

сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

71/83

3/1-83

P9-82-652

Ю.И.Алексахин

ВЫСШИЕ РЕЗОНАНСЫ  
ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
(ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ)

1982

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с разработкой систем фокусировки и транспортировки интенсивных ионных пучков для инициирования термоядерного синтеза, в последнее время вновь проявляется интерес к вопросам устойчивости пучков относительно электростатических флуктуаций<sup>/1-3/</sup>, ответственных, в частности, за увеличение эмиттанса при интенсивностях пучка, близких к предельным по пространственному заряду. В указанных работах исследованы поперечные колебания однокомпонентного пучка и обнаружены, для определенного класса функций распределения, собственные моды колебаний с отрицательной энергией. Наличие второго компонента, например, захваченных в ионный пучок электронов, может привести к неустойчивости при интенсивностях, существенно меньших предельных, вследствие связи колебаний с отрицательной энергией одного компонента пучка, и колебаний с положительной энергией другого.

Аналогичный эффект возможен в электронно-ионных кольцах, предназначенных для коллективного ускорения ионов. Развитие неустойчивости приведет к перераспределению плотности частиц /образованию сгустков/ в поперечном фазовом пространстве, что изменит силы, удерживающие ионы в электронном кольце.

Высшие резонансы электронно-ионных колебаний в одномерной модели исследовались /приближенно/ в работе<sup>/4/</sup> для ступенчатой функции распределения по энергии частиц. Неустойчивость интересующего нас типа может возникнуть, однако, только для функций распределения, нарастающих на каком-либо интервале энергий<sup>/3,5/</sup>.

В настоящей работе в рамках линейной теории возмущений исследуется устойчивость одномерных колебаний в электронно-ионном слое для частного случая постоянной плотности в невозмущенном слое, допускающего точное решение задачи.

## 2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЛОЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Задача о собственных модах потенциальных колебаний плотности равномерно заряженного слоя частиц была решена Ф.Дж.Сахерером<sup>/6/</sup>. Мы приведем здесь другое, более простое решение.

Пусть частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$ , совершающие колебания с частотой  $\omega$  в суммарном /создаваемом внешними источниками и самим слоем/ параболическом потенциале  $U(x)$ , образуют равномерно заряженный слой плотностью  $\rho_0$  и толщиной  $2a_0$ . Функция распределения по энергии частиц  $H$ , соответствующая такому состоянию

Объединенный институт

нию, имеет вид:

$$f_0(H) = \frac{\rho_0}{\pi e \sqrt{2m}} \cdot \frac{\sigma(H_0 - H)}{\sqrt{H_0 - H}}, \quad /1/$$

где  $H_0 = U(a_0) = m\omega^2 a_0^2/2$  - граничное значение энергии,  $\sigma(x) = 0$  для  $x < 0$ ,  $\sigma(x) = 1$  для  $x \geq 0$ . Предполагая, далее,  $H_0 \ll mc^2$  и переходя к переменным энергия - фаза, запишем кинетическое уравнение для бесконечно малых возмущений функции распределения в виде

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \omega \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \theta} = - \frac{p}{m} F^{(1)}(x, t) \frac{df_0}{dH}, \quad /2/$$

где  $F^{(1)} = eE^{(1)}$  - сила Лоренца, связанная с возмущением электрического поля,  $\theta = \omega t$ . Возврат к переменным координата-импульс осуществляется по формулам

$$x = \sqrt{\frac{2H}{m\omega^2}} \cos\theta, \quad p = -\sqrt{2mH} \sin\theta. \quad /3/$$

Возмущение плотности заряда и связанное с ним электрическое поле определяются соотношениями

$$\rho^{(1)}(x) = e \int_{U(x)}^{\infty} dH \sqrt{\frac{m}{2H}} \frac{f^{(1)}(\theta) + f^{(1)}(2\pi - \theta)}{\sin\theta}, \quad /4/$$

$$E_s^{(1)}(x) = 4\pi \int_{-\infty}^x \rho^{(1)}(x') dx'. \quad /5/$$

В случае гармонической зависимости возмущенных величин от времени ( $f^{(1)} \sim e^{-i\Omega t}$ ) из /2-5/ нетрудно получить /7/

$$E_s^{(1)}(x) = \frac{8\pi e}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dx' F^{(1)}(x') \int_{U_{\max}}^{\infty} dH \cdot \frac{df_0}{dH} \cdot \frac{\sin a(\pi - \theta)}{a \sin \pi a} \cdot \frac{\sin a(\pi - \theta)}{a \sin \pi a} \quad /6/$$

где

$$a = \Omega/\omega, \quad \theta_> = \max\{\theta, \theta'\}, \quad \theta_< = \min\{\theta, \theta'\}, \quad U_{\max} = U(x_>).$$

Для того, чтобы совершить следующий шаг, представим произведение синусов в /6/ в виде

$$\frac{a}{2} \int_0^\pi d\phi \cdot \sin a(\pi - \phi) J(\phi), \quad /7/$$

где  $J(\phi) = \sigma[\cos\phi - \cos(\theta + \theta')] \sigma[\cos(\theta - \theta') - \cos\phi]$ , или, переходя от переменных  $\theta, \theta'$  к  $x, x'$ ,

$$J(a, \phi) = \sigma(a - a_{\phi}), \quad a_{\phi} = \frac{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos\phi}}{\sin\phi}.$$

Подставляя теперь /7/ в /6/ и меняя порядок интегрирования, получим

$$E_s^{(1)}(x) = - \frac{4\pi e}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dx' F^{(1)}(x') \int_0^\pi d\phi \frac{\sin a(\pi - \phi)}{\sin \pi a} f_0[U(a_{\phi})], \quad /8/$$

где  $U(a) = m\omega^2 a^2/2$ . До сих пор конкретный вид функции распределения  $f_0(H)$  не был учтен; единственное существенное требование, необходимое для вывода /8/ - параболичность суммарного потенциала  $U(x)$ . Используя теперь /1/ и соотношения /8/,

$$\frac{\sin a\phi}{\sin \pi a} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{P_n(\cos\phi)}{\lambda_n(a) \|P_n\|^2}, \quad /9/$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi P_n(xx' - \sqrt{(1-x^2)(1-x'^2)} \cos\phi) = P_n(x) P_n(x'), \quad /10/$$

после несложных преобразований приведем /8/ к виду

$$E_s^{(1)}(x) = \frac{e^2}{\omega} \int_{-1}^1 dx' F^{(1)}(x') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x) P_n(x')}{\lambda_n(a) \|P_n\|^2}, \quad /11/$$

где  $P_n(x)$  - полином Лежандра  $n$ -го порядка; под  $x$ , для сокращения записи, подразумевается безразмерное отношение  $x/a_0$ ,  $a^2 = 4\pi e \rho_0/m\omega^2 = \omega_p^2/\omega^2$ . Первые два собственных значения равны

$$\lambda_0(a) = a^2 - 1, \quad \lambda_1(a) = a^2 - 2^2, \quad /12/$$

а последующие определяются рекуррентным соотношением

$$\lambda_n(a) = \lambda_{n-2}(a) \cdot \frac{a^2 - (n+1)^2}{a^2 - (n-2)^2}. \quad /12/$$

Предположим теперь, что полное электрическое поле  $E^{(1)}$  является суперпозицией внешнего приложенного поля  $E_{ext}^{(1)}$  /аналог электрической индукции/ и собственного  $E_s^{(1)}$ . Тогда, при пространствен-

ной зависимости  $E^{(1)} \sim P_n(x)$ , можно ввести диэлектрическую проницаемость слоя  $\epsilon_n = E_{ext}^{(1)}/E^{(1)}$ , которая, согласно /11/, оказывается равной

$$\epsilon_n = 1 - \frac{\kappa^2}{\lambda_n(\alpha)}. \quad /13/$$

Собственные частоты колебаний слоя определяются обычным уравнением  $\epsilon = 0$ . Это уравнение сводится к алгебраическому уравнению порядка  $N = [n/2] + 1$  относительно  $\alpha^2 = (\Omega/\omega)^2$  и имеет, соответственно,  $N$  решений  $\alpha_{nm}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ . На рис.1 представлена зависимость собственных безразмерных частот  $\alpha_{nm}$  от параметра плотности  $\kappa$  для  $n = 0, 2, 4$ .

Решения для  $n=0$  и  $n=1$  имеют очевидный физический смысл. Учитывая, что  $\omega^2 = \omega_{ext}^2 - \omega_p^2$ , где  $\omega_{ext}$  – частота колебаний во внешнем потенциале, для  $n=0$  имеем  $\alpha^2 = 1 + \kappa^2$ , или, возвращаясь к частотам,

$$\Omega^2 = \omega^2 + \omega_p^2 = \omega_{ext}^2, \quad ,$$

то есть слой как целое совершает колебания с частотой внешней ямы. Для  $n=1$  – осцилляций ширины слоя – имеем  $\alpha^2 = 4 + \kappa^2$  или

$$\Omega^2 = 4\omega_{ext}^2 - 3\omega_p^2.$$

При  $\omega_p^2 \rightarrow 0$   $\Omega = 2\omega_{ext}$ , что соответствует известному результату, – частота колебаний огибающей слаботочного пучка равна удвоенной частоте колебаний отдельных частиц.

Для  $n > 2$  спектр собственных частот включает основную частоту  $\alpha_{n1}$ , растущую с увеличением плотности частиц пропорционально  $\kappa$ , начиная со значения  $\alpha_{n1}(\kappa=0) = n+1$ , а также  $N-1$ , где  $N = [n/2]+1$ , побочную частоту  $\alpha_{nk}$ ,  $k = 2, \dots, N$ . С ростом  $\kappa$  от 0 до  $\infty$   $\alpha_{nk}$  монотонно убывает от значения  $n+3-2k$  до  $n+2-2k$ .

Разложив  $f^{(1)}(H, \theta)$  в ряд Фурье по  $\theta$ , для  $\Omega = \ell\omega$  и  $E^{(1)} \sim c_{nl} P_n(x)$ , оставляя максимальный член ряда, получим

$$f^{(1)}(H, \theta) = c_{nl} \sqrt{\frac{2H}{m}} \cdot \frac{df_0}{dH} \cdot \frac{e^{i\ell\theta}}{\Omega - \ell\omega} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_n\left(\frac{a(H)}{a_0} \cos\theta'\right) \sin\theta' \sin\theta' d\theta'. \quad /14/$$

На рис.2 показаны коэффициенты Фурье  $f_{nl}^{(1)}(H)$  для  $n=6$  и  $\ell = 1, 3, 5, 7$ . Возмущение плотности частиц в фазовом пространстве можно представить следующим образом. Имеется  $(n-\ell+3)/2$  "энергетических уровней" /соответствующих максимумам  $|f_{nl}^{(1)}(H)|$ , на каждом из которых находится  $\ell$  сгустков, совершающих колебания с невозмущенной частотой  $\omega$ . Итак, при  $\kappa \ll 1$  и  $n \geq 2$  колебания плотности слоя на собственной частоте  $\alpha_{nk}$  соответствуют движению  $k \cdot (n+3-2k)$  сгустков, где  $k = 1, 2, \dots, N$ .

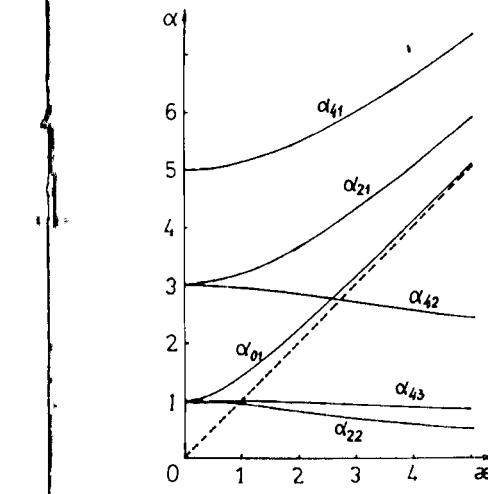


Рис.1

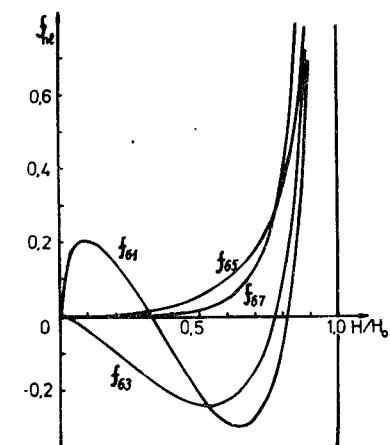


Рис.2

Обратимся теперь к энергетическим соотношениям. Как известно /8/, энергия колебаний пропорциональна производной  $d(\Omega\epsilon)/d\Omega$ . Нетрудно убедиться, что энергия колебаний на основной частоте положительна, в то время как на побочных – отрицательна. Следует ожидать поэтому, что при небольших отклонениях функции распределения от /1/ нелинейная связь мод с положительной и отрицательной энергиями приведет к неустойчивости слоя при некоторых значениях параметра  $\kappa$ .

Здесь же мы рассмотрим неустойчивость электронно-ионных слоев, имеющую место при совпадении побочной частоты электронных колебаний с основной частотой ионных колебаний.

### 3. РЕЗОНАНСЫ ЭЛЕКТРОННО-ИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть электроны, движущиеся со скоростью  $v = c\beta$  вдоль оси  $y$ , образуют равномерно-заряженный слой толщины  $2a_0$ , совпадающий со слоем /также равномерно-заряженным/ ионов, совершающих только колебания по оси  $x$ . Частоты колебаний ионов и электронов даются выражениями

$$\omega_e^2 = \omega_{ei}^2 + \omega_{ext}^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{y^2}, \quad \omega_i^2 = \omega_{ie}^2 - \omega_{pi}^2, \quad /15/$$

где  $y = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  – релятивистский фактор направленного движения электронов,  $\omega_{ei}^2 = -4\pi e\rho_{0i}/m_y$  – квадрат частоты колебаний элект-

ронов в поле ионов,  $\omega_{pe}^2 = 4\pi e Z \rho_{0e} / M$  - квадрат частоты колебаний ионов в создаваемой электронами потенциальной яме,  $Z$  и  $M$  - зарядность и масса ионов,  $\omega_{pe,i}$  - плазменные частоты электронов и ионов /для электронов явно учтена компенсация кулоновского растягивания магнитным стягиванием/. Функции распределения как ионов, так и электронов имеют вид /1/ с граничными значениями энергии  $H_{0e} = \mu \omega_e^2 a_0^2 / 2$ ,  $H_{0i} = M \omega_i^2 a_0^2 / 2$ .

Рассмотрим возмущение плотности слоев, имеющее вид бегущей волны  $E^{(1)} \sim \exp(iky - i\Omega t)$ . Нетрудно показать, что в квазистатическом пределе ( $ka_0 \ll 1$ ,  $\Omega a_0 / c \ll 1$ ) связь между электрическим полем, связанным с возмущением плотности частиц данного сорта и действующей на них силой Лоренца дается тем же соотношением /11/, в котором параметр  $\alpha$  принимает значения  $\alpha_e = (\Omega - kv) / \omega_e$  для электронов и  $\alpha_i = \Omega / \omega_i$  для ионов. Учитывая теперь, что

$$F_e^{(1)} = e(E_e^{(1)})/y^2 + E_i^{(1)}; \quad F_i^{(1)} = -eZ(E_i^{(1)} + E_e^{(1)}),$$

для собственных частот колебаний с  $E^{(1)} \sim P_n(x)$ , получим дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\gamma^2 \omega_e^2 \lambda_n(\alpha_e)} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_i^2 \lambda_n(\alpha_i)} + \frac{\beta^2 \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2}{\omega_e^2 \omega_i^2 \lambda_n(\alpha_e) \lambda_n(\alpha_i)} = 1. \quad /16/$$

Для дипольных ( $n=0$ ) и квадрупольных ( $n=1$ ) колебаний уравнение /16/ приводится к стандартной форме /4/. Отличительной особенностью этих колебаний является то, что их неустойчивость возможна только при  $k \neq 0$ . В противоположность этому высшие моды колебаний ( $n \geq 2$ ) могут быть неустойчивы и при  $k=0$ , когда перекачка энергии из направленного движения электронов в поперечные колебания не происходит. Неустойчивость в этом случае, как уже отмечалось, обусловлена связью колебаний с отрицательной энергией одной из компонент слоя и колебаниями с положительной энергией другой. Для простоты положим, далее, что выполнено условие  $|\rho_{0e}| \gg |\rho_{0i}| \gg |\rho_{00}| / y^2$ , обеспечивающее  $\omega_{ei}^2 \gg \omega_{pe}^2 / y^2$ ,  $\omega_{ie}^2 \gg \omega_{pi}^2$  и позволяющее упростить дисперсионное уравнение ввиду малости первых двух членов в левой части /16/ по сравнению с третьим. Для самофокусирующихся слоев ( $\omega_{ext} = 0$ )  $\beta^2 \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2 = \omega_e^2 \omega_i^2$  и дисперсионное уравнение /16/ сводится к

$$\lambda_n(\alpha_e) \lambda_n(\alpha_i) = 1. \quad /17/$$

Пусть

$$\omega_e^2 / \omega_i^2 \approx \omega_{ei}^2 / \omega_{ie}^2 = M \rho_{0i} / (Z m y |\rho_{0e}|) = \xi$$

- отношение плотностей масс ионов и электронов //загрузка// - больше 1. Тогда резонанс электронно-ионных колебаний возможен

при

$$\Omega = (n+1)\omega_i \approx j\omega_e + kv, \quad /18/$$

где  $j = 2\ell + 1$ ,  $\ell = 0, 1, \dots, (m-1)$  для  $n=2m$  и  $j = 2\ell - \ell = 1, \dots, m$  для  $n=2m+1$ . Для приближенного решения уравнения /17/ воспользуемся разложением собственных значений  $\lambda_n(\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow j$ :

$$\lambda_n(\alpha) |_{\alpha \rightarrow j} = c_{nj}(\alpha - j),$$

$$c_{nj} |_{j \leq n-3} = - \frac{(n-j+1)!! (n+j+1)!!}{j(n-j-2)!! (n+j-2)!!}, \quad /19/$$

$$c_{n,n-1} = - \frac{2^{n+1} n!}{(n-1)(2n-3)!!},$$

$$c_{n,n+1} = \frac{2^{n+1} n!}{(2n-1)!!}.$$

Решения уравнения /17/ в интересующей нас области частот /18/ записываются тогда в виде

$$\Omega = \frac{1}{2} [(n+1)\omega_i + (kv + j\omega_e)] \pm \sqrt{\frac{1}{4} [(n+1)\omega_i - (kv + j\omega_e)]^2 + \frac{\omega_e \omega_i}{c_{n,n+1} c_{nj}}}. \quad /20/$$

Инкремент неустойчивости максимальен при точном выполнении равенства /18/:

$$\Gamma_{nj} = (\text{Im } \Omega)_{\max} = \sqrt{\frac{\omega_e \omega_i}{c_{n,n+1} |c_{nj}|}}. \quad /21/$$

Резонансная полоса определяется, согласно /20/, условием

$$|(n+1)\omega_i - (kv + j\omega_e)| \leq 2\Gamma_{nj}. \quad /22/$$

Максимальный инкремент /21/ явно не зависит от продольного волнового числа  $k$ . Выражая, однако,  $\omega_e$  через  $\omega_i$  и  $kv$  и считая  $\omega_i$  /то есть плотность электронов/ фиксированной величиной, получим

$$\Gamma_{nj} = \omega_i \sqrt{\frac{(n+1) - kv/\omega_i}{jc_{n,n+1} |c_{nj}|}}.$$

/23/

Инкремент нарастания волн, распространяющихся в одном направлении с электронами ( $kv > 0$ ), падает с ростом  $|k|$ , то есть с уменьшением длины волны. Заметим также, что в отличие от квадрупольных и дипольных колебаний, для колебаний с  $n \geq 2$  неустойчива и обратная волна  $kv < 0$ .

Для электронно-ионных колец постоянная распространения  $k$  принимает дискретный набор значений  $k = l/R$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   $R$  - радиус кольца. При этом  $kv/\omega_i = l/Q_i$ , где  $Q_i$  - отношение ионной частоты к частоте обращения электронов. Поскольку для реальных колец  $Q_i \ll 1$ , то при положительных  $l \geq 1$  колебания с малыми  $n$  вообще не возбуждаются, а с  $n > l/Q_i$  сильно подавлены. При отрицательных  $l \leq -1$  резонансы могут иметь место только при очень больших значениях загрузки  $\xi > l^2/Q_i^2$ . Наибольший интерес поэтому представляет случай  $k=0$ . В таблице приведены значения безразмерного инкремента  $\gamma_{nj} = \Gamma_{nj}/\omega_i$  для  $n=2 \text{--} 11$ . Величина загрузки, соответствующая резонансу с данными  $n, j$ , определяется соотношением

$$\xi = \left( \frac{n+1}{j} \right)^2.$$

Таблица

Относительный инкремент  $\gamma_{nj}$  /четным  $n$  соответствуют нечетные значения индекса  $j$ , и наоборот/

$n$	$j$	1/2/	3/4/	5/6/	7/8/	9/10/
2		0,1875				
3		0,1398				
4		0,0731	0,1155			
5		0,0600	0,1005			
6		0,0439	0,0520	0,0900		
7		0,0378	0,0464	0,0822		
8		0,0307	0,0337	0,0422	0,0761	
9		0,0273	0,0306	0,0390	0,0711	
10		0,0233	0,0247	0,0282	0,0364	0,0670
11		0,0211	0,0227	0,0262	0,0342	0,0636

Как следует из таблицы, при данном  $\xi$  инкремент максимальен для наименьшего из возможных  $n$  и, соответственно,  $j$ . Число образующихся при этом электронных сгустков  $N \approx \sqrt{\xi}/2$ .

Рассмотренная неустойчивость характеризуется весьма малым временем развития. Так, при типичных для электронно-ионных колец параметрах  $\omega_i \sim 10^9 \text{ с}^{-1}$  и  $\xi = 50 \div 100$   $\tau = \Gamma_{n1}^{-1} \sim 20 \text{ нс}$ . Представляет интерес возможность захвата ионов в электронные сгустки на нелинейной стадии развития неустойчивости и разбиения исходного слоя на совокупность электронно-ионных слоев с более высокой плотностью.

В заключение автор выражает признательность Н.Ю.Казаринову и Э.А.Перельштейну за многочисленные и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hoffmann I. Nucl. Instr. and Meth., 1981, 178, p.281.
2. Hoffmann I. Phys. Fluids, 1980, 23, p.296.
3. Hoffmann I. Part. Accel., 1980, 10, p.253.
4. Зенкевич П.Р., Кошкарев Д.Г. Part. Accel., 1972, 3, p.1.
5. Локуциевский О.В. и др. Препринт ИПМ АН СССР №75, М., 1974.
6. Sacherer F.J. UCRL-18454, Berkeley, Calif., 1968.
7. Harker K.J. Phys. Fluids, 1965, 8, p.1846.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел  
3 сентября 1982 года.

Алексахин Ю.И.

P9-82-652

Высшие резонансы электронно-ионных колебаний /одномерная модель/

В рамках линейной теории возмущений исследуются колебания плотности равномерно заряженных электронно-ионных слоев с совпадающими границами. За основу принято найденное Ф.Дж.Сахерером точное решение задачи о потенциальных колебаниях в слое заряженных частиц постоянной плотности. Обнаружено, что электронно-ионные слои подвержены резонансной неустойчивости, сопровождающейся образованием сгустков в фазовом пространстве. Вычислены ширины резонансных полос и инкременты неустойчивости.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982 .

Alexahin Yu.I.

P9-82-652

High-Order Resonances of Electron-Ion Oscillations (One-Dimensional Model)

Density oscillations of uniformly charged electron-ion layers with coincident boundaries are studied in the framework of the linear perturbation theory. The consideration is based on the strict solution of the problem of electrostatic oscillations in the layer of charged particles with uniform density, discovered by F.J.Sacherer. It is found that electron-ion layers are subjected to resonance instability which leads to forming clusters in the phase space. The resonance widths and the instability growth rates are calculated.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.