Phys., 1982, 151, p.61.
14. Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. Phys.Lett., 1984, 106A, p.101.
15. Sklyanin E.K. PAR LPTHE 84,34, Paris, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 мая 1985 года.

Иноземцев В.И., Мещеряков Д.В. Р5-85-399
Состояния дискретного спектра конечномерных квантовых систем, связанных с алгебрами Ли

Рассматривается проблема нахождения энергетических уровней и волновых функций состояний дискретного спектра для класса гамильтонианов, связанных с системами корней алгебр Ли и в предельном случае описывающих квантовые системы N взаимодействующих частиц на прямой в осцилляторе Морса. Показано, что эта проблема может быть сведена в алгебраической. Получены точные выражения, определяющие зависимость уровней энергии от параметров гамильтониана взаимодействия.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод авторов

Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V. P5-85-399
The Discrete Spectrum States of Finite-Dimensional Quantum Systems Connected with Lie Algebras

The problem of finding the energy levels and wave functions for discrete spectrum states of a class of Hamiltonians connected with root systems of the Lie algebras is considered. In a limiting case these Hamiltonians describe the motion of quantum interacting particle systems on a line in the Morse oscillator. It is shown that this problem can be reduced to algebraic one; the exact expressions determining the dependence of energy levels on the parameters of the Hamiltonian are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985