

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



26/2-75

С353а  
Ш-339

P9 - 8478

А.Б.Швачка, Э.И.Уразаков

1930/2-75

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
НА ПРОДОЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ  
КОЛЬЦЕВОМ ЗАРЯЖЕННОМ СГУСТКЕ  
В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

**1975**

P9 - 8478

А.Б.Швачка,\* Э.И.Уразаков\*

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
НА ПРОДОЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ  
КОЛЬЦЕВОМ ЗАРЯЖЕННОМ СГУСТКЕ  
В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

---

\* НИИЯФ МГУ.



## 1. Введение

Настоящее сообщение является продолжением цикла работ по численному исследованию рассеяния электромагнитных волн на кольцевых изотропных ступках в цилиндрическом волноводе /1-6/.

В работе /1/ решена в общем виде задача о рассеянии волноводных волн на кольцевом плазменном ступке. Как показано в /2/, стационарный процесс рассеяния электромагнитных волн на ограниченном ступке описывается системой линейных дифференциальных уравнений для амплитуд полей волн. Расчет коэффициентов рассеяния электромагнитных волн на кольцевом ступке частиц и их анализ в зависимости от параметров волны и ступки приведен в /3/. В работах /5,6/ описано математическое обеспечение для численного исследования взаимодействия электромагнитных волн с заряженными ступками в цилиндрическом волноводе. Задача о рассеянии электромагнитных волн на кольцевом продольно-однородном заряженном ступке решена в /4/. Настоящая работа посвящена численному исследованию рассеяния электромагнитных волн на неоднородном по оси  $Z$  циркулярном ступке, помещенном в круглый волновод: выполнен расчет коэффициентов рассеяния /3/ и проанализированы результаты численного интегрирования системы уравнений для амплитуд рассеянных волн.

## 2. Постановка задачи

Задача о рассеянии электромагнитных волн на неоднородном по оси  $Z$  заряженном ступке ставится и решается аналогично задаче о рассеянии волн на однородном по  $Z$  ступке /4/. Отличие состоит лишь в том, что коэффициенты системы уравнений для амплитуд в слу-

чае неоднородного по  $\bar{z}$  сгустка содержат дополнительные слагаемые, которые обращаются в нуль для однородного сгустка.

Электромагнитное поле круглого волновода, представленное в виде ТЕ - или ТМ-волн, набегаёт из вакуума на кольцевой сгусток зарядов с заданными характеристиками  $\varepsilon(r, z)$ ,  $\sigma(r, z)$ ,  $\mu(r, z)$  (обозначения те же, что и в /4/). Сгусток имеет конечные размеры по  $r$  и  $\bar{z}$  и расположен симметрично относительно оси волновода. Требуется найти распределение поля в волноводе при наличии в нем азимутально-симметричного, но неоднородного по  $\bar{z}$  сгустка зарядов.

Система уравнений для амплитуд волн, рассеиваемых на сгустке, имеет вид

$$\frac{df_j}{d\bar{z}} = -\frac{1}{2w_j} \left[ \sum_{n=1}^j (A_{jn}^{zz} f_n - A_{jn}^{zz} \frac{df_n}{d\bar{z}}) + i \sum_{n=1}^j (A_{jn}^{zm} g_n - A_{jn}^{zm} \frac{dg_n}{d\bar{z}}) \right], \quad (I)$$

$$\frac{dg_j}{d\bar{z}} = -\frac{1}{2w_j} \left[ \sum_{n=1}^j (A_{jn}^{mm} g_n - A_{jn}^{mm} \frac{dg_n}{d\bar{z}}) - i \sum_{n=1}^j (A_{jn}^{mz} f_n - A_{jn}^{mz} \frac{df_n}{d\bar{z}}) \right].$$

Выражения для коэффициентов системы (I) в общем случае приведены в /1/.

### 3. Расчет коэффициентов рассеяния

Коэффициенты системы уравнений для амплитуд являются функциями электромагнитных свойств сгустка, а также волновых векторов падающих и рассеянных волн.

При рассеянии волн на кольцевом азимутально-симметричном неоднородном по  $\bar{z}$  сгустке коэффициенты системы уравнений (I) имеют

Вид:

$$A_{jn}^{zz} = \left\{ w_j^2 w_n^2 I_{\sigma_{1jn}}^{zz} - \frac{d}{d\bar{z}} (w_n^2 I_{\varepsilon_{1jn}}^{zz} + w_j^2 I_{\mu_{1jn}}^{zz}) + w_j^2 w_n^2 I_{\sigma_{2jn}}^{zz} + w_j^2 \frac{d}{d\bar{z}} I_{\mu_{2jn}}^{zz} + i \left[ (v_j^{zz} + w_j^2 w_n^2) (I_{\varepsilon_{1jn}}^{zz} - I_{\mu_{1jn}}^{zz}) + (w_n^2 + w_j^2 w_n^2) I_{\varepsilon_{2jn}}^{zz} - (v_j^{zz} + w_j^2 w_n^2) I_{\mu_{2jn}}^{zz} \right] \right\} e_{nj}^{zz},$$

$$A_{jn}^{zm} = \left\{ w_j^2 (I_{\mu_{1jn}}^{zm} + I_{\mu_{2jn}}^{zm}) + w_n^2 I_{\varepsilon_{1jn}}^{zm} \right\} e_{nj}^{zm},$$

$$A_{jn}^{mm} = \left\{ p \left[ k w_j^2 I_{\sigma_{2jn}}^{mm} - \frac{w_j^2 w_n^2}{k} \frac{d}{d\bar{z}} I_{\mu_{2jn}}^{mm} \right] + i p \left[ k (w_j^2 + w_n^2) I_{\varepsilon_{2jn}}^{mm} - \frac{w_n^2}{k} (v_j^{mm} + w_j^2 w_n^2) I_{\mu_{2jn}}^{mm} \right] \right\} e_{nj}^{mm},$$

$$A_{jn}^{zm} = p \cdot \frac{w_j^2 w_n^2}{k} I_{\mu_{2jn}}^{zm} \cdot e_{nj}^{zm},$$

$$A_{jn}^{mm} = \left\{ k^2 [I_{\varepsilon_{1jn}}^{mm} + I_{\sigma_{2jn}}^{mm}] - w_n^2 \frac{d}{d\bar{z}} [I_{\mu_{1jn}}^{mm} + I_{\mu_{2jn}}^{mm}] + i \left[ k^2 (I_{\varepsilon_{1jn}}^{mm} + I_{\sigma_{2jn}}^{mm} - I_{\mu_{1jn}}^{mm}) - w_n^2 I_{\mu_{2jn}}^{mm} \right] \right\} e_{nj}^{mm},$$

$$A_{jn}^{mm} = \left\{ w_n^2 (I_{\mu_{1jn}}^{mm} + I_{\mu_{2jn}}^{mm}) \right\} e_{nj}^{mm},$$

$$A_{jn}^{mz} = \left\{ p \cdot k \cdot \left[ w_n^2 I_{\sigma_{2jn}}^{mz} - \frac{d}{d\bar{z}} I_{\mu_{2jn}}^{mz} + i \cdot w_n^2 (I_{\varepsilon_{2jn}}^{mz} - I_{\mu_{2jn}}^{mz}) \right] \right\} e_{nj}^{mz},$$

$$A_{jn}^{mz} = p \cdot k \cdot I_{\mu_{2jn}}^{mz} \cdot e_{nj}^{mz}. \quad (2)$$

Используем безразмерные переменные  $\bar{z}' = \bar{z} \cdot l^{-1}$ ,  $v' = va$ , при этом безразмерный продольный волновой вектор вычисляется по формулам

$$w_j^{z'} = \sqrt{\frac{\omega^2 a^2}{c^2} \varepsilon \mu - (v_j^{z'})^2}, \quad (3)$$

$$w_j^{m'} = \sqrt{\frac{\omega^2 a^2}{c^2} \varepsilon \mu - (v_j^{m'})^2}.$$

Зависимость параметров сгустка  $\varepsilon(r, z)$  /7/ и  $\mu(r, z)$  от переменной  $\bar{z}$  зададим в виде

$$\varepsilon(r, z) = |\varepsilon| (1.01 + \sin(\alpha' \bar{z}')), \quad (4)$$

$$\mu(r, z) = |\mu| (1.01 + \sin(\alpha' \bar{z}')).$$

При дифференцировании интегралов рассеяния /3/ по переменной  $\bar{z}$  следует учесть, что от  $\bar{z}$  зависят лишь безразмерные комбинации  $1 - \varepsilon$ ,  $1 - \frac{1}{\mu}$ ,  $\frac{4\pi}{kc} \sigma$ , входящие в интегралы рассеяния. Расчет интегралов рассеяния произведен с помощью программы MAIN/6/ на ЭМ СДС-1604А.

Для численного интегрирования системы уравнений (I) необходимо на каждом шаге по переменной  $\bar{z}$  вычислять коэффициенты рассеяния (2).

#### 4. Численное интегрирование системы уравнений для амплитуд и обсуждение результатов

Численное интегрирование системы уравнений для амплитуд осуществлялось с помощью программы PARAMP /6/ на ЭВМ СДС-1604А.

Для выяснения характера взаимодействия электромагнитных волн с заряженным продольно-неоднородным ступком в круглом волноводе ( $a = 5$  см) система (I) решалась при различных значениях параметров ступка и падающих волн.

При расчетах рассматривались кольцевые ступки со следующими параметрами:  $n = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $\omega_0^2 = 3 \cdot 10^{22} \text{ сек}^{-1}$ ,  $la^{-1} = 10^{-2} \div 10^{-1}$ ,  $|\epsilon| = 0.6$ ,  $|\mu| = 1.1$ ,  $|\bar{\sigma}| = 6 \cdot 10^{-1} \div 6 \cdot 10^3$  ( $\frac{4\pi}{\kappa^2} \bar{\sigma} = |\bar{\sigma}'| / (1.01 + \sin(\bar{\sigma}' z'))$ ). Параметры падающих волн:  $p = 1 \div 5$ ,  $i = 1 \div 3$ ,  $\omega^2 = 8 \cdot 10^{22} \text{ сек}^{-1}$ .

Как и в /4/, в качестве кольцевого ступка последовательно выбиралось тонкое кольцо вблизи оси и вблизи стенок волновода.

Система (I) решалась при различных краевых условиях, что позволило моделировать случай слабого и сильного затухания волн в ступке.

В основном рассматривались кольцевые ступки с малой длиной ( $la^{-1} = 10^{-2}$ ), что соответствует экспериментально выбранной конфигурации электронных колец в ускорителе Векслера-Саранцева /8,9/.

Полученные данные о характеристиках полей волн указывают на следующее:

а) Обнаружено явление пространственной фокусировки волноводных полей за счет рассеяния электромагнитных волн на ступках, помещенных в резонансную систему (круглый волновод). Эта фокусировка объясняется следующим: сначала, за счет возникновения резонанса /4/,

наблюдается накачка электромагнитной энергии в область, занятую ступком. Далее, за счет продольной неоднородности среды (в направлении оси  $z$ ) происходит дополнительная диссипация энергии электромагнитного поля, что и приводит к локализации объема с большим значением напряженности электромагнитного поля (поле концентрируется в некоторой области внутри ступка, см.рис.1).

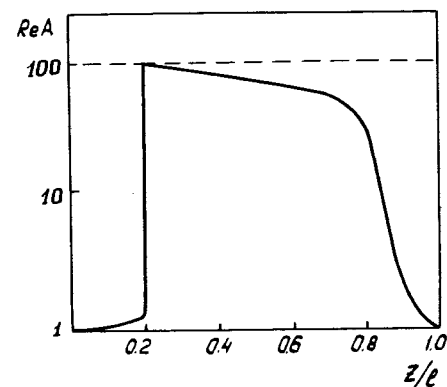


Рис. 1. Зависимость амплитуды волны  $E_{II}$  от продольной координаты ( $z/e$ ) ступка.

Этот эффект подобен явлению самофокусировки полей волн в нелинейных средах, хотя природа их различна. Как известно, самофокусировка полей в нелинейных средах вызывается взаимодействием нескольких гармоник, возникших за счет нелинейности среды, в то время как пространственная локализация энергии электромагнитного поля в ли-

нейных неоднородных средах вызывается возникновением резонанса.

б) Наряду с этим обнаружены неустойчивости (колебательные и аperiodические) амплитуды рассеянного поля (см. Приложение, рис.2), сопровождающие резонансную накачку энергии электромагнитного поля в ступок. Это явление характеризуется небольшим немонотонным изменением фазы волны, в отличие от резонанса, когда фаза претерпевает скачок порядка  $\pi/2$ .

Типичная картина колебательных неустойчивостей при рассеянии ТЕ - ТМ-волн показана на рис.2, где приведена зависимость от  $Z'$  амплитуды рассеянной ТЕ-волны ( $p=1, j=1$ ) на ступке с параметрами  $\chi_d = 0,85; d = 0,1a; |\epsilon| = 0,6; |\mu| = 1,1; |\bar{\sigma}| = 6 \cdot 10^3; \alpha' = 0,6; \beta \bar{a}' = 10^{-2}$ .

С ростом проводимости ступка затухание волн в ступке усиливается. При дальнейшем увеличении проводимости ступка наблюдаются резонансы, сопровождаемые колебательными явлениями (неустойчивости). Особенно ярко неустойчивости выражены при  $|\bar{\sigma}| = 6 \cdot 10^3$  (ступок с очень большим током проводимости). Минимальная величина проводимости, при которой возникает неустойчивости волн в ступке, составляет для упомянутого выше ступка  $9 \cdot 10^2$ .

Как видно из рис. 2, вначале развивается колебательная неустойчивость, переходящая затем в аperiodическую неустойчивость. Это явление наблюдается для всех волн и для всех рассматриваемых ступков при  $|\bar{\sigma}| > \bar{\sigma}_{кр}$ . При значениях  $|\bar{\sigma}|$ , близких к  $\bar{\sigma}_{кр}$  ( $|\bar{\sigma}| \leq \bar{\sigma}_{кр}, \text{Im} f_j \ll \text{Re} f_j$ ), мнимая часть амплитуды рассеяния меняет знак внутри ступка и затем растет, иногда достигая на конце ступка величины  $|\text{Re} f_j|$ .

в) Кольцевой продольно-неоднородный ступок, находящийся вблизи оси волновода, имеет сильно выраженные резонансные свойства /4/ и является менее устойчивым, чем кольцевой ступок, находящийся у стенок волновода (при этом параметры ступков  $|\epsilon|, |\mu|, |\bar{\sigma}|$  и падающие волны одни и те же). Так, при падении на циркулярный ступок с  $\chi_d = 0,85; d = 0,1a; \beta \bar{a}' = 0,01; \alpha' = 0,6$  и параметрами  $|\epsilon| = 0,6; |\mu| = 1,1; |\bar{\sigma}| = 0,6$  волноводных волн (ТЕ - или ТМ-типа) с  $p=1, j=1+3$  резонансные и колебательные явления не наблюдаются. В то же время такой же кольцевой продольно-неоднородный ступок у оси волновода ( $\chi_d = 0,15; d = 0,1a$ ) при рассеянии указанных волн испытывает резонансную накачку энергии электромагнитного поля (резонансный рост амплитуды при  $Z' = 0,59$ , где  $Z'$  - продольная координата ступка,  $0 \leq Z' \leq 1$ ).

В начале резонанса (на 2-3 шагах интегрирования) наблюдается медленный рост амплитуды, затем наступает насыщение (резонанс). То же самое относится и к фазе рассеянной волны.

г) Ступок, расположенный у оси волновода, при рассеянии высших несимметричных волн ТЕ- и ТМ-типов более устойчив, чем при рассеянии волн с  $p=0$  и  $p=1$ . Так, ступок с электрической проводимостью  $|\bar{\sigma}|$  в пределах от  $6 \cdot 10^{-1}$  до  $6 \cdot 10^2$  устойчив при рассеянии волн с  $p=5$ , в то время как при рассеянии волны с  $p=1$  на этом же ступке наблюдается резонанс и возникает колебательные и аperiodические неустойчивости.

Для волн с  $p > 1$  резонанс амплитуды выражен слабо, в то время как фаза испытывает резонансный скачок, причем  $|\bar{\sigma}| \leq 8$  для волн с  $p=5$  при  $\alpha' = 0,6$  (ступок расположен у стенок волновода).

д) При рассеянии волн на кольцевом ступке, расположенном у

оси волновода, локализация резонанса и неустойчивостей зависит от продольной (по оси  $z$ ) неоднородности ступка: чем больше модуляция ступка по  $z$ , тем раньше наступают указанные явления. Так, при  $\alpha' = 3,14$  резонанс возник при  $z' = 0,12$ ; при  $\alpha' = 1,57$   $z' = 0,24$ ; при  $\alpha' = 0,79$   $z' = 0,45$ ; при  $\alpha' = 0,6$   $z' = 0,6$ .

На рис. 3 (см. Приложение) показано поведение амплитуды ТЕ-волны по длине ступка в зависимости от его модуляции. Видно, что при  $\alpha' > 1$  наряду с резонансами возникают неустойчивости. Чем больше  $\alpha'$ , тем раньше (при меньших значениях  $z'$ ) возникают резонансы и неустойчивости.

е) "Резонансная длина" (координата  $z'_{рез}$ , при которой наблюдается резонанс) для ступка у оси с параметрами  $|\bar{\sigma}| = 0,6$ ,  $|\epsilon| = 0,6$ ,  $|\bar{\mu}| = 1,1$ ;  $\alpha' = 0,6$ ;  $\nu \bar{a}^{-1} = 0,01$  при падении на него волноводных ТЕ- и ТМ-волн с  $p = 1$ ,  $j = 1, 3$  с увеличением входного (при  $z' = 0$ ) отношения мнимой части к реальной части амплитуды  $\frac{Im f_j}{Re f_j}$  растет, что видно из таблицы I.

Таблица I

$\frac{Im f_j}{Re f_j}$	1,00	0,866	0,707	0,5	0,01
$z'_{рез}$	0,01	0,5	0,707	0,866	1,00
$z'_{рез}$	0,60	0,45	0,41	0,37	-

Резонансные свойства максимально выражены для волн с  $Im f_j \geq Re f_j$ . При этом, если  $Im f_j \gg Re f_j$ , то резонансы сопровождаются колебательными явлениями, что соответствует физической интерпретации явления. Волны, входящие в ступок, для которого выполняется условие  $Im f_j \gg Re f_j$ , распространяются в нем под углом к оси  $z$ , близким к  $\frac{\pi}{2}$ , поэтому именно такие волны инициируют возникновение резонансов.

Резонансу амплитуды предшествует резкий рост (выброс) как реальной, так и мнимой частей амплитуды рассеянной волны.

ж) В ступках с малой длиной ("короткие" ступки) резонансные явления и неустойчивости при рассеянии ТЕ- и ТМ-волн, как правило, не развиваются. Расчет показывает, что при рассеянии любых волноводных волн с  $p = 0, 5$  ступки с  $\nu \bar{a}^{-1} < 10^{-2}$  устойчивы и резонансы не наблюдаются.

Необходимо отметить, что при рассеянии ТЕ- и ТМ-волн с совпадающими радиальными индексами модули и фазы их изменяются по длине ступка противоположным образом. При заданном наборе параметров волны и ступка с увеличением модуля и фазы ТЕ-волны наблюдается уменьшение модуля и фазы ТМ-волны вдоль ступка и наоборот.

## 5. Заключение

В результате проведенных численных исследований рассеяния волноводных волн на неоднородном по  $z$  кольцевом ступке, помещенном в круглый волновод, обнаружено явление пространственной фокусировки электромагнитного поля; наряду с резонансом наблюдаются неустойчивости (колебательные и аperiodические) амплитуды рассеянного поля.

Проанализировано рассеяние волн (ТЕ- и ТМ-типов) на кольцевых ступках с продольной неоднородностью для различных параметров волн и ступка (при расчетах варьировались параметры:  $\nu \bar{a}^{-1}$ ,  $\alpha'$ ,  $|\bar{\sigma}|$ ,  $\chi_4$ ,  $d$ ,  $p$ ,  $j, k$ ,  $Im f_j$ ,  $Re f_j$ ).

Выяснена область изменения параметров, в которой ступок устойчив, что важно знать при радиационном ускорении ступков с токами и зарядами.

Полученные результаты могут быть приложены к радиальной фокусировке пучков в поле волны  $H_{01}^{II}$ . Как указано в работе /10/, для фокусировки заряженных частиц в пучке ( $\beta\gamma = 5$ ) требуется, чтобы

$$E_0 > \frac{16\pi m_0 c \beta}{5e},$$

где  $E_0$  - минимальное значение поля, которое необходимо для фокусировки. Это условие выполняется для рассматриваемых величин  $|\bar{\sigma}|$  при значениях  $E_0$ , соответствующих резонансу.

За счет резонанса поля и его пространственной локализации может быть осуществлено пространственное разделение кольцевого ступка на ступки с малыми продольными размерами.

В заключение авторы выражают благодарность участникам семинара ОНМУ ОИЯИ за полезные обсуждения.

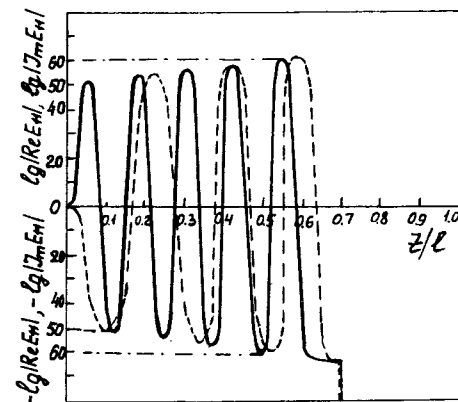


Рис. 2. Зависимость амплитуды волны  $E_{II}$  от продольной координаты ( $z'$ ) ступка. Параметры ступка:  $\chi_u = 0,85$ ;  $d = 0,1a$ ;  $|\bar{\sigma}| = 6 \cdot 10^3$ ;  $|\epsilon| = 0,6$ ;  $|\mu| = 1,1$ ;  $l\bar{a}^1 = 10^{-2}$ ;  $z' = 0,6$ .

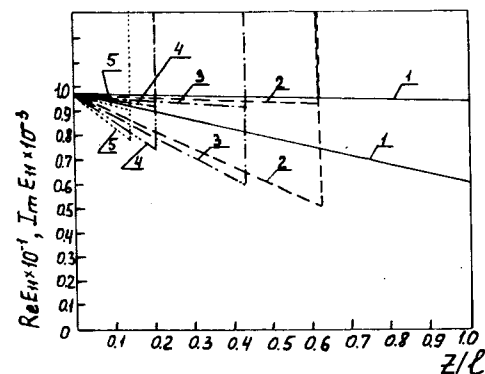


Рис. 3. Зависимость амплитуды волны  $E_{II}$  от продольной модуляции ступка. Параметры ступка:  $\chi_u = 0,15$ ;  $d = 0,1a$ ;  $|\bar{\sigma}| = 6 \cdot 10^{-1}$ ;  $|\epsilon| = 0,6$ ;  $|\mu| = 1,1$ ;  $l\bar{a}^1 = 10^{-2}$ .  
1 -  $z' = 0,1$ ; 2 -  $z' = 0,6$ ; 3 -  $z' = 0,78$ ;  
4 -  $z' = 1,57$ ; 5 -  $z' = 3,14$ .



### Литература

1. А.Ш.Иркегулов, Э.И.Уразаков, А.Б.Швачка, О.А.Швачка. ОИЯИ, 9-7903, Дубна, 1974.
2. А.Ш.Иркегулов, Э.И.Уразаков, А.Б.Швачка. Совещание по программированию и математическим методам решения физических задач, ОИЯИ, 10-7707, Дубна, 1973.
3. А.Ш.Иркегулов, Э.И.Уразаков, А.Б.Швачка, О.А.Швачка. ОИЯИ, Р9-7951, Дубна, 1974.
4. А.Б.Швачка, Э.И.Уразаков. ОИЯИ, Р9-8477, Дубна, 1975.
5. Е.П.Жидков, А.Б.Швачка. ОИЯИ, Р11-8306, Дубна, 1974.
6. Е.П.Жидков, А.Б.Швачка. ОИЯИ, Р11-8307, Дубна, 1974.
7. В.Л.Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме. "Наука", М., 1967.
8. В.И.Векслер, В.П.Саранцев и др. ОИЯИ, Р9-3440-2, Дубна, 1968.
9. М.С.Рабинович, В.Н.Цытович. Коллективные ускорения частиц в плазме. Труды ФИАН, т.66. "Наука", 1973.
10. К.А.Решетникова. ОИЯИ, 9-8120, Дубна, 1974.
11. К.Ф.Сергейчев, И.Р.Геккер. Труды ФИАН, т.73. "Наука", 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел

16 января 1975 г.