

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

739 / 83

7/2-83

P9-82-785

Е.П.Жидков, Э.И.Уразаков, А.Б.Швачка

РАСЧЕТ АВТОУСКОРЕНИЯ
КОЛЬЦЕВОГО СГУСТКА ЧАСТИЦ С ТОКОМ
В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ
КОАКСИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

1982

Движение сгустка заряженных частиц с переменным электрическим током вблизи неоднородности направляющего канала сопровождается изменением электромагнитной энергии /"массы"/ сгустка и потерями энергии на переходное излучение. Изменение кинетической энергии сгустка ϵ определяется уравнением

$$\frac{d}{dt} \epsilon = - \frac{d}{dt} \int_V dv \cdot \bar{W} - \int_{\sigma} d\sigma \cdot \bar{S}_z, \quad /1/$$

где $\bar{W} = \frac{1}{8\pi} [(\vec{E}^c)^2 + (\vec{H}^c)^2]$ и \bar{S}_z - средние /по времени/ значения величины плотности энергии электромагнитного поля сгустка и z-компоненты вектора Пойнтинга поля переходного излучения, соответственно; σ - поверхность, ограничивающая объем V , по которому вычисляется интеграл, представляющий значение энергии сгустка.

Для определения \vec{E}^c , \vec{H}^c /напряженностей электромагнитного поля сгустка в волноводе/ и потока энергии переходного излучения в системе решим следующую краевую задачу электродинамики. Пусть сгусток частиц движется со скоростью βc прямолинейно вдоль оси z системы, состоящей из полубесконечного круглого волновода радиуса d^* , коаксиально расположенного внутри бесконечной трубы круглого сечения с радиусом a ($a > d$) в области $z > 0$.

Предположим, что в процессе движения сохраняются форма, размеры и число частиц в сгустке. Возбужденное электромагнитное поле в силу осевой симметрии системы сгусток - волновод описывается единственной компонентой векторного потенциала (A_ϕ). Краевая задача в цилиндрической области ($0 < r < a$, $0 < \phi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$) решается для волнового уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right) - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial z^2} + k^2 A_\phi = 0 \quad /2/$$

при кулоновской калибровке потенциала $\text{div} \vec{A} = 0$ с граничными условиями:

$$A_\phi = A_\phi^c + A_\phi^u = 0 \quad \text{при } r = a, -\infty < z < \infty, \quad r = d, 0 < z < \infty, \quad /2a/$$

* Расчеты проводятся в цилиндрической системе координат $\{r, \phi, z\}$; ось волноводной системы совмещена с осью z.

где A_ϕ^u - векторный потенциал поля переходного излучения, и с условием Мейкснера $\frac{1}{r}$ на ребре:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \sim 0 (z^{-1/2}) \text{ при } z \rightarrow 0, r = d. \quad /26/$$

Решение данной краевой задачи существует и является единственным $\frac{1}{r}$.

1. Компоненты \vec{E}^c, \vec{H}^c вычислим, решая краевую задачу /2/ с граничным условием

$$E_\phi^c = ik A_\phi^c = 0 \text{ при } r = a, -\infty < z < \infty \text{ и}$$

задавая плотность тока сгустка в собственной системе координат в виде:

$$j_\phi(r, z, t) = I_s \delta(r - b_s) \delta(z - z_s) e^{-i\omega t}. \quad /3/$$

С учетом /3/ выражение для $E_\phi(r, z, t)$ имеет вид:

$$E_\phi(r, z, t) = -\frac{\pi k}{c} I_s e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} A_\pm(r, v_n, \pm w_n) e^{\pm i w_n (z - z_s)}, \quad /4/$$

где

$$A_\pm = \frac{w_n}{v_n} \cdot \frac{J_1(v_n a) N_1(v_n b_s) - J_1(v_n b_s) N_1(v_n a)}{J_1'(v_n a)}.$$

Знак '+' относится к случаю $w = \sqrt{k^2 - v_n^2}$, $z_s < z$; знак '-' - к случаю $w = -\sqrt{k^2 - v_n^2}$, $z_s > z$. Здесь $I_s, \omega = kc, b_s, z_s$ - сила, частота и координаты тока сгустка, $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака, $\omega < \omega_{кр}$ - критическая частота волновода радиуса $r = a$, c - скорость света, $J_1(v_n a) = 0$, $N_1(x)$ - функция Неймана первого порядка, $J_1(x)$ - функция Бесселя первого порядка, штрих означает дифференцирование функции Бесселя по аргументу.

Используя преобразования Лоренца для частоты и волнового вектора, а также выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, для плотности энергии электромагнитного поля сгустка в системе координат волновода получим:

$$\bar{W} = \bar{W}_+ + \bar{W}_- = \frac{(\vec{E}^c)^2 + (\vec{H}^c)^2}{8\pi}.$$

Плотность энергии \bar{W}_+ при $z_s < z$ определяется выражением:

$$\bar{W}_+ = \frac{\pi}{8c^2} k^2 \gamma^2 I_s^2 \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \beta \frac{w_n}{k}) A_+ \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \beta \frac{w_n}{k}) A_+^*.$$

$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, знак (*) означает комплексное сопряжение. Интегрируя \bar{W}_+ по объему системы при $z > z_s$, найдем значение энергии ϵ_+ :

$$\epsilon_+ = \frac{\pi^2 \gamma^2}{4} \cdot \left(\frac{I_s}{c}\right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \beta \frac{w_n}{k})^2 \cdot \frac{J_0^2(v_n b_s)}{w_n^3 \cdot J_0^2(v_n a)} \quad /5/$$

Аналогично найдем выражение для ϵ_- . Величины k и w_n взяты в системе координат, в которой сгусток покоится.

2. Для вычисления потока энергии переходного излучения необходимо решить задачу о дифракции поля сгустка на конце полубесконечного волновода. Для этого, с помощью краевой задачи /2/ - /26/, используя граничное условие

$$ik A_\phi^u = -ik A_\phi^c \text{ при } r = d, 0 < z < \infty$$

и формулу /4/, получим интегральное уравнение на полуоси в виде

$$\int_0^\infty dz_1 \cdot F(z_1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n e^{i w_n (z - z_1)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i w_n z}, \quad z > 0. \quad /6/$$

Здесь введены обозначения:

$$\phi_n = \frac{w_n}{v_n} \frac{J_1(v_n d)}{J_1'(v_n a)} \cdot [J_1(v_n d) \cdot N_1(v_n a) - J_1(v_n a) N_1(v_n d)],$$

$$C_n = A_+(d) e^{-i w_n z_s}.$$

С учетом граничного условия для напряженности магнитного поля

$$[\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = j_\phi, \quad r = d, z < 0$$

\vec{n} - нормаль к поверхности волновода при $r = d$, преобразуем /6/ к интегральному уравнению Фредгольма первого рода с бесконечными пределами:

$$\hat{F} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \cdot F(z_1) \cdot \sum_n \phi_n e^{i w_n (z - z_1)} = \frac{1}{2} (1 + \text{sign } z) \cdot \sum_n C_n e^{i w_n z}, \quad /7/$$

которое является некорректно поставленной задачей по Ж.Адамару /2/. Для нахождения решения /7/ используем метод регуляризации

А.Н.Тихонова /2/. В качестве алгоритма построения приближенного решения используем статистическую регуляризацию /2/ функций решения, найденных с помощью преобразования Фурье. Регуляризованное решение /7/ определяется с помощью ансамбля гладких функций, фурье-компоненты которых имеют нормальные распределения с равным нулю математическим ожиданием и с дисперсией, равной

$$\langle |F_s(w)|^2 \rangle = M^{-1} \psi_s^2 = M^{-1} \psi^2(\alpha, w_s).$$

Здесь $\psi^2 = \alpha^2 w^{-2} \exp\{-w^2 \alpha^{-2}\}$, α - параметр регуляризации, M - общее число функций, входящих в статистический ансамбль $M = 2M_0 + 1$, $S = -M_0, -M_0 + 1, \dots, M_0$ /. В качестве искомого решения /при $M \rightarrow \infty$ / выберем математическое ожидание решения /7/ по статистическому ансамблю, при этом среднеквадратическое отклонение от математического ожидания есть ошибка решения.

Регуляризованное решение имеет вид:

$$F(z, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{i w z} F(w, \alpha), \quad /8/$$

где

$$F(w, \alpha) = \frac{|D(w)|^2 \psi^2(\alpha, w) \cdot C_+(w)}{\{|D(w)|^2 \psi^2(\alpha, w) + [\Delta C_+(w)]^2\} D(w)} \in L_2(-\infty, \infty).$$

Ошибка регуляризованного решения ΔF определяется формулой:

$$\Delta F = \Delta C_+ \cdot \left\{ \pi^{-1} \int_0^{\infty} dw \frac{\psi^2}{[|D(w)|^2 \psi^2(\alpha, w) + (\Delta C_+)^2]} \right\}^{1/2}. \quad /9/$$

где $D(w)$ - фурье-компонента функции $\sum_n \phi_n e^{i w_n (z - z_1)}$, $C_+(w)$ - фурье-компонента выражения

$$\frac{1}{2} (1 + \text{sign } z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{i w_n z}.$$

Для вычисления напряженности, плотностей тока, энергии, потоков энергии электромагнитного поля в этой задаче разработано математическое обеспечение для численных расчетов на ЭВМ /3/ на основе методов регуляризации и Винера-Хопфа-Фока /1/. Сравнение результатов численного моделирования с помощью ЭВМ, полученных на основе этих методов, представляет самостоятельный интерес и в настоящей работе не обсуждается. Укажем только, что в пределах ошибки численных расчетов результаты метода регуляризации совпадают с данными, полученными с помощью метода Винера-Хопфа-Фока.

3. Используя выражения для напряженностей полей сгустка и переходного излучения, вычислим величины \bar{W} и S_z . Подставив

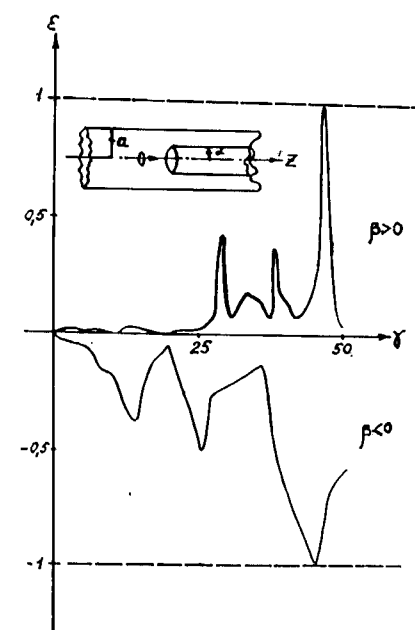
выражения для \bar{W} и S_z в уравнение /1/, численно проинтегрируем его при следующих значениях параметров системы сгусток-волновод:

$$a = 8,0; \quad d = 1,0; \quad b_s = 0,1; \quad k = 0,01; \quad z_s = 5,0$$

/в сантиметрах/; $1 < \gamma \leq 50$, $I_s = 1a$, $N = 10^{14}$ / N - число частиц в сгустке/. Относительная погрешность вычисления подынтегральных выражений, характеризуемая остаточной суммой экспоненциально сходящихся рядов в /4/, не превышает 10^{-6} . Решение уравнения /1/ найдено для двух случаев:

$$\begin{aligned} a/ \beta > 0, \quad \epsilon(0) = \epsilon_0 - \text{const при } t = 0, \\ b/ \beta < 0, \quad \epsilon(0) = \epsilon_0 - \text{const при } t = 0. \end{aligned}$$

Результаты расчетов показаны на рисунке, где приведена зависимость приращения /или убывания при $\beta < 0$ / кинетической энергии сгустка /в относительных единицах/ от скорости его движения; $\Delta \epsilon_+^{\text{max}} \approx 5$ мэВ, $\Delta \epsilon_-^{\text{max}} \approx 15$ мэВ, $(\Delta \gamma_{\text{max}} \approx 40)$.



Изменение кинетической энергии сгустка вычисляется за промежуток времени, превышающий время формирования поля переходного излучения, т.е. на расстояниях от конца полубесконечного волновода, превышающих длину формирования поля излучаемых волн /4/. Как показал расчет, при $\beta \frac{w}{k} > 1$ и при релятивистских скоростях движения сгустка ($\gamma \gg 1$), электромагнитная "масса" его в области $z < 0$ больше, чем в области $z > 0$ и определяется суммой "масс" парциальных гармоник; она возрастает с увеличением скорости сгустка и сечения волновода. В частности, это справедливо для сгустков с постоянными зарядами и токами ($k = 0$). Численное исследование зависимости функции $\int d\sigma \cdot \bar{S}_z$ от скорости движения сгустка показало, что поте-

ри энергии на переходное излучение уменьшаются с ростом γ и

$$\left| \int d\sigma \bar{S}_z \right| < \left| \frac{d}{dt} \int dv \cdot \bar{W} \right|.$$

Таким образом, при перемещении сгустка из области $z < 0$ в область $z > 0$, как видно из уравнения /1/, избыток электромагнитной "массы" сгустка

$$\Delta \int_V dv \cdot \vec{W} = - \left\{ \int_V dv \cdot \vec{W} \Big|_{z>0} - \int_V dv \cdot \vec{W} \Big|_{z<0} \right\} > 0$$

связан с увеличением кинетической энергии сгустка, причем лишь незначительная часть ее ($0,1 \int_V dv \cdot \vec{W}$) расходуется на излучение.

При обратном движении ($\beta < 0$) энергия индуцированного поля тратится на увеличение собственной электромагнитной энергии сгустка и на переходное излучение.

Необходимо отметить, что если ускоряющее поле создается не с помощью внешних полей, а в результате взаимодействия сгустка с неоднородностью системы, как в данной задаче, то имеет место фазовая фокусировка, и ускоряющая сила является когерентной. В работе ¹⁵ дан анализ эффективности подобного способа фазовой фокусировки в системах с большой напряженностью высокочастотного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. "Мир", М., 1974.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. "Наука", М., 1979.
3. Иркегулов А.Ш., Швачка А.Б. ОИЯИ, Р11-12661, Дубна, 1979.
4. Болотовский Б.М., Воскресенский Г.В. Дифракционное излучение. УФН, 1966, 88, в. 2, с. 209.
5. Файнберг Я.Б. О возможности одновременной радиальной и фазовой устойчивости в линейном ускорителе без специальных фокусирующих устройств. В сб.: "Теория и расчет линейных ускорителей", Госатомиздат, М., 1962, с. 161.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 ноября 1982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д13-11182	Труды IX Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна, 1977.	5 р. 00 к.
Д17-11490	Труды Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1977.	6 р. 00 к.
Д6-11574	Сборник аннотаций XV совещания по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1978.	2 р. 50 к.
Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Жидков Е.П., Уразаков Э.И., Швачка А.Б. P9-82-785
Расчет автоускорения кольцевого сгустка частиц с током в полубесконечной коаксиальной системе

Рассчитаны автоускоряющая сила, действующая на кольцевой сгусток с осцилирующим током, и изменение кинетической энергии при пролете им сечения сочленения круглого волновода с коаксиальной линией. Предсказывается значительный прирост энергии движения в случае, если уменьшение электромагнитной массы сгустка с большим числом частиц ($N > 10^{11}$) превосходит потери энергии на излучение. Прирост продольного импульса сгустка вычислен путем решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода методом регуляризации А.Н.Тихонова /1/.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Zhidkov E.P., Urazakov E.I., Shvachka A.B. P9-82-785
Computation of the Autoacceleration Force Acting on the Ring Bunch of Particles with a Current Moving along the Semiminfinite Coaxial System

The autoaccelerating force acting on the ring bunch of particles with oscillating current and the change of its kinetic energy as a result of passing through the section of the cylindrical waveguide with coaxial line are calculated. The considerable growth of the kinetic energy of bunch is predicted, if the decrease of the electromagnetic energy of bunch with large number of particles ($N > 10^{11}$) is greater than losses of energy as a result of radiation. As a result of solution the integral Fredholm equation of the first kind by Tikhonov's regularization method the growth of longitudinal impulse of bunch is calculated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.