

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P9-85-271

Ю.И.Алексахин

О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ
ФОРМИРОВАНИЯ ЛАМИНАРНЫХ ПОТОКОВ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

направлено в "Журнал технической физики"

1985

ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей теории формирования ламинарных /в частности, бриллюэновских/ потоков заряженных частиц^{/1/} является построение решений уравнений потока пространственного заряда, удовлетворяющих определенным условиям на эмиттере и обладающих желаемыми свойствами /например, отсутствием пульсаций/ на удалении от него. При этом имеется свобода как в выборе существенных характеристик потока, так и в способе его описания, позволяющая найти адекватный подход в различных конкретных ситуациях.

Существуют эффективные методы расчета нерелятивистских двумерных потоков^{/2,3/}, которые сводятся к нахождению ортогональной системы координат, связанной с траекториями частиц /или трубками тока/ и поверхностью эмиттера. Геометризация уравнений потока в общем релятивистском случае исследована В.А.Сыровым^{/4/}. В частности, им показано, что геометризованное описание релятивистских осесимметричных течений требует /при нулевой скорости старта частиц с эмиттера/ введения неортогональной системы координат, что является очевидным усложнением задачи.

В настоящей работе развит негеометризованный подход, идейно восходящий к "самосогласованной электродинамике" О.Бунемана^{/5/} и применимый в случае ламинарных потоков с нулевой циркуляцией обобщенного импульса. Единственным существенным требованием, предъявляемым к системе координат, является совпадение поверхности эмиттера с какой-либо из координатных поверхностей, что позволяет обойти трудности^{/6/}, связанные с нерегулярностью характеристик потока на эмиттере.

1. УРАВНЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА

Аппарат римановой геометрии, наиболее естественный для описания потока в криволинейных координатах, позволяет единым образом рассмотреть и нестационарный случай. В данном разделе, имея в виду возможность применения его результатов для исследования волн пространственного заряда, мы предполагаем только ламинарность потока и равенство нулю его обобщенного вихря.

Введем в четырехмерном пространстве-времени систему координат x^i , $i=0,1,2,3$, с метрическим тензором g_{ik} , определенным так, что $g_{00} > 0$, $g_{ii} < 0$, $i = 1,2,3$. Интервал в этом случае дается соотношением

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad /1/$$

Уравнение движения частицы с зарядом e и массой покоя m в электромагнитном поле, характеризуемом тензором F^{ik} , имеет вид /7/

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = \frac{e}{mc^2} F^{il} u_l, \quad /2/$$

где

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

- символ Кристоффеля, $u^i = dx^i/ds = (\gamma, \vec{\eta})$ - 4-скорость частицы, временная компонента которой есть*релятивистский фактор массы γ , а пространственные компоненты связаны с вектором импульса: $\vec{\eta} = \vec{p}/mc$, c - скорость света в вакууме. Из /1/ следует известное соотношение

$$g_{ik} u^i u^k = u_k u^k = \gamma^2 - \vec{\eta}^2 = 1. \quad /3/$$

Ламинарность потока подразумевает равенство 4-скорости частицы в данной мировой точке гидродинамической 4-скорости, являющейся функцией координат x^i . Поэтому уравнение для гидродинамической 4-скорости /для которой мы сохраним то же обозначение/ получается из /2/ просто заменой $d/ds \rightarrow u^k \partial/\partial x^k$ и приводится к виду

$$u^k (u_{i;k} - \frac{e}{mc^2} g_{kl} F^{il}) = 0, \quad /4/$$

где

$$u_{i;k} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^i u^l$$

- ковариантная производная по x^k .

Определим обобщенную 4-скорость соотношением

$$U_i = u_i + \frac{e}{mc^2} A_i, \quad /5/$$

где A_i - 4-потенциал электромагнитного поля ($F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k}$). Тогда, учитывая равенство $u^i u_{i;k} = 0$, из /4/ нетрудно вывести уравнение

$$u^k (U_{i;k} - U_{k;i}) = 0, \quad /6/$$

* В локально-галилеевой системе отсчета.

являющееся общековариантной формой так называемого уравнения обобщенного вихря /8/. Это уравнение будет удовлетворено тождественно, если обобщенная 4-скорость представима в виде градиента скалярной функции

$$U_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}, \quad /7/$$

что мы и будем предполагать в дальнейшем. При нулевой скорости старта частиц для этого необходимо равенство нулю нормальной компоненты магнитной индукции и тангенциального электрического поля на поверхности эмиттера.

Соотношения /5/, /7/ позволяют выразить тензор электромагнитного поля через 4-скорость потока:

$$\frac{e}{mc^2} F_{ik} = u_{i;k} - u_{k;i}. \quad /8/$$

Представим плотность 4-тока в виде

$$\frac{4\pi e}{mc^3} j^i = \kappa^2 u^i, \quad /9/$$

где величина

$$\kappa^2 = \frac{4\pi |e|}{mc^3} \sqrt{j_i j^i} \quad /10/$$

пропорциональна скалярной плотности заряда.

Благодаря соотношениям /8/, /9/ уравнения электромагнитного поля /7/

$$F_{i;k}^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad /11/$$

могут рассматриваться как уравнения для 4-скорости потока

$$g^{kl} u_{i;k;l} - g^{ik} u_{i;k;l} = -\kappa^2 u^i, \quad /12/$$

которые являются общековариантной записью уравнений самосогласованной электродинамики /5/ и вместе с условием /3/ составляют полную систему уравнений, достаточную, в принципе, для определения характеристик потока. В псевдоевклидовом пространстве-времени, полагая $g_{00} = 1$, $g_{0i} = 0$, $i = 1, 2, 3$, $x^0 = ct$, эту систему можно представить в простой векторной форме*

* Вывод соответствующих уравнений для стационарного случая можно найти в /9/.

$$\text{rot rot } \vec{\eta} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\eta}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \gamma = -\kappa^2 \vec{\eta},$$

$$\Delta \gamma + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{\eta} = \kappa^2 \gamma,$$

$$\gamma^2 = 1 + \vec{\eta}^2. \quad /13/$$

Существенным недостатком данной системы является отсутствие уравнения, явно определяющего скалярную плотность κ^2 , что затрудняет как численное интегрирование этой системы, так и ее аналитическое исследование.

Переходя к выводу уравнения для скалярной плотности, прежде всего заметим, что из уравнения непрерывности $j_{;l}^l = 0$ можно найти дивергенцию 4-скорости:

$$u_{;l}^l = -u^l \frac{\partial \ln \kappa^2}{\partial x^l}, \quad /14/$$

где учтено, что ковариантная производная от скалярной величины есть частная производная по соответствующей координате. Понадобится также равенство $u_{;k;l} u^l = -u_{;l;k} u^l$, получаемое двойным дифференцированием /3/. Меняя теперь во втором слагаемом /12/ порядок дифференцирования по правилу /7/ $u_{;k;l} = u_{;l;k} + u^l R_{kl}$, где R_{kl} - тензор Риччи, и сворачивая /12/ с u_i , получим искомое уравнение

$$u^k \frac{\partial}{\partial x^k} (u^l \frac{\partial}{\partial x^l} \ln \kappa^2) + \kappa^2 = g^{kl} u_{;l} u^i_{;k} + u^k u^l R_{kl}. \quad /15/$$

Уравнения /12/, /15/ образуют полную систему уравнений для нахождения 4-скорости u^i и скалярной плотности потока κ^2 , равенство /3/ налагает связь на начальные значения компонент 4-скорости и может рассматриваться как интеграл этой системы.

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА

Ограничим дальнейшее рассмотрение случаем стационарного осесимметричного потока в евклидовом пространстве и введем ортогональную ($g_{ik} = -h_i^2 \delta_{ik}$) систему координат $q_i \equiv x^i$, $i = 1, 2, 3$, в которой поверхность $q_1 = 0$ совпадает с поверхностью эмиттера, а координата q_3 является азимутом, так что для всех физических величин $\partial/\partial q_3 = 0$. Требования евклидовости пространства и ортогональности координатной сетки сводятся к известным соотношениям для коэффициентов Ламе /3/

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right) = 0, \quad /16/$$

$$(\nabla h_3)^2 = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} \right)^2 = 1, \quad /17/$$

которые мы будем предполагать выполненными.

В формуле /17/ $\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial q_2}$ - двумерный оператор Гамильтона, $\vec{e}_{1,2}$ - единичные векторы, касательные к соответствующим координатным линиям.

Представим уравнения /13/ в развернутом виде, вводя функцию тока $\psi(q_1, q_2)$, связанную с азимутальным магнитным полем * $\psi = eh_3 B_3 / 2mc^2$ и равную отнесенному к $I_0 = mc^3/e$ ($|I_0| = 17$ кА для электронов) полному току через поверхность, ограниченную контуром $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$:

$$\kappa^2 \eta_1 = \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \quad \kappa^2 \eta_2 = -\frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \quad /18/$$

$$\frac{h_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3 \kappa^2} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3 \kappa^2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) \right] = \psi, \quad /19/$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3 \eta_3}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3 \eta_3}{\partial q_2} \right) \right] = \kappa^2 \eta_3, \quad /20/$$

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \gamma}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \gamma}{\partial q_2} \right) \right] = \kappa^2 \gamma. \quad /21/$$

Уравнение /15/ в рассматриваемом случае приобретает вид

$$\begin{aligned} (\vec{\eta} \nabla)^2 \ln \kappa^2 + \kappa^2 = & -(\nabla \gamma)^2 + (\nabla \eta_3)^2 + \frac{\eta_3^2}{h_3^2} + (\vec{\eta} \nabla \ln h_3)^2 + \\ & + \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial q_1} + \frac{\eta_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial q_2} - \frac{\eta_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial q_1} - \frac{\eta_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial q_2} + \frac{\eta_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right)^2. \end{aligned} \quad /22/$$

* Во избежание недоразумений здесь и далее используются только физические компоненты векторов.

Входящую в правую часть этого уравнения (через $\partial \eta_2 / \partial q_1$) вторую производную от ψ легко исключить с помощью /19/, так что система /19/-/22/ является нормальной системой уравнений второго порядка и допускает непосредственное пошаговое интегрирование. Нетрудно убедиться, что условия теоремы Коши-Ковалевской для этой системы, вообще говоря, не выполнены, так что число независимых граничных условий, задающих ее решение, должно устанавливаться специально. В любом случае оно не превосходит шести - при заданных значениях функций ψ, η_3, γ и их нормальных производных величины κ и $\partial \kappa / \partial q_1$ могут быть найдены из равенства /3/ и его производной по q_1 с использованием соотношений /18/, /19/.

В режиме ограничения пространственным зарядом /8/ на поверхности эмиттера $\eta_3 = 0, \gamma = 1, \partial \gamma / \partial q_1 = 0$. Из первых двух равенств, требования конечности ψ и уравнений /3/, /18/, /19/, /21/ с необходимостью следует $\partial \psi / \partial q_1 |_{q_1=0} = 0$, т.е., согласно /18/, равенство нулю тангенциальной составляющей плотности тока на эмиттере. Сама функция ψ связана с плотностью тока эмиссии

$$\psi |_{q_1=0} = \frac{2\pi}{I_0} \int_0^{q_2} j_3 h_2 h_3 dq_2, \quad /23/$$

и должна быть задана. В силу связи $\partial \eta_3 / \partial q_1 |_{q_1=0} = eh_1 B_2 / mc^2 |_{q_1=0}$ второй задаваемой величиной является компонента B_2 магнитного поля. Таким образом, в режиме ограничения пространственным зарядом решение внутренней задачи определяется /при выбранной форме эмиттера/ двумя произвольными функциями, заданными на его поверхности - плотностью тока эмиссии и составляющей B_2 магнитной индукции.

Вблизи эмиттера решение уравнений /18-22/ может быть найдено разложением в ряд по степеням величины

$$v = \left(\frac{3}{2} q_1 \right)^{1/3}, \quad /24/$$

/так называемое "антипараксиальное" приближение /10/. В случае сплошного пучка, анализом которого мы и ограничим дальнейшее рассмотрение, эти разложения имеют вид

$$\gamma = 1 + \frac{h_1^2 v^4}{2} \left[K_0 + \frac{2}{9} K_2 v^2 - 2 \left(K_3 + \frac{2}{3} K_0 \frac{\partial}{\partial q_1} \ln h_2 h_3 \right) v^3 + \dots \right],$$

$$\psi = \psi + \psi \frac{h_1^2}{6} K_0 v^4 + \left[\frac{h_1^2}{9} \psi K_2 - \frac{h_1 h_3}{30 h_2} K_0 \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1^2 \sqrt{K_0}) \right] v^6 + \dots, \quad /25/$$

$$\eta_3 = \frac{2eh_1 B_2}{3mc^2} v^3 \left(1 + \frac{4v^3}{9} \frac{\partial}{\partial q_1} \ln \frac{h_1}{h_2 h_3} + \frac{h_1^2}{14} K_0 v^4 + \dots \right),$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2v^2} (K_0 + K_2 v^2 + K_3 v^3 + \dots),$$

где

$$K_0(q_2) = \left(\frac{4}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right)^{2/3}, \quad K_2(q_2) = \frac{1}{5} \left[\left(\frac{eB_2}{mc^2} \right)^2 + \left(\frac{2\psi}{h_3} \right)^2 \right],$$

$$K_3(q_2) = -\frac{2}{45} K_0(q_2) \left(11 \frac{\partial}{\partial q_1} \ln h_2 h_3 + 5 \frac{\partial}{\partial q_1} \ln h_1 \right), \quad /26/$$

все величины /за исключением v / в правых частях равенств /25/, /26/ берутся при $q_1 = 0$. Изучение последующих членов разложений /25/ выявляет три важных обстоятельства: 1/ значения на оси всех производных функций Ламе, которые входят в коэффициент a_m ряда, определяющего форму эмиттера в цилиндрических координатах ($z = \sum_{m=1}^{\infty} a_m r^{2m}$), появляются в выражениях для $K_n(0)$, начиная с $n = 6m - 3$; 2/ значение производной $\partial^{2m} \psi / \partial q_2^{2m} |_{q_1=q_2=0}$ впервые встречается в коэффициенте $K_{6m-6}(0)$; 3/ в коэффициентах разложения продольного магнитного поля на оси /пропорционального $\partial \eta_3 / \partial q_2 |_{q_2=0}$ / производная $\partial^{2m+1} B_2 / \partial q_2^{2m+1} |_{q_1=q_2=0}$ присутствует, начиная с коэффициента при v^{6m+3} .

Ряды /25/ позволяют начать численное интегрирование системы /18-22/, отступив от эмиттера, где κ имеет особенность. Вычислительная неустойчивость, связанная с некорректностью задачи Коши для эллиптических уравнений, преодолевается с помощью техники аналитического продолжения /3/. При построенном решении внутренней задачи дальнейший синтез источника происходит согласно классической схеме /8/ - по линии тока $\psi = \text{const}$ вырезается интересующая часть потока, из непрерывности потенциалов и полей на границе следуют начальные условия для внешней задачи Коши, причем определению подлежит не только электрическое, но и магнитное поле вне пучка.

Рассмотренный алгоритм никак не включает требований к пучку на выходе источника - обычно это требование отсутствия пульсаций пучка на большом удалении от эмиттера, то есть требование асимптотического приближения решения системы /18/-/22/ к выбранному решению для одномерного бриллюэновского потока*. Однако затруднительно сформулировать какие-либо общие критерии регулярности решения данной системы в приосевой области, и тем более найти условия его выхода на бриллюэновский режим. В связи с этим целесообразно применение параксиальной теории для предварительного приближенного решения задачи.

* Наиболее общее решение одномерной задачи найдено В.Н.Даниловым /11/, обширная библиография по данному вопросу содержится в /12/.

3. ПАРАКСИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ СПЛОШНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПУЧКА

Согласно параксиальному методу^{/8/} все характеристики потока представляются в виде степенных рядов по величине поперечного смещения относительно выбранной опорной траектории, что позволяет свести задачу к решению бесконечной цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложений. Применение данной процедуры к негеометризованным уравнениям /18-22/ приводит к новой версии параксиальной теории, позволяющей эффективно решать задачу синтеза источников бриллиантовых потоков.

В случае сплошного осесимметричного пучка в качестве опорной траектории естественно выбрать ось пучка, при этом функции ψ , y , η_1 , κ , h_1 , h_2 раскладываются в ряд по четным степеням q_2 :

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(q_1) q_2^{2n+2}, \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(q_1) q_2^{2n}, \dots$$

а величины η_2, η_3, h_3 - по нечетным степеням:

$$\eta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{2n} q_2^{2n+1}, \dots$$

Координатную сетку построим так, чтобы $h_{10}(q_1) \equiv 1$, тогда тождества Ламе /16/, /17/ будут удовлетворены, если

$$h_{20} = h_{30} \equiv \lambda, \quad h_{21} - 3h_{31} = \frac{1}{2} \lambda \lambda'^2, \quad h_{11} = -\frac{1}{2} \lambda \lambda'', \quad /27/$$

где штрих означает дифференцирование по q_1 .

Для первых коэффициентов разложений из /3/, /18/ следуют соотношения

$$y_0^2 = 1 + \eta_{10}^2, \quad \psi_0 = \frac{1}{4} \eta_{10} \lambda^2 \kappa_0^2, \quad \eta_{20} = -\frac{2}{\lambda \kappa_0^2} \psi_0', \quad /28/$$

с помощью которых из /22/ получим уравнение, связывающее осевые значения продольного импульса, скалярной плотности и напряженности магнитного поля $b_0 = 2\eta_{30} / \lambda = -eV_{10} / mc^2$:

$$\frac{3 + \eta_{10}^2}{1 + \eta_{10}^2} \eta_{10}^2 = 2\kappa_0^2 - b_0^2 - 4\eta_{10}^2 \kappa_0 \left(\frac{1}{\kappa_0}\right)'', \quad /29/$$

Пренебрегая вариацией плотности заряда и продольной скорости по сечению пучка, можно положить

$$\kappa_0^2 \approx \frac{4I}{I_0 \eta_{10} R^2}, \quad /30/$$

где $I_0 = mc^3/e$, I - ток в пучке, R - его радиус. Подстановка /30/ в уравнение /29/ приводит к известному уравнению огибающей релятивистского ламинарного пучка^{/13/}. Подчеркнем, что уравнение

/29/ является точным, в то время как применимость уравнения огибающей ограничена приближенным характером соотношения /30/.

Считая первые коэффициенты разложений известными, из /18-21/ найдем

$$y_1 = \frac{1}{4} [y_0 \lambda^2 \kappa_0^2 - (\lambda^2 y_0')'],$$

$$\eta_{11} = -\eta_{10} h_{11} + \psi_0 - \left(\frac{\psi_0'}{\kappa_0^2}\right)', \quad \frac{2\psi_1}{\psi_0} = 2r + \frac{h_{21} + h_{31}}{\lambda} + \frac{\eta_{11}}{\eta_{10}}, \quad /31/$$

$$\eta_{31} = \frac{1}{8} [\eta_{30} \lambda^2 \kappa_0^2 - \lambda (\lambda \eta_{30})''] - \frac{1}{2} \eta_{30} (h_{11} + \frac{h_{31} - h_{21}}{\lambda}),$$

где обозначено $r = \kappa_1 / \kappa_0$. Из /22/ следует дифференциальное уравнение для r :

$$\eta_{10}^2 \kappa_0^2 \psi_0^2 \left(\frac{r'}{\kappa_0^2 \psi_0^2}\right)' + \kappa_0^2 [1 - \eta_{10}^2 \psi_0 \left(\frac{\chi}{\kappa_0^2 \psi_0}\right)'] r =$$

$$= -y_0' (y_1' - y_0' h_{11}') - \frac{2y_1^2}{\lambda^2} + \frac{1}{8} [b_0^2 \lambda^2 \kappa_0^2 + \lambda^2 b_0'^2 - b_0 (\lambda^2 b_0')'] +$$

$$+ \eta_{10} (\eta_{11} - \eta_{10} h_{11}) [2\kappa_0 \left(\frac{1}{\kappa_0}\right)'' + \sigma \chi] + \eta_{10}^2 \sigma (h_{11}' - \chi h_{11}') +$$

$$+ \frac{3}{2} \eta_{10}' (\eta_{11}' - \eta_{10}' h_{11}' - \eta_{10} h_{11}'' \chi) + \frac{2}{\lambda^2} (\eta_{11} + \frac{1}{4} \eta_{10} \lambda \lambda' \chi)^2 + \quad /32/$$

$$+ \frac{2}{\lambda^2} (\eta_{11} + \frac{1}{4} \eta_{10} \lambda \lambda' \chi - \psi_0)^2,$$

где $\chi = \psi_0' / \psi_0$, $\sigma = \kappa_0' / \kappa_0$. В принципе цепочку уравнений для параксиальных коэффициентов можно продолжить, однако практически это вряд ли целесообразно ввиду увеличения порядка производных, входящих в уравнения для κ_n , что приводит к резкому снижению точности при численном расчете в высших приближениях.

Для построения решения внутренней задачи необходимо конкретизировать вид двух из трех входящих в уравнение /29/ функций. Оптимальный подход подсказывает сама форма уравнения /29/ - относительно η_{10} это дифференциальное уравнение первого порядка, поэтому, если функции $\kappa_0(q_1)$, $b_0(q_1)$ обеспечивают неотрицательность правой части /29/ при всех q_1 и стремятся при $q_1 \rightarrow \infty$ к постоянным значениям $\kappa_{ог} = |b_{ог}| / \sqrt{2}$, то η_{10} выходит на согласованное конечное значение не испытывая осцилляций.

Вид функций $\kappa_0(q_1)$, $b_0(q_1)$ не является совершенно произвольным. Как следует из /25/, условия на эмиттере $\dot{\eta} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial q_1} = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} = 0$

жестко регламентируют значения некоторых коэффициентов в разложении этих функций по степеням параметра ν , однако величины $K_{3m}(0)$ и коэффициенты при ν^{6m+3} в разложении b_0 можно варьировать. В соответствии с отмечавшимися свойствами антипараксиальных коэффициентов выбор $K_{6m-3}(0)$ фиксирует значение коэффициента формы эмиттера a_m , выбор $K_{6m}(0)$ определяет производную

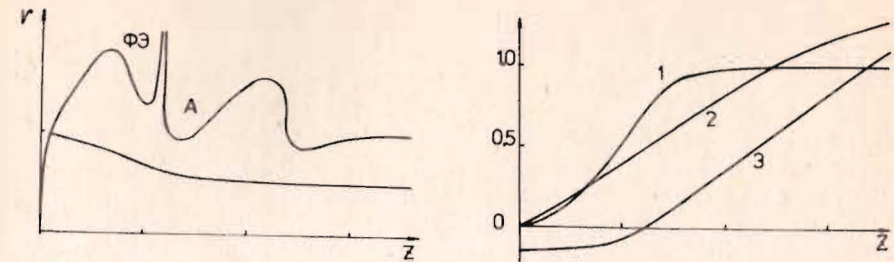
$\partial^{2m} j_z(q_2) / \partial q_2^{2m} |_{q_2=0}$ плотности тока эмиссии, а спецификация свободных коэффициентов в разложении b_0 задает распределение компоненты $B_2(q_2)$ магнитной индукции на эмиттере.

Асимптотическое поведение b_0 и κ_0 при больших q_1 можно выяснить, заметив, что после входа пучка в апертуру потенциального электрода его энергия быстро достигает конечного значения γ_{of} /которое будем считать заданным/. Соответственно функции b_0 и κ_0 должны удовлетворять уравнению /29/ с равной нулю левой частью, так что задав одну из них /например, b_0 / и потребовав выполнения условий согласования $\kappa_{of} = |b_{of}| / \sqrt{2}$, $\kappa'_{of} = 0$, легко найти другую. Плавность сопряжения антипараксиальных разложений с асимптотической формой функций b_0 , κ_0 достигается надлежащим выбором свободных коэффициентов.

При построенном решении в первом порядке параксиальной теории решения в высших порядках определены однозначно. В асимптотике они являются функциями, осциллирующими относительно равновесных бриллюэновских значений. Период колебаний функции τ равен $2\pi\eta_{10f} / \kappa_{of}$. Ее среднее значение - $\kappa_{of}^2 \lambda_f^2 / 8$. Пользуясь известной свободой при построении управляющих функций $\kappa_0(q_1)$, $b_0(q_1)$, можно добиться малости амплитуды этих колебаний.

Способ построения решения в первом параксиальном приближении с подбором одного свободного коэффициента * $K_6(0)$ при заданном профиле магнитного поля и фиксированной кривизне эмиттера детально обсуждался в /14/. На рисунке приведен пример выполненного этим способом расчета источника электронного пучка с параметрами $I = 500$ А, $\gamma_{of} = 2$, при конечном значении магнитной индукции $B_{10} \cdot R_c = 12.4$ Гс·м, и радиусе кривизны катода, равном шести его радиусам R_c . Форма электродов и граница пучка представлены на рисунке, кривая 1 на правом графике показывает распределение нормированного потенциала $(\gamma_0 - 1)$ на оси пучка, кривая 2 - выбранную зависимость магнитного поля $b_0(z)$, ($b_{of} = 1.5$), кривая 3 - относительную поправку второго порядка τq_{2b}^2 к величине κ на границе пучка ($q_2 = q_{2b}$). Из сравнения с результатами расчетов для плоского катода /14/ следует, что даже незначительная кривизна эмиттера заметно ослабляет ограничение на ток пучка, связанное с возможностью его попадания на электроды, так что основную роль играет требование малости отклонений от параксиальности.

* Вариация $K_0(0)$ сводится в первом порядке к преобразованию подобия.



Анализ рисунка показывает, что вследствие большой величины третьей производной в точке перегиба функции $\gamma_0(z)$ происходит ударное возбуждение колебаний величины τ /для данного варианта амплитудное значение $\tau q_{2b}^2 \approx 1.5$ на два порядка превосходит равновесное бриллюэновское значение/. Для уменьшения непараксиальности следует использовать большее число свободных коэффициентов при построении решения в первом приближении.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Система уравнений самосогласованной электродинамики, включающая уравнение для скалярной плотности заряда, пригодна для решения широкого круга задач, связанных с вопросами формирования и устойчивости ламинарных потоков заряженных частиц. Развита на ее основе параксиальная теория дает эффективный метод синтеза источников сплошных бриллюэновских потоков, допускающий обобщение и на случай полых релятивистских пучков.

Автор глубоко благодарен Э.А.Перельштейну и В.А. Сыровому за стимулирующие обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчаров В.Т. ДАН СССР, 1956, 107, с.47.
2. Lucas A.R., Meltzer B., Stuart G.A. J. Electron. Control, 1958, 4, p.160.
3. Colburn D.S., Harker K.J., Kino G.S. In: Microwaves. Proc. 4th Intern. Congress on Microwave Tubes. Centrex, Eindhoven, 1963, p.572.
4. Сыровой В.А. ЖТФ, 1982, 52, с.625.
5. Buneman O. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1954, 50, p.77.
6. Данилов В.Н. В сб.: Методы расчета электронно-оптических систем. "Наука", М., 1977, с.61.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. "Наука", М., 1967.

8. Молоковский С.И., Сушков А.Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. "Энергия", Л., 1972.
9. Абрамян Е.А., Альтеркоп Б.А., Кулешов Г.Д. Интенсивные электронные пучки. Энергоатомиздат, М., 1984, с.11.
10. Данилов В.Н., Сыровой В.А. В сб.: Методы расчета электронно-оптических систем. "Наука", М., 1977, с.87.
11. Данилов В.Н. Радиотехника и электроника. 1966, 11, с.1994.
12. Reiser M. Phys. Fluids, 1977, 20, p.477.
13. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц. "Мир", М., 1980.
14. Алексахин Ю.И. ОИЯИ, Р9-84-619, Дубна, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 апреля 1985 года

Алексахин Ю.И.

P9-85-271

О релятивистской теории формирования ламинарных потоков пространственного заряда

Система уравнений "самосогласованной электродинамики" О.Бунемана, описывающая безвихревые ламинарные потоки, дополнена уравнением для скалярной плотности заряда. Сформулирован негеометризованный подход к задаче формирования осесимметричных бриллюэновских потоков. Используя параксиальное разложение, развит метод синтеза источников сплошных бриллюэновских пучков. Приведен пример расчета в первом параксиальном приближении.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой

Alexahin Yu.I.

P9-85-271

On the Relativistic Theory of Forming the Space Charge Laminar Flow

The set of equations of O.Buneman's "self-consistent electrodynamics" which describes the non-vortical laminar flow, is completed with an equation for the charge scalar density. A non-geometrical approach to the problem of forming the axially symmetric Brillouin flow is formulated. Based on paraxial expansion, a synthesis method for the design of solid Brillouin flow sources is developed. An example of computation in the first paraxial approximation is given.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985