

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

2307/83

10/5-83

P9-83-90

С.Б.Ворожцов

РАСЧЕТ ПОЛЯ ТОРОИДАЛЬНОГО МАГНИТА
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Направлено на Международную конференцию
по расчету магнитных полей. Генуя, 30-2 июня 1983 г.

1983

ВВЕДЕНИЕ

В эксперименте NA-4 ЦЕРН ^{/1/} проводится исследование глубокоупругого рассеяния мюонов на углероде и других мишенях. Зависимость значений структурной функции от пространственного распределения магнитного поля приводит к необходимости увеличения точности поля в магнитопроводе установки, являющемся в данном случае рабочей областью магнита.

На рис.1 схематически изображены два соседних модуля спектрометра. Всего один супермодуль содержит 8 модулей, располагаемых вдоль оси z так, как показано на рис.1. Другая проекция магнита, где более полно показана подставка, представлена на рис.2. Для расчета поля в пределах трехмерной конфигурации магнита наиболее подходящим оказался классический метод конечных элементов ^{/2/}. На рис.1 пунктирной линией выделена минимальная по объему область расчета, на границе которой могут быть сформулированы либо условия симметрии или антисимметрии поля /часть границы/, либо условие отсутствия потока через границу. Область расчета делилась на подобласти /E1, E2, E3, E4, M2/, связанные с характерными деталями конфигурации магнита. В каждой из этих подобластей выбирался свой размер сетки для расчета методом конечных элементов. Обмотка возбуждения тороидального магнита принималась в виде линейного тока, направленного вдоль оси z /рис.1/.

Для решения задачи необходимо было определить магнитное поле в пределах стальных дисков. При этом достаточно было приближенно оценить влияние сложной конфигурации подставки на рабочую область. В связи с этим геометрия подставки могла быть представлена в более простой форме таким образом, чтобы ее поверхность совпадала с координатными поверхностями цилиндрической системы /рис.2, пунктирная линия/. Исследование влияния на точность определения поля в диске различных модификаций геометрии подставки при сохранении общей ее магнитной проводимости показало допустимость подобного упрощения ее конфигурации.

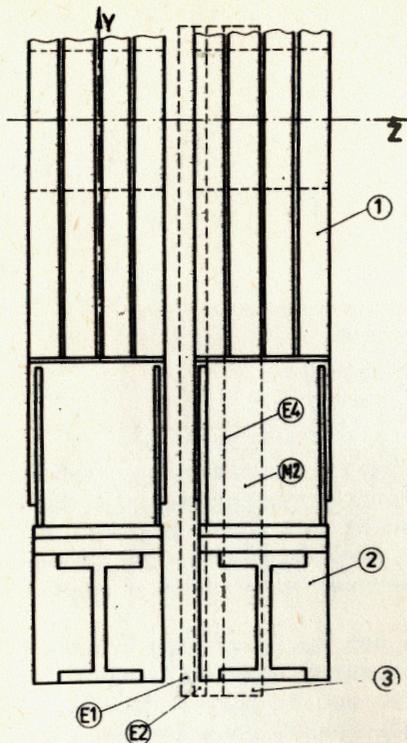
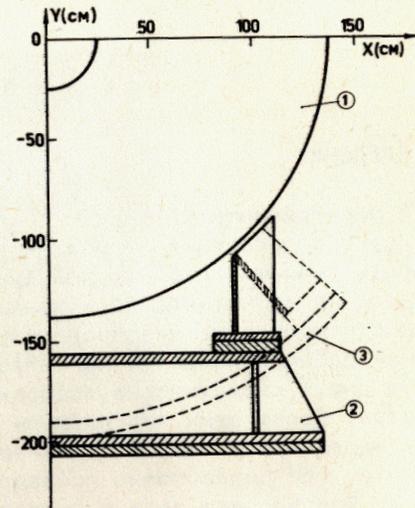


Рис.1. Схематический вид двух модулей. 1 - диск, 2 - подставка, 3 - выделенная область расчета поля.

Рис.2. Часть диска вблизи подставки. 1 - диск, 2 - подставка, 3 - геометрия подставки в расчете.



МЕТОД РАСЧЕТА

Расчет поля магнита проводился на основании решения граничной задачи для нелинейного уравнения

$$\nabla(\mu \nabla \psi) = 0, \quad /1/$$

где магнитная проницаемость μ считалась функцией величины напряженности магнитного поля $\mathbf{H} = -\nabla \psi$.

В программе для ЭВМ использовалась измеренная характеристика $\mu(H)$ для низкоуглеродистой стали /содержание углерода 0,08%/ [3], из которой были изготовлены диски. Граничные условия задачи формулировались следующим образом:

1/ на поверхностях области расчета /рис.1/ для $z = \text{const}$ и $R_{\min} = 25$ см и $R_{\max} = 196,8$ см, где $R^2 = x^2 + y^2$, ставилось условие отсутствия магнитного потока через поверхность:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = 0, \quad /2/$$

где \vec{n} - внешняя нормаль к граничной поверхности;

2/ для полуплоскости $X = 0, Y \leq (-25 \text{ см})$ задавалось

$$\psi = 0; \quad /3/$$

3/ для полуплоскости $X = 0, Y > 25 \text{ см}$

$$\psi = -0,5 J, \quad /4/$$

где J - ампервитки обмотки возбуждения магнита величиной 60 кА-виток.

Условия /3/ и /4/ связаны с введением разрезов, обеспечивающих однозначность полного магнитоэстатического скалярного потенциала ψ /4/. Ввиду симметрии задачи расчет проводился лишь в области $X \geq 0$.

Область расчета покрывалась сеткой, каждая ячейка которой представляла собой криволинейный параллелепипед, образованный поверхностями цилиндрической системы координат. Внутренние и внешние границы задачи совпадали с поверхностями, образующими сетку. Вся задача была разбита на ряд подобластей, в каждой из которых строилась регулярная сетка.

В пределах ячейки - конечного элемента с номером (e) магнитный потенциал являлся функцией его значений в восьми вершинах элемента:

$$\psi^{(e)} = [N^{(e)}] \{ \psi^{(e)} \}, \quad /5/$$

где

$$[N^{(e)}] = [N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, \dots, N_8^{(e)}]. \quad /6/$$

Функция формы для (i)-той вершины имеет вид:

$$N_i^{(e)} = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i). \quad /7/$$

Координаты (i)-той вершины в естественной системе координат элемента задаются следующим образом:

$$\xi_i = \frac{R_i - R_c}{\Delta R}, \quad \eta_i = \frac{\phi_i - \phi_c}{\Delta \phi}, \quad \zeta_i = \frac{z_i - z_c}{\Delta z}, \quad /8/$$

где $/R_c, \phi_c, z_c/$ - координаты центральной точки элемента и $/2\Delta R, 2\Delta \phi, 2\Delta z/$ - его размеры.

Вектор значений потенциала в вершинах элемента может быть представлен как:

$$\{ \psi^{(e)} \} = [\psi_1^{(e)}, \psi_2^{(e)}, \dots, \psi_8^{(e)}]^T. \quad /9/$$

Применение метода Галеркина к уравнению /1/ в пределах объема элемента дает:

$$\int_{\Omega_e} [N^{(e)}]^T \nabla(\mu \nabla \psi) d\Omega = 0. \quad /10/$$

Применяя к /10/ теорему Остроградского-Гаусса и учитывая граничное условие /2/, получим для всей задачи алгебраическую систему:

$$\sum_e \int_{\Omega_e} (\nabla [N^{(e)}]^T)_\mu (\nabla [N^{(e)}] \{\psi^{(e)}\}) d\Omega = 0. \quad /11/$$

Суммирование в /11/ по элементам понимается как построение глобальной матрицы жесткости методом "прямой жесткости" /2/. Будем считать, что наши элементы 1-го порядка настолько малы по размерам, что значение $\nabla \psi$ мало меняется в пределах элемента. В этом случае $\mu^{(e)} \approx \text{const}$ в Ω_e , и элемент матрицы в /11/ может быть представлен в виде

$$A_{ij}^{(e)} \approx \mu^{(e)} \int_{\Omega_e} \nabla N_i^{(e)} \nabla N_j^{(e)} d\Omega. \quad /12/$$

Выполняя интегрирование в /12/ с учетом /7/, получим

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(e)} = & \frac{1}{9} \mu^{(e)} \cdot \Delta R \cdot \Delta \phi \cdot \Delta z \left[\frac{R_c}{(\Delta R)^2} \xi_1 \xi_j (3 + \eta_1 \eta_j) (3 + \zeta_1 \zeta_j) + \right. \\ & + \frac{3}{\Delta R (\Delta \phi)^2} \eta_1 \eta_j (3 + \zeta_1 \zeta_j) [(\xi_1 + \xi_j) - \frac{R_c}{\Delta R} \xi_1 \xi_j + \\ & + \frac{1}{2} (1 - \frac{R_c}{\Delta R} (\xi_1 + \xi_j) + (\frac{R_c}{\Delta R})^2 \xi_1 \xi_j) \cdot \ln \left| \frac{R_c + \Delta R}{R_c - \Delta R} \right| + \\ & \left. + \frac{R_c}{(\Delta z)^2} \zeta_1 \zeta_j [3 + \xi_1 \xi_j + \frac{\Delta R}{R} (\xi_1 + \xi_j)] (3 + \eta_1 \eta_j) \right]. \quad /13/ \end{aligned}$$

Значение $\mu^{(e)}$ определяется исходя из градиента решения в центре элемента

$$\psi = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \psi_i \left(\vec{e}_R \frac{\xi_1}{\Delta R} + \vec{e}_\phi \frac{\eta_1}{R_c \Delta \phi} + \vec{e}_z \frac{\zeta_1}{\Delta z} \right). \quad /14/$$

Граничные условия /2/ и /3/ удовлетворяются путем модификации матрицы системы /11/ на основе изложенного в /2/ метода. Как известно, матрица [A] - симметричная и ленточная. Минимальность размера полосы матрицы в нашем случае достигается за счет нуме-

рации узлов сетки в направлении наименьшего размера задачи, т.е. вдоль оси z, затем оси ϕ и потом вдоль оси R. При этом полуразмер полосы с учетом диагональных элементов определяется из выражения

$$W = 2 + N_z(1 + N_\phi), \quad /15/$$

где N_z, N_ϕ - число узлов вдоль соответствующих осей координат.

Решение системы линейных алгебраических уравнений /11/ при заданных значениях $\mu^{(e)}$ элементов мы выполняли методом исключения Гаусса, опираясь на программные разработки статьи /6/. Для каждого вновь полученного решения /11/ проводилась коррекция значения $\mu^{(e)}$ в соответствии с выражением

$$\mu_{n+1}^{(e)} = \mu_n^{(e)} + \alpha (\mu_n^{(e)} - \mu_n^{(e)}), \quad /16/$$

где n-номер итерации по $\mu^{(e)}$, α - фактор недорелаксации величиной 0,7, $\mu_n^{(e)}$ - новое значение $\mu^{(e)}$, определяемое на основании /14/ и магнитной характеристики материала магнитопровода.

Для расчета конфигурации рис.1-2 при 840 узлах сетки и полуразмере полосы $W = 77$ необходимо было выполнить 38 итераций по (μ) для получения

$$\max_e \left| \frac{\Delta \mu^{(e)}}{\mu^{(e)}} \right| < 6 \cdot 10^{-8} \quad \frac{1}{M} \sum_{e=1}^M \left| \frac{\Delta \mu^{(e)}}{\mu^{(e)}} \right| < 2 \cdot 10^{-4}, \quad /17/$$

где $\Delta \mu^{(e)}$ - изменение магнитной проницаемости для двух последовательных итераций. Время, затраченное на решение задачи на CDC-7600, было примерно равно 500 с. Проверка созданной программы для ЭВМ проводилась путем сравнения получаемых результатов с двумя известными точными решениями:

1/ магнитное поле линейного проводника с током в вакууме

$$B_0 = \mu_0 \frac{J}{2\pi R}, \quad /18/$$

где μ_0 - абсолютная магнитная проницаемость вакуума.

2/ Магнитное поле диска без подставки, но с достаточно большим размером вдоль оси z:

$$B = \mu(H_J)H_J, \quad \text{где } H_J = \frac{J}{2\pi R}. \quad /19/$$

Совпадение результатов с точным решением в этих случаях было лучше, чем 10^{-4} .

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Распределение компонент поля для характерной подобласти задачи E2 приведено на рис.3-5. На рисунках отчетливо проявляется отклонение полученных зависимостей от азимутально-однородного поля, что является свидетельством шунтирующего эффекта подставки на поле в диске.

Некоторые цифры, характеризующие поведение поля в различных подобластях расчета, даны в следующей таблице:

Область /мТ/	E1	E2	E3	E4	M2
$ B_R \leq$	0,7	350	170	16	160
$ B_\phi \geq$	7,5	1660	1710	0	1720
$ B_z \leq$	0,9	140	15	9,2	7

В воздушных зазорах между дисками поле, в основном, определяется прямолинейным током, текущим вдоль оси z в соответствии с /18/. Однако и здесь имеет место эффект подставки. Максимальное значение B_R -компоненты поля наблюдается в области E2 из-за стягивания магнитного потока к пластине подставки, плоскость

которой нормальна по отношению к оси z. Этим также объясняется наличие наибольшего значения B_z -компоненты в области E2. Причем знак B_z меняется на противоположный на другом краю модуля. Информация по величине поля в зазоре позволяет вычислить полную поворотную силу по всей длине спектрометра. Усредненные по длине спектро-

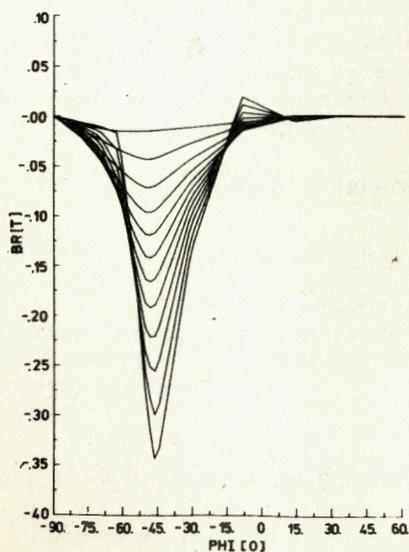


Рис.3. Радиальная составляющая поля диска для области E2. Семейство кривых построено для радиусов, начиная от 25 см с шагом 10 см, до 135 см. Кривая с максимальным отклонением от постоянного значения соответствует радиусу 135 см.

метра распределения полей были использованы в программах обработки физической информации эксперимента NA-4.

Результаты расчетов сравнивались с имеющимися данными по распределению поля спектрометра, полученными как на основании измерений поля, так и путем расчета другими методами. На рис.6

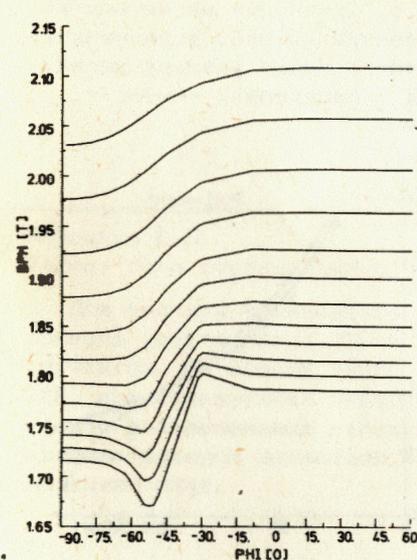


Рис.4. Азимутальная составляющая поля диска для области E2. Обозначения, как на рис.3.

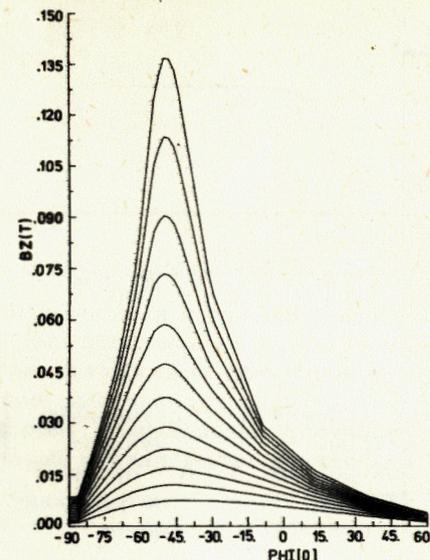


Рис.5. Аксиальная составляющая поля диска для области E2. Обозначения, как на рис.3.

приведена зависимость B_ϕ от азимута, усредненная по длине супермодуля и по радиальному размеру дисков. Сравнение с экспериментальными данными, полученными при помощи измерительных обмоток, располагаемых вокруг супермодуля /7,8/, показывает на согласие результатов с точностью $7 \cdot 10^{-3}$. В соответствии с выполненными оценками, улучшения точности расчета до $4 \cdot 10^{-3}$ можно добиться путем включения в расчетную модель распределения поля от токовых проводников, замыкающих обмотку вокруг супермодуля вне дисков. Для среднего диска модуля /область M2 / проводилось сравнение с результатами расчета по двумерной методике /9/ при помощи программы POISSON. Именно по этой части модуля упомянутая программа дает наилучшее описание трехмерной конфигурации поля. Как видно из рис.7, имеется согласие распределений с точностью $1 \cdot 10^{-3}$. Метод конечных элементов дает существенное улучшение точности по сравнению с ранее принятой расчетной моделью поля, основанной на замене сердечника магнита эквивалентным распределением токовых обмоток /10/. Из рис.7 видно, что найденная поправка поля составляет 1-7% по сравнению с ранее принятым распределением вблизи $\phi = -90^\circ$.

Таким образом, используя программу для ЭВМ, написанную специально для магнита спектрометра NA-4, удалось получить с тре-

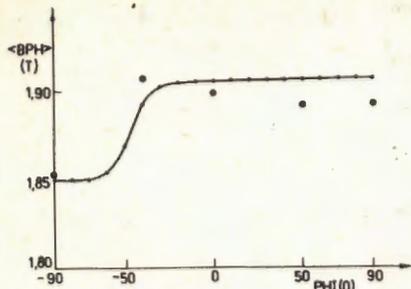
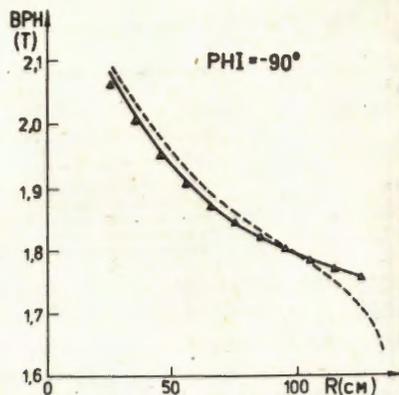


Рис. 7. Сравнение с двумерными расчетами. — результат данной работы. $\Delta \Delta \Delta$ — программа POISSON. - - - метод эквивалентных токовых обмоток.

Рис. 6. Сравнение расчетных и измеренных полей, усредненных по радиальному размеру диска. $\odot \odot \odot$ — измерения. — — — расчет.



буемой точностью трехмерное распределение магнитного поля в рабочей области установки. Найденные результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными и независимыми расчетными данными и приняты для программ обработки в эксперименте NA-4.

Автор благодарен проф. И.А.Савину и проф. Ч.Зупанчичу за постоянный интерес к работе, а также П.Г.Акишину за многочисленные обсуждения различных аспектов метода конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rubbia C. et al. NA-4 Proposal, CERN/SPSc/74-79/, 1974, p. 19.
2. Segerlind L.G. Applied Finite Element Analysis, J.Wiley, New York, 1976.
3. Kukhtin V.V. CERN, NA-4, Note, 1978.
4. Armstrong A.G. et al. Proc. of COMPUMAG, Grenoble, 1978, p. 1, 2.
5. Cantin G. IJNME, vol.3, 1971, pp. 379-388.
6. Vorozhtsov S.B. CERN/EP/NA-4, Note 82-25.
7. Ange E. CERN /EP/ NA-4 Note 80-36.
8. Ouraou A. CERN /EP/ NA-4 Note 81-21.
9. Cvach J. et al. JINR, E11-80-258, Dubna, 1980.
10. Brun R., Smadja G. CERN, NA-4, Note, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 февраля 1983 года.

Ворожцов С.Б. P9-83-90
Расчет поля тороидального магнита методом конечных элементов

Для расчета трехмерного магнитного поля в пределах магнитопровода спектрометра NA-4 ЦЕРН был использован метод конечных элементов. На основе этого метода разработана программа для ЭВМ, предназначенная исключительно для данного магнита. Полученное распределение магнитного поля сравнивается с существующими данными магнитных измерений и различными расчетными моделями поля.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем, ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Vorozhtsov S.B. P9-83-90
Finite Element Method for the CERN NA4 Spectrometer
Magnetic Field Computation

Finite element method has been used for the calculation of 3-dimensional field inside the iron core of the CERN NA-4 spectrometer. Computer program based on this method has been written exceptionally for the above mentioned magnet. The obtained field map has been compared with the existent data on magnetic field measurements and with various computed field models.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.