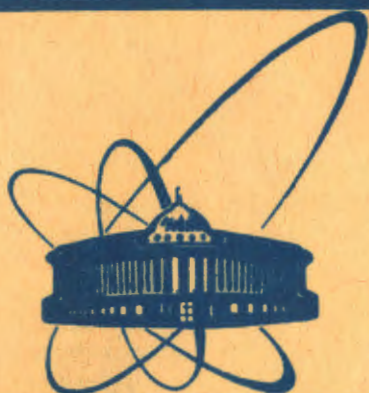


9/IV-84



**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

1796/84

P9-83-920

Н.Ю.Казаринов, А.С.Щеулин

**УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАННОЙ ИНЖЕКЦИИ
ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА
В АДГЕЗАТОР КОЛЛЕКТИВНОГО УСКОРИТЕЛЯ**

1983

В прототипе коллективного ускорителя тяжелых ионов ОИЯИ /ПКУТИ/ принята однооборотная схема инжекции электронного пучка в камеру адгезатора с подавлением когерентных радиальных бетатронных колебаний при помощи специального устройства - корректора траектории /1/. В этом устройстве, представляющем собой полосковую линию, возбуждается ТЕМ-волна, создающая на время первого оборота локальное эффективное искажение магнитного поля на радиусе захвата вблизи первого узла радиальных бетатронных колебаний. Амплитуда искажения выбирается так, чтобы центр масс электронного пучка без колебаний выводился на равновесную орбиту.

Подобная схема инжекции рассматривалась в /2,3/, однако при этом электромагнитное поле корректора считалось пространственно-однородным. В действительности оно является существенно неоднородным /4/, что оказывает достаточно сильное влияние на поведение пучка на первом обороте и, в конечном итоге, на количество захваченных частиц в кольце и его размеры.

В настоящей работе на основе метода моментов функции распределения /5/ анализируется поведение сходящегося пучка на первом обороте, рассматривается возможность осуществления согласованной инжекции, а также находится аксептанс адгезатора.

1. Получим уравнения, определяющие изменение в процессе инжекции координат центра масс пучка и его среднеквадратичных размеров. При построении этой системы предположим, что распределение электромагнитного поля корректора линейно по радиусу /в цилиндрической системе координат (r, θ, z) /:

$$\frac{1}{\beta} E_r + B_z = \Delta V (1 + \lambda x); \quad \frac{1}{\beta} E_z + B_r = -\Delta V \lambda z, \quad /1/$$

где $\bar{\beta} = \bar{v}/c$ - средняя относительная скорость частиц в пучке;

$\frac{1}{\beta} E_r + B_z$ - индукция эффективного магнитного поля ТЕМ-волны;

$x = r - r_0$ - отклонение радиуса частицы от равновесного.

В данном предположении поведение координат центра масс пучка описывается уравнениями

$$\frac{d^2 \bar{x}}{ds^2} + k_x^2 \bar{x} = -\frac{1}{r_0} b \phi(s), \quad /2a/$$

$$\frac{d^2 \bar{z}}{ds^2} + k_z^2 \bar{z} = 0. \quad /2b/$$

Здесь использованы следующие обозначения: $b = \Delta V / V_0$; V_0 - равновесное значение индукции магнитного поля; $s = r_0 \theta$;

$$k_x^2 = \frac{1-n}{r_0^2} + \frac{1}{r_0} \lambda b \phi(s), \quad /3a/$$

$$k_z^2 = \frac{n}{r_0^2} - \frac{1}{r_0} \lambda b \phi(s), \quad /3б/$$

где n - показатель спада недеформированного магнитного поля, $\phi(s)$ - функция, учитывающая азимутальную зависимость поля корректора. Черта над данной величиной в /2/ и далее означает усреднение с функцией распределения частиц в пучке.

Изменение среднеквадратичных размеров определяется с помощью уравнений для моментов второго порядка функции распределения /5/. Так, например, моменты, связанные с радиальным движением, удовлетворяют следующей системе:

$$\frac{d\bar{x}^2}{ds} = 2\bar{x}\bar{v}_x, \quad \frac{d\bar{x}v_x}{ds} = \bar{v}_x^2 - \bar{k}_x^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\bar{x}\Delta p}{p},$$

$$\frac{d\bar{v}_x^2}{ds} = -2\bar{k}_x^2 \bar{v}_x + \frac{2}{\rho} \frac{\bar{v}_x \Delta p}{p}, \quad /4/$$

$$\frac{d}{ds} \frac{\bar{x}\Delta p}{p} = -\bar{k}_x^2 \frac{\bar{x}\Delta p}{p} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2, \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 = 0,$$

где $\Delta p/p$ - относительный импульсный разброс частиц; $\rho(s)$ - радиус кривизны орбиты; $\bar{k}_{x,z}^2 = k_{x,z}^2 + \Delta k_{x,z}^2$; $\Delta k_{x,z}^2$ - кулоновский сдвиг частоты:

$$\Delta k_{x,z}^2 = -\frac{1}{I_0 \beta^2 \gamma^2} \frac{1}{a_{x,z} (a_x + a_z)}, \quad /5/$$

I - ток пучка; $I_0 = 17 \beta \gamma$ (кА) - альфвеновский ток; $\bar{\gamma}$ - релятивистский фактор равновесной частицы; $a_x = \sqrt{\bar{x}^2}$; $a_z = \sqrt{\bar{z}^2}$.

Важным свойством системы /4/ является то, что ее решение сводится к сумме решений двух систем уравнений для параметров матрицы Твисса /6/ (a_x, β_x, γ_x) и дисперсионной функции ψ :

$$\bar{x}^2 = \epsilon_x \beta_x + \psi^2 \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2, \quad \bar{x}v_x = -\epsilon_x a_x + \psi \frac{d\psi}{ds} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2,$$

$$\bar{v}^2 = \epsilon_x \gamma_x + \left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2, \quad \bar{x} \frac{\Delta p}{p} = \psi \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2; \quad \bar{v}_x \frac{\Delta p}{p} = \frac{d\psi}{ds} \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2. \quad /6/$$

Здесь ϵ_x - среднеквадратичный фазовый объем пучка.

При этом функции $a_x, \beta_x, \gamma_x, \psi$ удовлетворяют стандартным уравнениям /7/:

$$\frac{da_x}{ds} = -2a_x; \quad \frac{d\beta_x}{ds} = -\gamma_x + \bar{k}_x^2 \beta_x; \quad \beta_x \gamma_x - a_x^2 = 1, \quad /7a/$$

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + \bar{k}_x^2 \psi = \frac{1}{\rho}. \quad /7б/$$

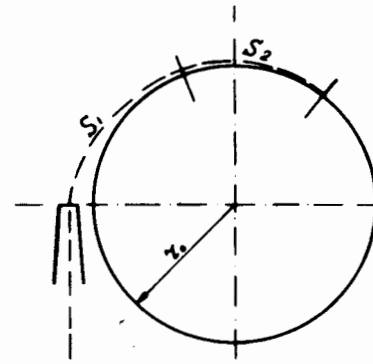


Рис. 1

$$\phi(s) = \begin{cases} \phi_1 = 0; & 0 \leq s \leq s_1, \\ \phi_2 = 1; & s_1 \leq s \leq s_1 + s_2, \end{cases} \quad /8/$$

причем $s_i = r_0 \theta_i$, $i = 1, 2$ /рис.1/.

Условия инжекции обычно выбираются такими, чтобы начальные когерентные смещения и угол в аксиальном направлении равнялись нулю. Поэтому аксиальное когерентное движение рассматриваться не будет.

Считая начальную радиальную скорость центра масс равной нулю, найдем смещение центра масс и его скорость на выходе из корректора ($s = s_1 + s_2$):

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}' \end{pmatrix} = M_2 M_1 \begin{pmatrix} \bar{\Delta x} \\ 0 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}, \quad /9/$$

где $\bar{\Delta x}$ - начальное отклонение от равновесной орбиты; штрих означает дифференцирование по s . Матрицы $M_{1,2}$ и вектор вынужденного

решения $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$ имеют следующий вид:

$$M_i = \begin{pmatrix} \cos k_{x_i} s_i & \frac{1}{k_{x_i}} \sin k_{x_i} s_i \\ -k_{x_i} \sin k_{x_i} s_i & \cos k_{x_i} s_i \end{pmatrix}, \quad /10a/$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_{x_i} r_0} (1 - \cos k_{x_i} s_i) \\ \frac{1}{k_{x_i} r_0} \sin k_{x_i} s_i \end{pmatrix}. \quad /10б/$$

Величины k_{x_i} определены согласно /3а/, /8/.

Уравнения для среднеквадратичных величин, связанных с аксиальным движением, сводятся к /7а/ путем замены индекса x на z /при $(\Delta p/p)^2 = 0$ /.

2. Рассмотрим коррекцию когерентного движения. Будем считать, что поле корректора ограничено в азимутальном направлении областью углов $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + \theta_2$ /угол $\theta = 0$ совпадает с точкой инжекции/, а длительность импульса поля равна времени одного оборота. Тогда функция $\phi(s)$ /2/ определяется как

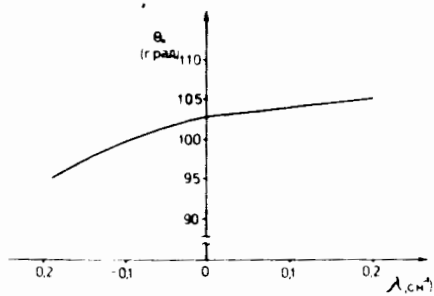


Рис. 2

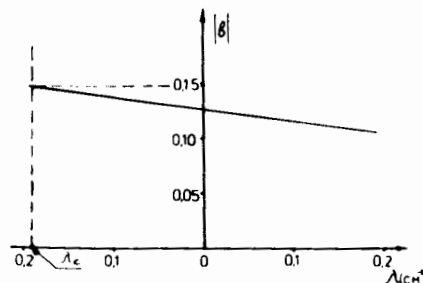


Рис. 3

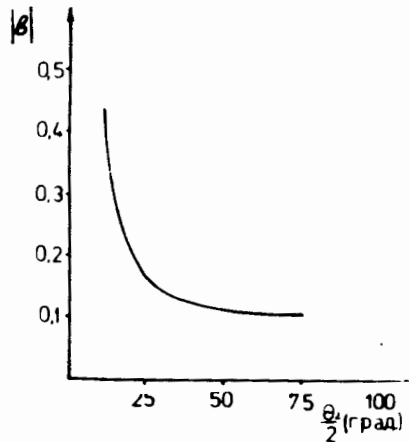


Рис. 4

Определим далее условия равенства нулю амплитуды колебаний центра масс пучка на выходе из корректора. Согласно формулам /9/, /10/, они сводятся к следующему:

$$\operatorname{tg} k_{x1} s_1 = \frac{k_{x2}}{k_{x1}} \operatorname{ctg} \frac{k_{x2} s_2}{2}, \quad /11a/$$

$$b = - \frac{k_{x2}^2 r_0 \Delta x \operatorname{cose} k_{x1} s_1}{2 \sin^2 \frac{k_{x2} s_2}{2}}. \quad /11b/$$

При $\lambda = 0$, т.е. при однородном поле корректора, выражения /11/ переходят в известные соотношения /3/:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2\nu_r}; \quad b = - \frac{\Delta x}{2r_0} \frac{1}{\sin \frac{\nu_r \theta}{2}}, \quad /12/$$

где $\theta_0 = \theta_1 + \theta_2 / 2$ - центр области коррекции; $\nu_r = \sqrt{1-n}$.

На рис. 2, 3 приведены зависимости θ_0 и b от степени неоднородности поля λ , рассчитанные по формулам /11/ при

$$n = 0,23; \quad r_0 = 35 \text{ см}; \quad \Delta x = 5 \text{ см}; \quad s_2 = 1,04 r_0. \quad /13/$$

что приблизительно соответствует параметрам прототипа КУТИ /8/.

На рис. 4 приведена зависимость оптимального значения b от азимутальной протяженности корректора $\theta_2 / 2$.

3. Для достижения максимальной плотности пучка электронов, циркулирующего на равновесной орбите, необходимо добиться также подавления в области коррекции некогерентных бетатронных колебаний, то есть на выходе из корректора пучок должен быть согласован с невозмущенным слабофокусирующим полем B .

Рассмотрим задачу согласования в пренебрежении собственным полем пучка, что значительно упрощает систему /7/. Поскольку электрическое поле в СИЛУНДе /7/ практически не зависит от поперечной координаты, то на выходе из ускорителя энергия частицы и поперечная координата между собой не связаны. Поэтому можно положить

$$\psi(s=0) = 0; \quad \frac{d\psi}{ds}(s=0) = 0. \quad /14/$$

Введем функцию

$$\eta = \frac{\psi_c - \psi}{\psi_c} \frac{\Delta x}{\Delta x}, \quad /15/$$

где $\psi_c = r_0 / (1-n)$ - согласованное значение дисперсионной функции. Из /7/ вытекает, что вне области коррекции уравнение для η совпадает с уравнением для центра масс пучка /2a/. Кроме того, совпадают и начальные условия ($x'|_{s=0} = 0$). Потребовав совпадения уравнений для η и \bar{x} в области коррекции, получим условие одновременного подавления когерентных бетатронных колебаний и согласования дисперсионной функции ψ :

$$\lambda = - \frac{1}{\Delta x} + \frac{1-n}{r_0}. \quad /16/$$

На рис. 5 показано поведение отношения ψ/ψ_c на первом обороте при различных значениях параметра λ . При $\lambda = 0,2 \text{ см}^{-1}$ /что приблизительно соответствует корректору ПКУТИ /4/ / возбуждаются колебания дисперсионной функции со значительной амплитудой. При импульсном разбросе $\Delta p/p = 3 \cdot 10^{-2}$ они приводят к амплитуде колебаний огибающей $\sim 4 \text{ см}$, что значительно превышает допустимый полный размер пучка / $\sim 2 \text{ см}$ /.

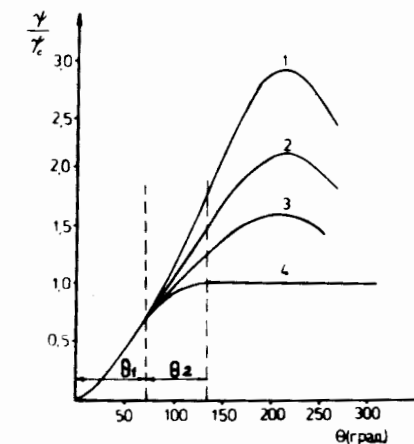


Рис. 5. 1 - $\lambda = 0,2 \text{ см}^{-1}$; 2 - $\lambda = 0$; 3 - $\lambda = -0,1 \text{ см}^{-1}$; 4 - $\lambda = -0,18 \text{ см}^{-1}$.

4. Кроме условий $\psi = \psi_c$ и $\psi' = 0$ при согласованной инжекции на выходе области коррекции должны выполняться условия $\beta_z = \beta_{zc} = r_0 / \sqrt{1-n}$; $\beta_x = \beta_{xc} = r_0 / \sqrt{1-n}$; $\beta'_x = \beta'_z = 0$. Известно /9/, что элементы матриц Твисса $\beta_{x,z}$, $\alpha_{x,z}$, $\gamma_{x,z}$ подчиняются линейным невырожденным преобразованиям $A_{x,z}$, матричные

элементы которых билинейным образом связаны с элементами соответствующих матриц преобразований координат и скоростей:

$$\begin{pmatrix} \beta_{x,z}(s_{i+1}) \\ \alpha_{x,z}(s_{i+1}) \\ \gamma_{x,z}(s_{i+1}) \end{pmatrix} = A_{x,z} \begin{pmatrix} \beta_{x,z}(s_i) \\ \alpha_{x,z}(s_i) \\ \gamma_{x,z}(s_i) \end{pmatrix}, \quad /17/$$

$$A_{x,z} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{21} \\ m_{21}^2 & -2m_{22}m_{21} & m_{22}^2 \end{pmatrix}, \quad /18/$$

m_{ik} - элементы матриц преобразования координат и скоростей.

Зная конечные согласованные значения элементов матрицы Твисса /из соотношений /7а//, получим требуемые начальные условия, предъявляемые к параметрам инжектируемого пучка:

$$\begin{pmatrix} \beta_{x,z}(0) \\ \alpha_{x,z}(0) \\ \gamma_{x,z}(0) \end{pmatrix} = A_{x,z_1}^{-1} A_{x,z_2}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_{x,z_c} \\ 0 \\ \frac{1}{\beta_{x,z_c}} \end{pmatrix}. \quad /19/$$

Отметим, что, в отличие от согласования по дисперсионной функции, согласование по бетатронному размеру можно выполнить при любом λ . На рис.6 приведены примеры огибающих пучка /точнее, $(\beta_x/\beta_{x_c})^{1/2}$, выходящих после прохождения области коррекции на согласованный режим /1- $\lambda=0,2 \text{ см}^{-1}$; 3 - $\lambda = \lambda_c = -1/\Delta x + (1-n)/r_0 \approx \pm 0,18/$. Кривая 2 иллюстрирует поведение пучка, имевшего в точке инжекции согласованные параметры и прошедшего через корректор с $\lambda = 0,2 \text{ см}^{-1}$. На рис.7 приведены аксиальные огибающие пучка при: 1/ выполнении условия согласования /19/; 2/ согласовании круглого пучка только в радиальном направлении. Видно, что для осуществления полностью согласованной инжекции необходимо на входе адгезатора иметь пучок эллиптического сечения. В противном случае возможны колебания огибающей со значительной амплитудой.

5. Расчет аксептанса адгезатора будем производить исходя из условия компактности электронного кольца так, чтобы начальные размеры не превышали для ПКУТИ 2 см при числе электронов $N_e = 10^{13}$. При этом предельно допустимый фазовый объем пучка при согласованной инжекции будет зависеть от величин энергетического разброса и объемного заряда.

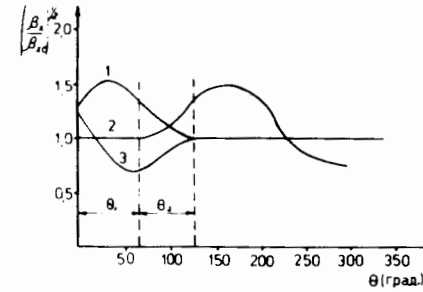


Рис.6

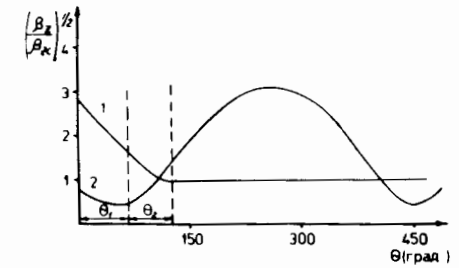


Рис.7

Обозначим через X суммарный согласованный радиальный размер сформированного кольца:

$$X^2 = a_x^2 + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 \psi_c^2 \text{ кул.} \quad /20/$$

a_x^2 - квадрат стационарного бетатронного ^{/5/} радиального размера, $\psi_c \text{ кул.}$ - согласованное значение дисперсионной функции с учетом влияния сил пространственного заряда. Полная система уравнений, определяющая стационарное состояние электронного кольца /все производные равны нулю/ согласно /7а/, /7б/, имеет вид

$$\psi_c \text{ кул.} = \frac{r_0}{1 - n - \frac{4\nu^2 r_0^2}{\beta^2 \gamma^3 X (X + a_z)}}$$

$$\nu_x^2 a_x - \frac{16\epsilon_x^2 r_0^2}{a_x^3} - \frac{4\nu r_0^2 a_x}{\beta^2 \gamma^3 X (X + a_z)} = 0, \quad /21/$$

$$\nu_z^2 a_z - \frac{16\epsilon_z^2 r_0^2}{a_z^3} - \frac{4\nu r_0^2}{\beta^2 \gamma^3 (X + a_z)} = 0.$$

Здесь использованы следующие обозначения: $a_x^2 = 4\epsilon_x \beta_x$, $a_z^2 = 4\epsilon_z \beta_z$, $X^2 = 4x^2$ - полные размеры кольца при равномерном распределении плотности по сечению; $\nu = \frac{r_e N_e}{2\pi r_0}$ - погонная плотность

электронов в кольце; r_e - классический радиус электрона. При численных расчетах мы считали, что $\epsilon_x = \epsilon_z = \epsilon/4$ и $X = 2 \text{ см}$. Остальные параметры соответствуют /13/.

На рис.8 представлены зависимости максимального /соответствующего $X = 2 \text{ см}$ / импульсного разброса от эмиттанса пучка, найденные при различных значениях энергии и числе электронов $N_e = 10^{13}$. Пунктирная кривая соответствует ограничению допустимого эмиттанса условием $a_z = 2 \text{ см}$. Видно, что аксептанс адгезатора ПКУТИ в основном ограничен аксиальным размером сгустка и при $\nu = 4,5$ составляет $4\epsilon = 35\pi \cdot \text{мрад} \cdot \text{см}$.

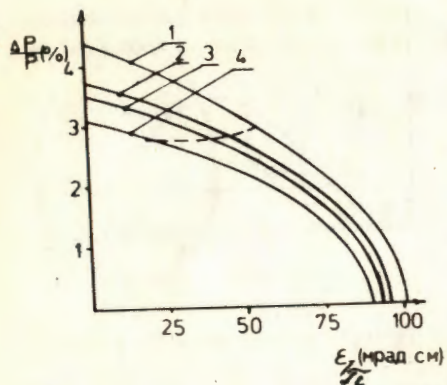


Рис.8. 1 - $\gamma = 8$; 2 - $\gamma = 5$; 3 - $\gamma = 4,5$; 4 - $\gamma = 3,5$.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Э.А.Перельштейну за постоянный интерес к настоящей работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саранцев В.П. и др. ОИЯИ, Р9-10053, Дубна, 1976.
2. Мостовой Ю.А. и др. ЖТФ, 1966, т.36, с.1550.
3. Merkel P. Zur Elektroneninflexion in dem Elektronenring Kompressor. IPP 0/5, Garching bei München, 1971.
4. Халлер Р., Красных А.К. ОИЯИ, 9-80-284, Дубна, 1980.
5. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. ОИЯИ, Р9-11916, Дубна, 1978.
6. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц, Атомиздат, М., 1970.
7. Дерендяев Ю.С. и др. ОИЯИ, Б1-7935, Дубна, 1974.
8. Александров В.С. и др. ОИЯИ, Р9-10118, Дубна, 1976.
9. Штеффен К. Оптика пучков высокой энергии. "Мир", М., 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1983 года

Казаринов Н.Ю., Щеулин А.С.

Р9-83-920

Условия согласованной инжекции электронного пучка
в адгезатор коллективного ускорителя

Рассмотрена возможность однооборотной согласованной инжекции электронного пучка с конечными значениями эмиттанса и импульсного разброса в адгезатор коллективного ускорителя. Найдена связь между моментами функции распределения, дисперсионной и β -функциями. Показано, что при определенном выборе геометрии электромагнитного поля корректора траектории можно реализовать согласованную инжекцию. Найден аксептанс адгезатора с учетом влияния сил пространственного заряда. Показано, что при показателе спада магнитного поля $n \approx 0,22$ и энергии электронов $E \geq 2$ МэВ в адгезаторе можно формировать электронные кольца с числом электронов 10^{13} и импульсным разбросом $\Delta p/p \cdot 100\% \approx 3\%$ при малых полуразмерах кольца, не превышающих двух сантиметров.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Kazarinov N.Yu., Shcheulin A.S.

Р9-83-920

Conditions for Electron Beam Matched Injection
in Collective Accelerator Adgeзатор

The possibility of one-turn matched injection of the electron beam which has finite emittance and momentum spread into adgeзатор of the collective accelerator is considered. The connection between the momentum of distribution function and that of dispersion and β -functions are found. It is shown that with a definite selection of geometry of electromagnetic field trajectory corrector matched injection can be achieved. The adgeзатор acceptance is found with making allowance of the influence of space charge forces. It is shown that with field index $n = 0.22$ and electron energy $E \geq 2$ MeV there is a possibility to form in the adgeзатор electron rings with electron number $N_e 10^{13}$ and momentum spread $\Delta p/p \cdot 100\% \approx 3\%$ at small dimensions of the ring not more than 2 cm.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой