объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P9-82-571

А.Г.Бонч-Осмоловский

СКИН-ЭФФЕКТ В ПРОВОДНИКЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Направлено в "Журнал технической физики"

1982

В начале 50 гг. при создании эталонных приборов для измерения токов высокой частоты /ампер- и миллиамперметров термоэлектрической системы/ важное значение имело выяснение вопроса о частотной зависимости активного сопротивления проводников и нахождение такой формы поперечного сечения нагревательных проводящих элементов измерительной части, чтобы в определенном диапазоне частот их активное сопротивление с заданной точностью не зависело от частоты.

Прямыми экспериментами и теоретически было выяснено, что тонкая проводящая лента для этой цели не подходит, какой бы тонкой она ни была /даже при толщине, гораздо меньшей глубины скин-слоя/. Теперь известно, что сформулированному требованию может удовлетворить тонкостенный трубчатый проводник.

Решение задачи о скин-эффекте в проводнике прямоугольного поперечного сечения и частотной зависимости его активного сопротивления, полученное автором в 1952-53 гг., не было опубликовано.

В последнее время эта задача приобрела дополнительный интерес в связи с экспериментами по получению мегаэрстедных магнитных полей [1,2]. Решение, приводимое ниже, может оказаться полезным для интерпретации ряда эффектов, возникающих при прохождении импульсов тока с амплитудой до 1 МА и длительностью порядка 1 мкс через соленоиды малого объема.

Пусть поперечное сечение проводника представляет собой прямоугольник со сторонами a и b; соответствующие декартовы координаты обозначим x и y /сечение проводника определено так:

$$-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}; \quad -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2} /.$$

При обычных предположениях о квазистационарности электромагнитных полей [3] задача о скин-эффекте сводится к нахождению распределения тока по сечению проводника согласно уравнению для плотности тока:

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} = \frac{4\pi i\omega\sigma}{c^2} j(x, y). \qquad /1/$$

Здесь σ -проводимость материала проводника, ω - циклическая частота изменения поля, i - мнимая единица. Будем решать уравнение /1/ методом разделения переменных, записывая функцию $j(x, y)$ в виде

$$j(x, y) = j_1(x) \cdot j_2(y). \qquad /2/$$

Подставим /2/ в /1/ и перегруппируем в /1/ члены:

$$\frac{1}{j_1}\frac{d^2 j_1}{dx^2} - ip^2 = -\frac{1}{j_2}\frac{d^2 j_2}{dy^2} + ip^2, \quad p^2 = \frac{2\pi\omega\sigma}{c^2}. \qquad /3/$$

Так как левая часть /3/ не зависит от y, а правая - от x, они должны равняться постоянной; обозначим ее C. Следовательно, имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения для функций $j_1(x)$ и $j_2(y)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 j_1}{dx^2} &= (ip^2 + C) j_1(x), \\ \frac{d^2 j_2}{dy^2} &= (ip^2 - C) j_2(y). \end{aligned}\right\} \qquad /4/$$

Теперь можно поставить граничные условия. Функция $j_1(x)$ должна быть постоянной на одной паре сторон прямоугольника $(x = \pm\frac{a}{2})$, функция $j_2(y)$ - на другой паре $(y = \pm\frac{b}{2})$:

$$j_1|_{x=\pm a/2} = j_{10}; \quad j_2|_{y=\pm b/2} = j_{20}. \qquad /5/$$

Решение уравнений /4/ с учетом /5/ проводится элементарно. Результат таков:

$$j(x, y) = j_{10}\, j_{20}\, \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{ip^2 + C}}{\operatorname{ch}\frac{a}{2}\sqrt{ip^2 + C}} \cdot \frac{\operatorname{ch} y\sqrt{ip^2 - C}}{\operatorname{ch}\frac{b}{2}\sqrt{ip^2 - C}}. \qquad /6/$$

Определим постоянную C и выясним физический смысл произведения постоянных $j_{10} \cdot j_{20}$ в /6/ с помощью предельного перехода к постоянному току. Положим в /6/ $p, \omega \to 0$. При этом плотность тока должна быть постоянной по сечению проводника, обозначим ее j_0:

$$j|_{\omega \to 0} = j_0. \qquad /7/$$

Так как /6/ при $p \to 0$ имеет вид

$$j(x, y) = j_{10} j_{20} \frac{\operatorname{ch} x\sqrt{C}}{\operatorname{ch}\frac{a}{2}\sqrt{C}} \cdot \frac{\operatorname{ch} y\sqrt{-C}}{\operatorname{ch}\frac{b}{2}\sqrt{-C}}, \qquad /8/$$

то, используя /7/, приходим к выводу, что постоянную C надо положить равной нулю, а $j_{10} j_{20} = j_0$.

Окончательно получаем для плотности тока в произвольной точке (x, y) поперечного сечения проводника при частоте его изменения $\omega \neq 0$:

$$j(x,y)=j_0\,\frac{\operatorname{ch}\frac{xp}{\sqrt{2}}(1+i)}{\operatorname{ch}\frac{ap}{2\sqrt{2}}(1+i)}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{yp}{\sqrt{2}}(1+i)}{\operatorname{ch}\frac{bp}{2\sqrt{2}}(1+i)}\,. \qquad /9/$$

Для того, чтобы избавиться от комплексных выражений, определим модуль плотности тока; нетрудно показать, что

$$\left|\frac{j}{j_0}\right|=\left[\frac{\operatorname{ch}\frac{2xp}{\sqrt{2}}+\cos\frac{2xp}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch}\frac{ap}{\sqrt{2}}+\cos\frac{ap}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{2yp}{\sqrt{2}}+\cos\frac{2yp}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch}\frac{bp}{\sqrt{2}}+\cos\frac{bp}{\sqrt{2}}}\right]^{1/2}. \qquad /10/$$

Каждый сомножитель по отдельности в квадратной скобке /10/ определяет распределение поверхностной плотности тока на соответствующих сторонах прямоугольной проводящей полосы. Из формулы /10/ ясно, что на высоких частотах /глубина скин-слоя $\delta=\frac{1}{p}=\frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\sigma}}\ll a,b$/ ток сосредоточивается в углах полосы и равен там j_0 -плотности постоянного тока . Если один из размеров поперечного сечения гораздо меньше глубины скин-слоя, например

$$a\ll\delta\,, \qquad /11/$$

то плотность тока по толщине постоянна, а по ширине тонкой ленты распределена по закону:

$$|j(y)|=j_0\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{2}\,y}{\delta}+\cos\frac{\sqrt{2}\,y}{\delta}}{\operatorname{ch}\frac{b}{\sqrt{2}\,\delta}+\cos\frac{b}{\sqrt{2}\,\delta}}}\,,\quad |y|\le\frac{b}{2}\,. \qquad /12/$$

Таким образом, ток по мере увеличения частоты оттесняется на края ленты, неограниченно убывая в средней ее части /в любой точке $|y|<\frac{b}{2}$ /.

Этот результат показывает, что обычно используемый подход к задаче о скин-эффекте в плоской тонкой пластине, заключающийся в пренебрежении координатной зависимостью тока вдоль широкой стороны тонкой ленты, неправомерен. Он эквивалентен для этого случая сведению уравнения /1/ к одномерному, но задача остается двумерной и при значительном превышении одной стороны прямоугольника над другой.

Наконец, получим явное выражение для активного сопротивления проводника единичной длины с прямоугольной формой поперечного сечения.

Так как в нашей задаче электрическое поле неоднородно по периметру сечения проводника, определим импеданс /комплексное сопротивление/ единицы длины проводника как отношение средней по периметру сечения напряженности продольного электрического поля к полному току, протекающему через поперечное сечение проводника:

$$\bar{E}=\frac{\bar{j}}{\sigma}=\frac{j_0}{\sigma}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{\operatorname{ch}\frac{xp}{\sqrt{2}}(1+i)}{\operatorname{ch}\frac{ap}{2\sqrt{2}}(1+i)}dx+\frac{j_0}{\sigma}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{\operatorname{ch}\frac{yp}{\sqrt{2}}(1+i)}{\operatorname{ch}\frac{bp}{2\sqrt{2}}(1+i)}dy=$$

$$=\frac{2j_0\sqrt{2}}{ap\sigma(1+i)}\operatorname{th}\frac{ap}{2\sqrt{2}}(1+i)+\frac{2j_0\sqrt{2}}{bp\sigma(1+i)}\operatorname{th}\frac{bp}{2\sqrt{2}}(1+i)\,. \qquad /13/$$

Теперь вычислим ток

$$J=\int_S j\,dxdy=-ij_0\frac{4}{p^2}\operatorname{th}\frac{ap}{2\sqrt{2}}(1+i)\cdot\operatorname{th}\frac{bp}{2\sqrt{2}}(1+i) \qquad /14/$$

и импеданс Z:

$$Z=\frac{\bar{E}}{J}=\frac{i\sqrt{2}p}{4a\sigma(1+i)\operatorname{th}\frac{bp}{2\sqrt{2}}(1+i)}+\frac{i\sqrt{2}p}{4b\sigma(1+i)\operatorname{th}\frac{ap}{2\sqrt{2}}(1+i)}\,. \qquad /15/$$

Выделим в /15/ вещественную часть - активное сопротивление:

$$R=\frac{\sqrt{2}\,p}{8a\sigma}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{bp}{2\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{bp}{2\sqrt{2}}+\cos\frac{bp}{2\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{bp}{2\sqrt{2}}}{\operatorname{sh}^2\frac{bp}{2\sqrt{2}}\cdot\cos^2\frac{bp}{2\sqrt{2}}+\operatorname{ch}^2\frac{bp}{2\sqrt{2}}\cdot\sin^2\frac{bp}{2\sqrt{2}}}+\text{ibid}\,(a\rightleftarrows b)\,. \qquad /16/$$

Выражение /16/ можно преобразовать и несколько упростить. Несложные выкладки приводят к окончательному выражению для активного сопротивления проводника единичной длины с проводимостью σ и сторонами поперечного сечения a и b на частоте ω ($p^2=\frac{2\pi\omega\sigma}{c^2}$):

$$R=\frac{\sqrt{2}\,p}{8a\sigma}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{bp}{\sqrt{2}}+\sin\frac{bp}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch}\frac{bp}{\sqrt{2}}-\cos\frac{bp}{\sqrt{2}}}+\frac{\sqrt{2}\,p}{8b\sigma}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{ap}{\sqrt{2}}+\sin\frac{ap}{\sqrt{2}}}{\operatorname{ch}\frac{ap}{\sqrt{2}}-\cos\frac{ap}{\sqrt{2}}}. \qquad /17/$$

При низких частотах $(\omega,p\to 0)$ это выражение стремится, как и должно быть, к величине сопротивления постоянному току проводника с прямоугольным поперечным сечением при равномерном распределении j по сечению прямоугольника:

$$R|_{p\to 0} \to \frac{1}{\sigma ab}. \qquad /18/$$

На высокой частоте $(\delta = \frac{1}{p} \ll a, b)$ выражение для R лишь постоянным коэффициентом отличается от сопротивления, например, круглого проводника $(R \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, c r_0}\sqrt{\frac{\omega}{\sigma}})$:

$$R|_{p\to\infty} \to \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{a+b}{cab}\sqrt{\frac{\omega}{\sigma}}. \qquad /19/$$

Формула /17/ показывает, что даже для тонкой ленты / $b > \delta$, $a \ll \delta$ / активное сопротивление сильно зависит от частоты:

$$R \simeq \frac{1}{2\sigma ab} + \frac{\sqrt{\pi}}{4ca}\cdot\sqrt{\frac{\omega}{\sigma}}. \qquad /20/$$

Автор благодарен В.И.Червяковой за поддержку и внимание при выполнении этой работы и И.М.Маторе за прочтение рукописи и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочаров Ю.Н., Кривошеев С.И., Шнеерсон Г.А. Письма в ЖТФ, 1982, т.8, вып. 4, с. 212.
2. Андрианов А.М. и др. Письма в ЖТФ, 1982, т. 8, вып.4, с.240.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Г.М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1957.

Рукоп[illegible] издательский отдел
21 июля 1982 года.

Бонч-Осмоловский А.Г. Р9-82-571

Скин-эффект в проводнике прямоугольного сечения.

Получено точное решение двумерной задачи о распределении квазистационарного тока по сечению проводника, представляющему собой прямоугольник с произвольным соотношением сторон.

Показано, что ток неоднороден по ширине тонкой ленты /толщина гораздо меньше глубины скин-слоя/, так что он неограниченно уменьшается с ростом частоты в любой средней точке ленты.

Вычислены также импеданс и активное сопротивление на единицу длины проводника с прямоугольным поперечным сечением, которые резко зависят от частоты при любых значениях параметров.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Bonch-Osmolovsky A.G. P9-82-571

Skin-Effect in a Conductor of Rectangular Cross Section

An exact solution of the problem about the high frequency current distribution over the cross section of conductor being a rectangular with arbitrary side ratio is performed. It is shown that in the case of a thin band /its thickness is considerably less than skin depth, so that it infinitely descreases with frequency growing in any middle point of the band. Impedance and effective are also calculated which strongly depend on frequency.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.