

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
Дубна

4900/82

P9-82-504

Д.Х. Динев

КОРРЕКЦИЯ ОРБИТЫ В СИНХРОТРОНАХ

Обзор

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

В идеальной периодической магнитной структуре существует замкнутая траектория - равновесная /замкнутая/ орбита^{1/}. Вокруг орбиты частицы совершают бетатронные и радиально-фазовые колебания. В реальной магнитной структуре из-за наличия разного рода ошибок /возмущений/, которые заранее неизвестны, равновесная орбита деформируется. Ее максимальное отклонение от идеальной орбиты /она совпадает с геометрической осью вакуумной камеры/ доходит до нескольких десятков миллиметров. Это отклонение неблагоприятно сказывается на работе систем ускорителя - системе инжекции, вывода и т.д. - и невыгодно с экономической точки зрения. Поэтому в современных ускорителях создают специальные системы, предназначенные для сведения отклонения орбиты от идеальной к минимуму. По существу, эти корректирующие системы вносят в магнитную структуру возмущения того же характера, только намеренно. Задача коррекции орбиты состоит в том, чтобы подобрать силу и положение этих намеренно вводимых возмущений, называемых коррекцией, так, чтобы орбита как можно меньше отклонялась от своего идеального положения.

В настоящем обзоре рассматривается проблема коррекции орбиты. В начале описывается характер ошибок, вызывающих деформацию орбиты, потом выводится уравнение орбиты и описываются методы его решения. Так как возмущения известны только статистически, то анализируются статистические характеристики возмущений и орбиты. Приводится классификация методов коррекции орбиты и подробно анализируется каждый метод.

2. ВОЗМУЩЕНИЯ

Ошибки, вызывающие деформацию равновесной орбиты, систематизированы в таблице. На существующих ускорителях относительная систематическая ошибка магнитного поля - порядка $5 \cdot 10^{-4}$. Такой же порядок имеет и относительная статистическая ошибка /среднеквадратическое отклонение/. Ошибка юстировки - порядка 0,1 мм как для горизонтальной, так и для вертикальной плоскости. Ошибка из-за движения грунта для горизонтальной плоскости - порядка 0,2 мм, а для вертикальной - порядка 0,1 мм.

Таблица
Источники ошибок

Вид	Постоянные	Пропорциональные магнитному полю	При максимальном поле
Случайные	Паразитные поля Ошибки в коэрцитивной силе	Ошибки юстировки Ошибки в апертуре Ошибки в длине магнитопровода Ошибки в магнитной проницаемости Ошибки в положении обмотки Ошибки из-за движения гоунта	Ошибки насыщения
Систематические	Паразитные поля Земное магнитное поле Ошибки из-за вихревых токов	Ошибки, происходящие из-за особенностей в конструкции магнитов	Ошибки насыщения

3. ГАМИЛЬТониАН ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Следуя традиционной методике, можно вывести гамильтониан поперечного движения при наличии возмущения типа описанного в разделе 2.

Для секторного магнитного поля с показателем спада n

$$H(x, x', z, z', \theta) = \frac{1}{2} x'^2 + \frac{1}{2} z'^2 + \frac{R^2(1-n)}{\rho^2} x^2 + \frac{R^2 n}{\rho^2} z^2 + R^2 \frac{\Delta B}{B_0 \rho} x + \frac{R^2}{\rho^2} n \Delta x x - \frac{R^2}{\rho^2} n \Delta z z, \quad /1/$$

где ρ - радиус кривизны в диполе; R - средний радиус; $B_0 \rho$ - магнитная жесткость. Для квадруполя

$$H(x, x', z, z', s) = \frac{1}{2} x'^2 + \frac{1}{2} z'^2 - \frac{1}{2} \frac{g}{B_0 \rho} x^2 + \frac{1}{2} \frac{g}{B_0 \rho} z^2, \quad /2/$$

где g - градиент.

В корректирующем диполе, где $n=0$ и $\Delta B_c \ll B_0$,

$$H = \frac{1}{2} x'^2 + \frac{1}{2} z'^2 + R^2 \frac{\Delta B_c}{B_0 \rho} x \quad /3/$$

4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Из приведенных в разделе 3 гамильтонианов следуют уравнения движения:

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + K_x(s) x = F_x(s), \quad /4/$$

где

$$K_x(s) = \begin{cases} \frac{1}{\rho^2} (1-n) & \text{для диполей,} \\ 0 & \text{для корректирующих диполей,} \\ \frac{g}{B_0 \rho} & \text{для квадруполей,} \end{cases} /5/$$

$$F_x(s) = \begin{cases} \frac{\Delta B_z}{B_0 \rho} - \frac{1}{\rho^2} n \Delta x & \text{для диполей,} \\ -\frac{\Delta B_c}{B_0 \rho} & \text{для корректирующих диполей,} \\ \frac{g \Delta x}{B_0 \rho} & \text{для квадруполей;} \end{cases} /6/$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + K_z(s) z = F_z(s), \quad /7/$$

где

$$K_z(s) = \begin{cases} \frac{n}{\rho^2} & \text{для диполей,} \\ 0 & \text{для корректирующих диполей,} \\ \frac{g}{B_0 \rho} & \text{для квадруполей.} \end{cases} /8/$$

$$F_z(s) = \begin{cases} \frac{1}{\rho^2} n \Delta z & \text{для диполей,} \\ -\frac{\Delta B_c}{B_0 \rho} & \text{для корректирующих диполей,} \\ \frac{g \Delta z}{B_0 \rho} & \text{для квадруполей.} \end{cases} /9/$$

Полезно отметить, что действие корректирующего диполя сводится к поворачиванию траектории на угол $(-\Delta B_c \ell / B_0 \rho)$.

5. РАВНОВЕСНАЯ ОРБИТА

Равновесная орбита описывается периодическим /с периодом L , равным длине орбиты/ решением уравнения движения /4/ и /7/. Для ее анализа удобно ввести новые переменные /2/: обобщенный азимут ϕ

$$\phi = \int_0^s \frac{ds}{Q\beta(s)} \quad /10/$$

и нормализованное отклонение η

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\beta}}. \quad /11/$$

Здесь $\beta(s)$ -бета-функция Твисса, размерность $\eta - м^{1/2}$.

Используя свойства $\beta(s)$, можно свести /3/ уравнение движения к уравнению вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2\eta}{d\phi^2} + Q^2\eta = Q^2f(\phi), \quad /12/$$

$$f(\phi) = \beta^{3/2}(\phi)F(\phi), \quad /13/$$

где Q - число бетатронных колебаний за оборот.

Используя метод варьирования интегральных констант для равновесной орбиты, можно получить /4/:

$$\eta = \frac{Q}{2\sin\pi Q} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(t) \cos Q(\phi + \pi - t) dt. \quad /14/$$

Орбиту можно найти и чисто графическим способом /18/. Для $Q = 5, 8$ и одного возмущения, локализованного в точке с азимутом ϕ_0 , графический метод иллюстрируется на рис.1.

Дальше мы будем рассматривать "сглаженный" ускоритель, для которого $1 \ll Q \ll \rho$. Для других ускорителей приведенные результаты справедливы только приближенно.

Так как $f(\phi) \approx 0$ вне магнитных элементов, то для сглаженного ускорителя интеграл в /14/ можно свести к сумме:

$$\eta(\phi_i) = \frac{Q}{2\sin\pi Q} \sum_{j=1}^{M+L} \bar{f}_j \Delta\phi_j \cos Q(\phi_i + \pi - \phi_j). \quad /15/$$

$\phi_i \leq \phi_j \leq \phi_i + 2\pi$

Здесь через M мы обозначили общее количество диполей, через L - количество квадрупольных линз; черта означает усреднение в рамках магнитного элемента.

Равенство /15/ удобно записать в следующем матричном виде:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{M+L} a_{ij} \delta_j, \quad /16/$$

$\phi_i \leq \phi_j \leq \phi_i + 2\pi$

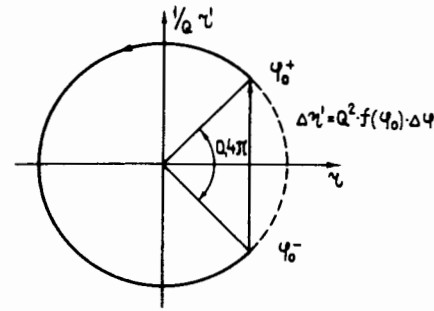


Рис.1. Графический метод нахождения орбиты.

где

$$a_{ij} = \cos Q(\phi_i + \pi - \phi_j), \quad /17/$$

$$\delta_j = \begin{cases} \frac{Q\beta_j^{3/2}\Delta\phi_j}{2\sin\pi Q B_{0\rho}} \Delta B_j - \frac{Q\beta_j^{3/2}n_j\Delta\phi_j}{2\sin\pi Q \rho_j^2} \Delta x_j & \text{для диполей,} \\ -\frac{Q\beta_j^{3/2}\Delta\phi_j}{2\sin\pi Q B_{0\rho}} \Delta B_{c j} & \text{для корректирующих диполей,} \\ +\frac{Q\beta_j^{3/2}g_j\Delta\phi_j}{2\sin\pi Q B_{0\rho}} \Delta x_j & \text{для квадрупольных.} \end{cases} \quad /18/$$

Размерность $\delta - м^{1/2}$.

К уравнению /12/ можно подойти и на основе гармонического анализа. Разложим $\eta(\phi)$ в ряд Фурье:

$$\eta(\phi) = \frac{u_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k \cos k\phi + v_k \sin k\phi), \quad /19/$$

а также возмущения $f(\phi)$:

$$f(\phi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_k \cos k\phi + g_k \sin k\phi). \quad /20/$$

Из уравнения /12/ следует связь между коэффициентами Фурье:

$$u_0 = f_0,$$

$$u_k = \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2}\right) f_k, \quad /21/$$

$$v_k = \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2}\right) g_k.$$

Конечно, матричный и гармонический анализ уравнения орбиты дают один и тот же результат. Это можно показать, используя /5/:

$$\cos Q(\phi_i + \pi - \phi_j) = (\sin \pi Q) \frac{2Q}{\pi} \left(\frac{1}{2Q^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(\phi_i - \phi_j)}{k^2 - Q^2} \right). \quad /22/$$

6. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВОЗМУЩЕНИЙ И ОРБИТЫ

Возмущения $\Delta B(\phi)$ и $\Delta x(\phi)$ – случайные функции обобщенного азимута. В ускорителе они являются суммами элементарных случайных функций вида $\Delta B_i \Pi_i(\phi)$, $\Delta x_i \Pi_i(\phi)$, где ΔB_i , Δx_i – случайные величины, а $\Pi_i(\phi)$ – единичные прямоугольные импульсы длиной $\Delta \phi_i$.

Случайные величины ΔB_i и Δx_i некоррелированы, нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и с дисперсиями $\sigma_{\Delta B}^2, \sigma_{\Delta x}^2$, одинаковыми для всех магнитных элементов. Разложим $\Delta B(\phi)$ в ряд Фурье:

$$\Delta B(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\phi + b_k \sin k\phi). \quad /23/$$

Амплитуды Фурье a_k и b_k – случайные величины. Они имеют нулевые математические ожидания и дисперсии:

$$D(a_0) = \sigma_{\Delta B}^2 \sum_{j=1}^M \left(\frac{\Delta \phi_j}{\pi} \right)^2, \quad /24/$$

$$D(a_k) = \sigma_{\Delta B}^2 \sum_{j=1}^M \left(\frac{\cos k\phi_j \Delta \phi_j}{\pi} \right)^2, \quad D(b_k) = \sigma_{\Delta B}^2 \sum_{j=1}^M \left(\frac{\sin k\phi_j \Delta \phi_j}{\pi} \right)^2.$$

Эти формулы можно упростить, учитывая существующую в ускорителе симметрию. Разделим все магниты на $M_p = M/p$ групп магнитов, имеющих одинаковое расположение в каждом периоде. Аналогично среди квадрупольных выделим $L_p = L/p$ групп линз. В рамках каждой группы $\beta_j = \text{const}$, $\Delta \phi_j = \text{const}$. Тогда из /24/ можно получить

$$D(a_k) = \frac{\sigma_{\Delta B}^2}{2\pi^2} \sum_{j=1}^{M_p} \Delta \phi_j^2, \quad /25/$$

$$D(a_0) = 2D(a_k), \quad D(b_k) = D(a_k).$$

то есть "белый" спектр.

Аналогичные результаты можно получить и для $\Delta x(\phi)$. Используя условия симметрии, можно показать также, что $M(a_k, b_k) = 0$, то есть что a_k и b_k статистически независимы.

Рассмотрим теперь статистические свойства орбиты. Из /16/ следует, что отклонение орбиты в данной точке η_i распределено нормально с нулевым математическим ожиданием и с дисперсией:

$$\sigma_{\eta}^2 = \left(\frac{Q}{2B_0 \rho \sin \pi Q} \right)^2 p \sigma_{\Delta B}^2 \sum_{j=1}^{M_p} \frac{\beta_j^3 \Delta \phi_j^2}{2} + \left(\frac{Q}{2 \sin \pi Q} \right)^2 p \sigma_{\Delta x B}^2 \sum_{j=1}^{M_p} \frac{n_j^2 \beta_j^3 \Delta \phi_j^2}{2 \rho_j^4} \quad /26/$$

$$+ \left(\frac{Q}{2B_0 \rho \sin \pi Q} \right)^2 p \sigma_{\Delta x g}^2 \sum_{j=1}^{L_p} \frac{g_j^2 \beta_j^3 \Delta \phi_j^2}{2}.$$

Чтобы получить /26/, использовали свойства симметрии ускорителя и рассмотрен "сглаженный" ускоритель. Суммирование ведется по магнитным элементам, имеющим одинаковое положение в каждом периоде.

Особенно важны статистические свойства максимального отклонения орбиты η_{\max} . Максимальное отклонение орбиты каждый раз получается в разной точке ϕ_{\max} и, конечно, не распределено нормально. Получить его статистические свойства в общем случае очень трудно. В /6/ дается их оценка.

Для случая, когда Q очень близко к целому числу k , из /21/ следует, что определяющей будет k -тая гармоника возмущения. Если рассматривать только действие k -той гармоники возмущения, то для распределения максимального отклонения орбиты можно получить точное решение /2,7,8/. В этом случае

$$\eta(\phi) = A \cos(Q\phi + a_k),$$

где

$$A^2 = u_k^2 + v_k^2.$$

Можно показать, что амплитуда A имеет распределение Рэлея:

$$p(A) = \frac{2A}{\sigma_A^2} e^{-\frac{A^2}{\sigma_A^2}}, \quad /27/$$

где дисперсия

$$\sigma_A^2 = 2\sigma_{u_k}^2 = 2\sigma_{v_k}^2. \quad /28/$$

Из /25/, /21/, /13/, /6/ следует, что

$$\sigma_{u_k}^2 = \sigma_{v_k}^2 = \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} \right)^2 \sigma_{i_k}^2, \quad /29/$$

$$\sigma_{i_k}^2 = \frac{2p\sigma_{\Delta B}^2}{(B_0 \rho)^2} \sum_{j=1}^{M_p} \beta_j^3 \left(\frac{\Delta \phi_j}{2\pi} \right)^2 + 2p\sigma_{\Delta x B}^2 \sum_{j=1}^{M_p} \frac{\beta_j^3 n_j^2}{\rho_j^4} \left(\frac{\Delta \phi_j}{2\pi} \right)^2 + \quad /30/$$

$$+ \frac{2p\sigma_{\Delta x g}^2}{(B_0 \rho)^2} \sum_{j=1}^{L_p} \beta_j^3 g_j^2 \left(\frac{\Delta \phi_j}{2\pi} \right)^2.$$

Интегральная функция распределения

$$\Phi(A) = 1 - e^{-\frac{A^2}{\sigma_A^2}} \quad /31/$$

Вероятность того, что амплитуда орбиты в k раз больше своего среднеквадратического отклонения, равна

$$F(k) = e^{-k^2}$$

Лучшее приближение получится, если учитывать две гармоники возмущения $k < Q < (k+1)$. Тогда

$$\eta(\phi) = (u_k + u_{k+1} \cos \phi + v_{k+1} \sin \phi) \cos k \phi + (v_k - u_{k+1} \sin \phi + v_{k+1} \cos \phi) \sin k \phi,$$

т.е. представляет собой гармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой. Можно, следовательно, записать

$$A^2(\phi) = (u_k + u_{k+1} \cos \phi + v_{k+1} \sin \phi)^2 + (v_k - u_{k+1} \sin \phi + v_{k+1} \cos \phi)^2 \quad /32/$$

Из /32/ можно найти максимальную амплитуду:

$$A = \max A(\phi) = r_k + r_{k+1}, \quad /33/$$

где

$$r_k^2 = u_k^2 + v_k^2, \quad r_{k+1}^2 = u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2 \quad /34/$$

Как было уже сказано, r_k, r_{k+1} - случайные величины с распределением Рэлея. Статистически они независимы. В /6/ выводится формула для дисперсии максимальной амплитуды:

$$\sigma_A^2 = R_k^2 + \frac{\pi}{2} R_k R_{k+1} + R_{k+1}^2, \quad /35/$$

где

$$R_k^2 = 2\sigma_{u_k}^2, \quad R_{k+1}^2 = 2\sigma_{u_{k+1}}^2,$$

то есть являются дисперсиями амплитуды при учете только k -той или только $(k+1)$ -й гармоники возмущения.

В /6/ также показано, что вероятность того, что амплитуда будет больше $A - F(A)$, равна

$$F(A) = 2\sqrt{\pi} \frac{R_k R_{k+1}}{R_k^2 + R_{k+1}^2} \frac{A}{\sqrt{R_k^2 + R_{k+1}^2}} e^{-A/(R_k^2 + R_{k+1}^2)} \quad /36/$$

Как показано в /8/, хорошее совпадение аналитических результатов с данными моделирования орбиты на ЭВМ получается, если учитывать 3 или 4 гармоники возмущения. Этот случай связан с большими математическими трудностями и для него в /8/ получена приближенная оценка дисперсии максимального отклонения σ_A^2 и вероятности $F(A)$, что это отклонение будет больше A :

$$\frac{\sigma_A^2}{\Sigma R_j^2} = \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{\sum_{i \neq j} R_i R_j}{\Sigma R_j^2}\right), \quad /37/$$

$$F(A) = (4\pi)^{\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^m \left(\frac{R_j}{\sqrt{\Sigma R_j^2}}\right) e^{-A^2/\Sigma R_j^2} \sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{(-1)^i (m-1)!}{2^{2i} i! (m-1-2i)!} \times \left(\frac{A}{\sqrt{\Sigma R_j^2}}\right)^{m-1-2i}, \quad /38/$$

где m - число используемых гармоник.

7. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ КОРРЕКЦИИ ОРБИТЫ

Общая блок-схема коррекции орбиты дана на рис.2. На рис.3 дана классификация методов коррекции орбиты. Основная особенность коррекции орбиты состоит в том, что мы знаем не все возмущения ΔB и ΔX , а только их часть. Обычно число сигнальных электродов намного меньше числа диполей и квадруполей. Следовательно, из показаний сигнальных электродов мы можем узнать только часть возмущений - коррекция в условиях неопределенности.

Локальные методы коррекции корректируют орбиту только на части периметра ускорителя. Вне этой части орбита не изменяется. Общие методы коррекции корректируют орбиту по всему периметру. Их можно разделить на две большие группы: методы с коррекцией по возмущению и методы с коррекцией по отклонению. В первой группе измеряют часть возмущений и создают такие управляющие воздействия, которые их компенсируют. Во второй группе методов измеряют отклонение орбиты в $2N$ точках. Сюда входят одношаговые, многошаговые и динамические методы коррекции.

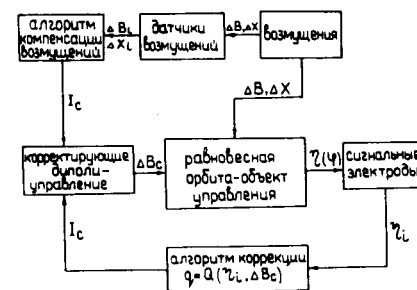


Рис.2. Блок-схема коррекции орбиты.

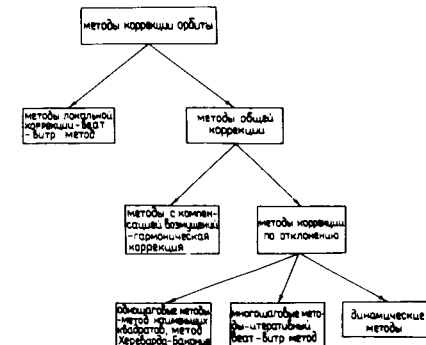


Рис.3. Классификация методов коррекции орбиты.

Из /45/ следует, что оптимальное расстояние между корректора-ми равно $\mu = \pi/2$, когда $\epsilon_2 \approx 0$.

9. ГАРМОНИЧЕСКИЙ МЕТОД

Это метод коррекции /12-14/ по возмущению. Измеряются первые N гармоник возмущения. Для этого используются показания сиг-нальных электродов, измеряющих орбиту в $2N$ точках:

$$\eta(\phi_i) = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2N). \quad /48/$$

На основе /48/ можно приближенно определить первые N гармоник Фурье орбиты. В гармоническом методе они аппроксимируются коэф-фициентами Бесселя:

$$u_0 \approx U_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i, \quad /49/$$

$$u_k \approx U_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i \cos k\phi_i,$$

$$u_k \approx V_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i \sin k\phi_i.$$

Гармоники возмущения определяются из соотношений /21/.

Теперь при помощи корректирующих диполей осуществляют коррек-цию, имеющую гармоники Фурье, до N с той же амплитудой, но противоположного знака. Имеем

$$f_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{BC}(\phi) \cos k\phi d\phi \approx \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^K f_i^{BC} \cos k\phi_i \Delta\phi_i, \quad /50/$$

$$g_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{BC}(\phi) \sin k\phi d\phi \approx \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^K f_i^{BC} \sin k\phi_i \Delta\phi_i,$$

так как азимутальная протяженность корректоров $\Delta\phi \ll 2\pi$; $K = 2N$ - число корректоров.

Тогда необходимую силу корректоров f_i^{BC} можно получить из

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{2N} f_i^{BC} \Delta\phi_i = U_0, \quad \text{с } /51/$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{2N} f_i^{BC} \cos k\phi_i \Delta\phi_i = \frac{Q^2 - k^2}{Q^2} U_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{2N} f_i^{BC} \sin k\phi_i \Delta\phi_i = \frac{Q^2 - k^2}{Q^2} V_k, \quad k = 1, 2, \dots, (N-1).$$

Можно показать, что решением этой системы уравнений являются следующие выражения:

$$f_i^{BC} \Delta\phi_i = \frac{\pi}{N} U_0 + \frac{\pi}{N} \sum_{p=1}^{N-1} \frac{Q^2 - p^2}{Q^2} (U_p \cos p\phi_i + V_p \sin p\phi_i) + \frac{\pi}{N} \left(\frac{Q^2 - N^2}{Q^2} \right) U_N \cos N\phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, K = 2N,$$

здесь ϕ_i - азимуты корректоров.

К достоинствам гармонического метода можно отнести его прос-тоту и быстродействие. Недостаток метода состоит в том, что, проводя коррекции, мы вносим в качестве возмущения высшие гармо-ники ($k > N$) этих коррекций. В методе их вклад не ограничивает-ся.

10. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Этот метод коррекции /14,17/ можно отнести к одношаговым.

При наличии коррекции орбита представляет собой сумму двух членов; один из них обязан своим существованием возмущениям, а другой - коррекциям $\eta^{(B+g)}(\phi)$, $\eta^{BC}(\phi)$.

Как и прежде, будем измерять орбиту в $2N$ точках при помощи сигнальных электродов. Пусть вектор состояния

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}^{(B+g)} + \vec{\eta}^{BC} = \vec{\eta}^{(B+g)} + A \cdot \vec{\delta}^{BC}. \quad /52/$$

Здесь через A мы обозначили матрицу /17/, а через $\vec{\delta}^{BC}$ - вектор коррекций.

В методе наименьших квадратов оптимизируется целевая функция:

$$q = \sum_{i=1}^{2N} \eta_i^2 = \vec{\eta}^T \vec{\eta} \rightarrow \min. \quad /53/$$

Важно отметить, что число корректоров меньше числа датчиков $K < 2N$. Можно показать, что минимум /53/ наступает при примене-нии коррекций:

$$\vec{\delta}_{\text{опт}}^{BC} = -(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot \vec{\eta}^{(B+g)}. \quad /54/$$

Минимальное значение q так называемой остаточной суммы квад-ратов равняется

$$q_{\text{min}} = \vec{\eta}^{(B+g)T} \vec{\eta}^{(B+g)} + \vec{\eta}^{(B+g)T} \cdot A \cdot \vec{\delta}_{\text{опт}}^{BC}. \quad /55/$$

Основной недостаток метода состоит в том, что минимизируется отклонение орбиты только в сигнальных электродах, то есть в $2N$ точках, а не общее отклонение орбиты.

11. МЕТОД ХЕРЕВАРДА-БАКОНИЕ

Этот метод также можно отнести к одношаговым. В методе вво-дится следующая целевая функция /18-21/:

$$q = \gamma \sum_{i=1}^{2N} \eta_i^2 + (1-\gamma) \sum_{j=1}^K \delta_j^{BC2} \rightarrow \min. \quad /56/$$

Первая сумма минимизирует отклонение орбиты в сигнальных электродах, то есть в $2N$ точках, вторая ограничивает силу корректоров, тем самым и вклад высших /нескомпенсированных/ гармоник корректоров в орбиту. В /56/ γ -параметр, оптимальное значение которого определяется экспериментально либо моделированием на ЭВМ.

Используя /16/, можно записать

$$q = \gamma \sum_{i=1}^{2N} \left(\sum_{j=1}^K a_{ij} \delta_j^{BC} + \eta_i^{(B+g)} \right)^2 + (1-\gamma) \sum_{j=1}^K \delta_j^{BC2}. \quad /57/$$

Тогда условия минимума q можно записать как

$$\frac{\partial q}{\partial \delta_j^{BC}} = 2\gamma \sum_{i=1}^{2N} a_{ij} \sum_{p=1}^K (a_{ip} \delta_p^{BC} + \eta_i^{(B+g)}) + 2(1-\gamma) \delta_j^{BC} = 0. \quad /58/$$

Эту систему уравнений можно записать в матричной форме:

$$(\gamma A^T A + (1-\gamma) E) \vec{\delta}^{BC} = -\gamma A^T \vec{\eta}^{(B+g)}. \quad /59/$$

Здесь по-прежнему через A обозначена матрица /17/, а E - единичная матрица.

Недостаток метода Херварда-Баконие заключается в том, что оптимальное значение параметра γ надо определять дополнительно.

12. ИТЕРАТИВНЫЙ "beam-bump"-МЕТОД

Этот метод можно отнести к многошаговым. Если последовательно перемещаться по периметру ускорителя, то "beam-bump" метод можно применять и как метод общей коррекции [25, 22]. В так называемом итеративном "beam-bump"-методе сначала при помощи первых трех корректоров локально корректируется орбита в C_1 /см. раздел 8/. Потом перемещаемся вправо на один корректор. При помощи K_2 , K_3 и K_4 локально корректируем орбиту в C_2 и т.д.

Каждый корректор один раз работает в качестве первого корректора тройки /см. рис. 4/, один раз - как второй и один раз - как третий. Когда мы дойдем до последней тройки корректоров, то она внесет возмущение в орбиту в точке C_1 . Показания C_1 уже не будут равны нулю. Поэтому нужен еще один оборот ускорителя, чтобы сделать орбиту во всех датчиках равной нулю. Конечно, если сигнальные электроды расположены очень близко от соответствующих корректоров, то возмущение в C_1 , вносимое последней тройкой корректоров, будет очень мало и тогда все корректоры можно настраивать одновременно.

Как было показано в разделе 8, оптимальное расстояние между корректорами равно $\mu = \frac{\pi}{2}$. В этом случае будут нужны $K=4Q$ корректоров.

Основной недостаток метода - его относительно низкое быстродействие.

13. ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОРРЕКЦИИ

В динамических методах коррекции отклонение орбиты рассматривается по всему периметру, а не только в сигнальных электродах. Введем критерий качества коррекции как функционал от орбиты и коррекции. Логичнее всего определить критерий качества как

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^2(\phi) d\phi. \quad /60/$$

Так как $\eta(\phi)$ является случайной функцией обобщенного азимута, то можно уточнить /60/:

$$q = M \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^2(\phi) d\phi \right). \quad /61/$$

В /22-24/ на основе аппарата прикладного гармонического анализа /15, 16/ показывается, что /61/ можно в конце концов свести к следующей функции от показаний сигнальных электродов и от сил корректирующих диполей:

$$2q = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{2N} \eta_p^2 + \sum_{p=1}^{2N} \sum_{q=1}^K A_{pq} \eta_p \delta_q^{BC} + \sum_{q=1}^K \sum_{r=1}^K B_{qr} \delta_q^{BC} \delta_r^{BC} + 4 \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} \right)^2 D. \quad /62/$$

Здесь D - дисперсия возмущений /30/.

$$A_{pq} = \frac{1}{N} \left(c_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} c_k \cos k(\phi_p - \phi_q) + c_N \cos N\phi_p \cos N\phi_q \right), \quad /63/$$

$$c_k = \frac{2Q \sin \pi Q}{\pi(Q^2 - k^2)}, \quad /64/$$

$$B_{qr} = \frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \cos k(\phi_q - \phi_r) = \cos Q|\phi_q - \phi_r| + \frac{\sin \pi Q}{\pi Q} \cos(\pi - |\phi_q - \phi_r|)Q - \frac{|\phi_q - \phi_r| \sin \pi Q}{\pi} \sin(\pi - |\phi_q - \phi_r|)Q. \quad /65/$$

ϕ_p - азимуты сигнальных электродов; ϕ_q, ϕ_r - азимуты корректирующих диполей.

Из /62/ видно, что первый и последний члены в q не будут участвовать в определении оптимальной силы корректоров. Она будет определяться из системы уравнений.

К недостаткам метода можно отнести некоторую громоздкость выражений для коэффициентов A и B .

14. СЛУЧАЙ НЕРАВНОМЕРНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ СИГНАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ

Может случиться так, что будет невозможно расставить равномерно все сигнальные электроды по кольцу.

С другой стороны, формулы прикладного гармонического анализа, которые применяются в методах коррекции орбиты, предполагают эквидистантность датчиков. Когда эта эквидистантность недостижима из-за размещения более важного оборудования, можно использовать одну из интерполяционных формул для случая неэквидистантных значений аргумента функции. Чаще всего применяют интерполяционную формулу Лагранжа:

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_{n-1})} y_0 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\dots(x_{n-1}-x_{n-2})} y_{n-1}.$$

Здесь предполагается, что функция $f(x)$ задана значениями y_0, y_1, \dots, y_{n-1} в произвольных точках x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Используя /67/, можно вычислить значение орбиты в той точке кольца, где невозможно поставить сигнальный электрод.

15. КОРРЕКЦИЯ ОРБИТЫ ПРИ ПЕРВОМ ОБОРОТЕ

Самостоятельную проблему представляет коррекция первого оборота /30-34/. При первом обороте равновесная орбита может не являться замкнутой кривой, и мы можем располагать информацией о ее отклонении от оси только на части периметра ускорителя. Предлагаем использовать многошаговый метод, когда отклонение пучка в сигнальном электроде приводится к нулю при помощи корректора, расположенного перед электродом, а затем перемещаемся на один корректор и один электрод вправо по кольцу.

Поведение на первом обороте значительно зависит от правильного выбора условий инжекции. Если мы имеем ненулевые условия инжекции относительно смещенной орбиты, то будут возбуждаться когерентные колебания пучка и пучок может потеряться на следующих оборотах. Поэтому в зоне инжекции располагают два корректора и два сигнальных электрода. Информацию о том, является ли выбор условий инжекции правильным, получают путем сравнения показаний сигнальных электродов на первом и на втором оборотах пучка. Если эти показания не совпадают, то при помощи корректоров в зоне инжекции меняют условия инжекции до выравнивания показаний электродов на первом и на втором оборотах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, М., 1962.
2. Lüders G. Nuovo Cimento Suppl., 1955, 2, p. 1075.
3. Courant E.D., Snyder H.S. Annals of Physics, 1958, vol.3, p.1.
4. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, М., 1970.
5. Прудников А.П. и др. Интегралы и ряды. "Наука", М., 1981.
6. Gluckstern P.L. Particle Accelerators, 1978, vol.8, p. 203.
7. Strolin P. CERN/ISR-TH/68-4, Geneva, 1968.
8. Keil E. CERN/AR/Int. 56/65-3, Geneva, 1965.
9. Averill R.J. IEEE Transactions on Nuclear Science. June, 1965.
10. Bovet C., Reich K.H. CERN/SI/Int. DL/69-3, Geneva, 1969.
11. Holtey G. CERN/Lab. 2-D1-PA/Int. 73-3, Geneva, 1973.
12. Resegotti L. CERN/ISR-MAG/68-30, Geneva, 1968.
13. Autin B., Bryant P.J. CERN/ISR-MA/71-36, Geneva, 1971.
14. Ando A., Endo K. Rep. Nat. Lab. High-Energy Ph., 300-32, Japan, 1978.
15. Хеминг Р.В. Численные методы. "Наука", М., 1968.
16. Серебренников М.Г. Гармонический анализ. ОГИЗ-Гостехиздат, М., 1948.
17. Autin B., Marti Y. CERN/ISR-MA/73-71, Geneva, 1973.
18. Baconnier Y. CERN 65-35, Geneva, 1965.
19. Guignard G. CERN/SI/Int. DL/70-1, Geneva, 1970.
20. Guignard G. CERN/SI/Int. DL/70-2, Geneva, 1970.
21. Guignard G. CERN, 70-24, Geneva, 1970.
22. Динев Д. АЭ, 1981, №1.
23. Динев Д. ОИЯИ, 9-12626, Дубна, 1979.
24. Динев Д. ОИЯИ, 9-12479, Дубна, 1979.
25. Lambertson G.R., Laslett L.Y. Proc. 5th Int. Conf. on High Energy Accelerators. Frascati, 1965.
26. Bingham G. NAL TM-200, 1970.
27. Bossart R. et al. CERN/SPS/AMB/LB/Int. 77-2, Geneva, 1977.
28. Burnod L. CERN/Lab. 2-CO/Int./BM-72-10, Geneva, 1970.
29. Guignard G. CERN/ISR-BOM/80-21, Geneva, 1980.
30. Васильев А.А. Труды Ш Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. "Наука", М., 1973.
31. Васильев А.А. и др. Труды VII Межд. конф. по ускорителям заряженных частиц высоких энергий. Ереван, 1970.
32. Дзергач А.И., Карпов В.А. Межд. конф. по ускорителям. Атомиздат, М., 1964.
33. Lapostolle P. CES 69-04 ORB, Saclay, 1969.
34. Lapostolle P. et al. CES 69/03 ORB 52/GM/FM, Saclay, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1982 года.

Динев Д.Х. Коррекция орбиты в синхротронах. Обзор

P9-82-504

Рассмотрены ошибки, вызывающие деформацию орбиты, и гамильтониан поперечного движения при наличии этих ошибок. Даны уравнение орбиты и основные методы его решения. Подробно описаны статистические свойства возмущений, орбиты и максимального отклонения орбиты. Дана классификация методов коррекции орбиты. "Beam-bump"-метод рассмотрен при произвольном расположении сигнальных электродов и корректирующих диполей. Подробно проанализированы гармонический метод, метод наименьших квадратов и метод Хереварда-Баконие. Рассмотрен предложенный автором динамический метод коррекции. Описаны также случай неравномерного расположения сигнальных электродов и корректирующих диполей, а также коррекция орбиты при первом обороте.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Dinev D.Ch. Orbit correction in Synchrotrons. Survey

P9-82-504

The errors giving rise to orbit distortions are pointed out as well as the Hamiltonian when these errors are present. The orbit equation and the basic methods of its solution are given. The statistical properties of the perturbations of the orbit and its maximum distortion are discussed in details. A classification of the methods of orbit correction is done. The "beam-bump" method is considered at a random disposition of pick-up electrodes and correcting magnets. A detailed description of the harmonic method, of the method of the least square and of the Hereward-Baconnier method is given. The dynamic method of correction, proposed by the author, is discussed. The case of irregular disposition of pick-up electrodes and the correction of the first turn are considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.