

**сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна**

4901/82

P9-82-502

Д.Х. Динев

**КОРРЕКЦИЯ ОРБИТЫ
В ТЯЖЕЛОИОННОМ СИНХРОТРОНЕ**

1982

1. ВВЕДЕНИЕ

В ОИЯИ проектируется ускорительный комплекс тяжелых ионов /УКТИ/, предназначенный для ускорения ионов всех элементов вплоть до урана до релятивистской энергии 3,4 ГэВ/нуклон^{1/2}. Ускорительный комплекс будет иметь двухступенчатую структуру. Первая ступень представляет собой тяжелоионный синхротрон ТИС на энергию 250 МэВ/нуклон, а вторая ступень - существующий в ЛВЭ ОИЯИ синхрофазотрон.

Ниже перечислены некоторые параметры тяжелоионного синхротрона, которые будут нужны в дальнейшем.

Магнитная жесткость $B_0\rho$	
при инжекции	1,556 Тм
максимальная	9,874 Тм
Радиус кривизны орбиты	
в диполях ρ	7,497 м
Магнитное поле B_0	
при инжекции	0,2 Т
максимальное	1,3 Т
Градиент в Φ линзах g_Φ	
при инжекции	1,6 Т/м
максимальный	10,16 Т/м
Градиент в Д линзах g_D	
при инжекции	1,6 Т/м
максимальный	10,46 Т/м
Число периодов p	16
Число диполей M	32
Число квадруполей L	48
Эффективная длина диполей Δs_M	1,48 м
Эффективная длина Φ квадруполей Δs_{g_Φ}	0,36 м
Эффективная длина Д квадруполей Δs_{g_D}	0,60 м
Частота бетатронных колебаний	
Q_x	4,8
Q_z	3,85

На рис.1 дана схема расположения элементов тяжелоионного синхротрона.

Один из важнейших вопросов оптимальной работы ускорителя - контроль и коррекция положения равновесной орбиты. Орбиту удобно анализировать в нормированных переменных ^{1/2}:

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\beta}}$$

$$\phi = \int_0^s \frac{ds}{Q\beta(s)}$$

/1/

Здесь $\beta(s)$ - бета-функция Твисса.

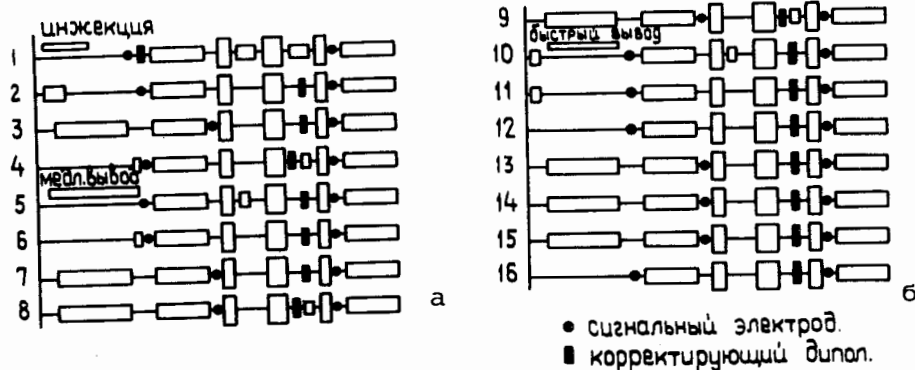


Рис.1. Схема расположения элементов тяжелоионного синхротрона.

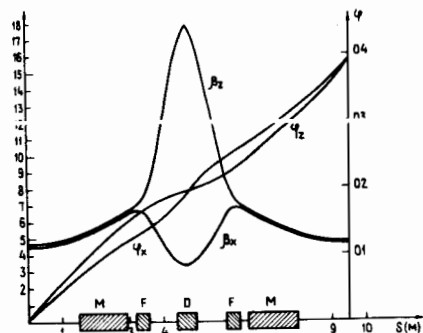


Рис.2. Функции Твисса и обобщенный азимут для тяжелоионного синхротрона.

Орбита описывается периодическим решением уравнения движения при наличии линейных возмущений, и это решение можно записать с помощью интеграла

$$\eta = \frac{Q}{2 \sin \pi Q} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(t) \cos Q(\phi + \pi - t) dt,$$

/2/

где $f(\phi)$ - функция, описывающая возмущения.

Настоящая работа посвящена статистическому анализу и методам коррекции равновесной орбиты в тяжелоионном синхротроне /ТИС/.

2. ДИСПЕРСИЯ ОРБИТЫ

Мы предполагаем, что возмущения, вызывающие смещение орбиты, распределены нормально, что они статисти-

чески независимы, имеют нулевые математические ожидания и одинаковые дисперсии. При этих допущениях отклонение орбиты в фиксированной точке $\eta_i = \eta(\phi_i)$ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и с дисперсией ^{1/2};

$$\sigma^2 = \left(\frac{Q}{2B_0 \rho \sin \pi Q} \right)^2 p \sigma_{\Delta B}^2 \sum_{j=1}^{M_p} \frac{\beta^3 \Delta \phi_j^2}{2} + \left(\frac{Q}{2B_0 \rho \sin \pi Q} \right)^2 p \sigma_{\Delta x g}^2 \sum_{j=1}^{L_p} \frac{g_j^2 \beta_j^3 \Delta \phi_j^2}{2}.$$

/3/

В этой формуле $\sigma_{\Delta B}^2$ - дисперсия возмущений магнитного поля, а $\sigma_{\Delta x g}^2$ - дисперсия возмущения в положении квадруполов. Предполагается, что поле в диполях однородное, $n=0$. Суммирование в /3/ ведется в рамках одного периода; $M_p = M/p$ - количество диполей на период; $L_p = L/p$ - количество квадруполов на период. Строго говоря, /3/ верно для так называемого сглаженного ускорителя ($1 \ll Q \ll p$), а для других ускорителей оно является только приближенным.

Для тяжелоионного синхротрона предполагается, что $\sigma_{\Delta B} = 5 \cdot 10^{-4} B_0$; $\sigma_{\Delta x} = 0,3$ мм; $\sigma_{\Delta z} = 0,2$ мм. Ошибки в наклоне диполей $\sigma_{\alpha} = 0,3$ мрад. Кроме того, будем предполагать, что присутствуют постоянные паразитные поля $\sigma_B = 1$ Гс, а ошибки насыщения отсутствуют. При этих предположениях для отклонения орбиты можно получить:

при инжекции $\sigma_x = 5,2$ мм, $\sigma_z = 7,4$ мм,

при максимальном поле $\sigma_x = 3,9$ мм, $\sigma_z = 7,6$ мм.

3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАКСИМАЛЬНОГО ОТКЛОНЕНИЯ ОРБИТЫ

Максимальное отклонение орбиты получается каждый раз в различной точке, и поэтому его распределение отличается от нормального. Оценить статистические свойства максимального отклонения очень важно. Сначала сделаем несколько замечаний относительно возмущений. Как видно из /3/, их суммарное действие можно описать функцией $f(\phi)$. Разложим эту функцию в ряд Фурье:

$$f(\phi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_k \cos k\phi + g_k \sin k\phi).$$

/4/

Амплитуды f_k, g_k - случайные величины. В ^{1/2} показано, что спектр $f(\phi)$ - "белый" с дисперсией:

Таблица 1

Среднеквадратическое отклонение амплитуды орбиты в тяжелоионном синхротроне

Среднеквадратическое отклонение амплитуды		1 гармоника	2 гармоники	4 гармоники
По X, мм	При инжекции	5,83	7,17	8,64
	При максимальном поле	4,37	5,37	6,78
По Z, мм	При инжекции	7,89	9,20	10,00
	При максимальном поле	8,07	9,38	10,54

Таблица 2

Граничные значения амплитуды, которые не превышаются с вероятностью 98%

Граничное значение амплитуды		1 гармоника	2 гармоники	4 гармоники
По X, мм	При инжекции	13,6	15,6	14,5
	При максимальном поле	10,2	11,4	10,8
По Z, мм	При инжекции	20,1	21,0	17,5
	При максимальном поле	20,5	22,0	17,9

$$\sigma_{f_k}^2 = \sigma_{g_k}^2 = \frac{2\rho\sigma^2 \Delta V}{(B_0\rho)^2} \sum_{j=1}^{M_p} \beta_j^3 \left(\frac{\Delta\phi_j}{2\pi}\right)^2 + \frac{2\rho\sigma^2 \Delta_{\Sigma k}}{(B_0\rho)^2} \sum_{j=1}^{L_p} \beta_j^3 g_j^2 \left(\frac{\Delta\phi_j}{2\pi}\right)^2 \quad /5/$$

При сделанных предположениях для ТИСа из /5/ следует:
 при инжекции по x $\sigma_{f_k}^2 = 0,246 \cdot 10^{-7}$ м, по z - $\sigma_{f_k}^2 = 0,179 \cdot 10^{-7}$ м;
 при максимальном поле по x $\sigma_{f_k}^2 = 0,138 \cdot 10^{-7}$ м, по z - $\sigma_{f_k}^2 = 0,87 \cdot 10^{-7}$ м.
 В^{3/} при исследовании статистических свойств амплитуды орбиты учитывается только одна гармоника возмущений с номером k, ближайшим к Q. Эта гармоника дает самый большой вклад в отклонение орбиты. Для горизонтальной плоскости ТИС это 5 гармоника возмущений, а

для вертикальной - 4 гармоника. В этом приближении амплитуда орбиты имеет распределение Рэлея с дисперсией:

$$\sigma_A^2 = 2 \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} \right)^2 \sigma_{f_k}^2 \quad /6/$$

Интегральная функция распределения

$$\Phi(A) = 1 - F(A) = 1 - e^{-A^2/\sigma_A^2} \quad /7/$$

где F(A) является вероятностью того, что амплитуда орбиты будет больше A.

Точное решение для статистических свойств максимального отклонения можно найти, если учитывать две гармоники возмущения с номерами k и (k+1)^{4/}. В этом приближении

$$\sigma_A^2 = R_k^2 + \frac{\pi}{2} R_k R_{(k+1)} + R_{(k+1)}^2 \quad /8/$$

где R_k^2 и $R_{(k+1)}^2$ вычисляются по формуле /6/. Для тяжелоионного синхротрона мы будем учитывать 4 и 5 гармоники возмущения для горизонтальной плоскости и 3 и 4 гармоники для вертикальной.

В этом приближении вероятность имеет амплитуду, которая больше A:

$$F(A) = 2\sqrt{\pi} \frac{R_k R_{k+1}}{R_k^2 + R_{k+1}^2} \frac{A}{\sqrt{R_k^2 + R_{k+1}^2}} e^{-A^2/(R_k^2 + R_{k+1}^2)} \quad /9/$$

В^{4/} также сделана оценка дисперсии максимального отклонения и интегральной функции распределения при учете нескольких гармоник возмущения. Для случая тяжелоионного синхротрона мы будем учитывать четыре гармоники возмущения с номерами 3, 4, 5, 6. Как показано в^{4/}, учет четырех гармоник возмущений дает лучшее согласование приближенной оценки с результатами математического моделирования методом Монте-Карло. Имеем

$$\frac{\sigma_A^2}{R_0^2} = 1 + \frac{\pi}{2} \frac{R_3 R_4 + R_3 R_5 + R_3 R_6 + R_4 R_5 + R_4 R_6 + R_5 R_6}{R_0^2} \quad /10/$$

где

$$R_0^2 = R_3^2 + R_4^2 + R_5^2 + R_6^2 \quad /11/$$

Для вероятности максимального отклонения орбиты, большего A

$$F(A) = (4\pi)^{3/2} \frac{R_3 R_4 R_5 R_6}{R_0^4} e^{-A^2/R_0^2} \left[\left(\frac{A}{R}\right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{A}{R}\right) \right] \quad /12/$$

В табл.1 приведены результаты для дисперсии максимального отклонения, в табл.2 - граничные значения амплитуды, которые не превышаются с вероятностью 98%.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРБИТЫ НА ЭВМ

Так как возмущения вне магнитных элементов тождественно равны нулю, то интеграл /3/ можно свести к сумме. Таким образом, можно вывести следующее матричное соотношение, связывающее отклонение орбиты в $2N$ точках с $(M+L)$ возмущений

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{M+L} a_{ij} \delta_j, \quad /13/$$

$$\phi_i \leq \phi_j \leq \phi_i + 2\pi,$$

где

$$a_{ij} = \cos Q(\phi_i + \pi - \phi_j), \quad /14/$$

$$\delta_j = \begin{cases} -\frac{Q\beta_j^{3/2} \Delta\phi_j}{2 \sin\pi Q B_0 \rho} \Delta B_j & \text{для диполей с } n=0, \\ \frac{Q\rho^{3/2} \beta_j \Delta\psi_j}{2 \sin\pi Q B_0 \rho} \Delta x_j & \text{для квадрупольей.} \end{cases} \quad /15/$$

Черта означает усреднение по магнитному элементу.

Сделаем еще два замечания - если в /13/ азимут магнитного элемента $\phi_j < \phi_i$, то в сумме /13/ магнитный элемент входит с азимутом $\phi_j + 2\pi$. Чтобы можно было использовать результаты прикладного гармонического анализа, удобно так выбрать начало отсчета обобщенного азимута, чтобы азимуты сигнальных электродов давались выражением $\phi_i^{CE} = i \frac{2\pi}{2N}$, $i = 1, 2, \dots, 2N$.

Для измерения и коррекции орбиты в тяжелоионном синхротроне предлагается использовать 32 сигнальных электрода и 16 корректирующих диполей. Их размещение показано на рис.1.

Орбита ТИСа была смоделирована при помощи ЭВМ.

Здесь мы рассмотрим результаты расчетов только для горизонтальной плоскости. К вертикальной плоскости вернемся попозже. Для моделирования орбиты использовалось матричное соотношение /13/. Возмущения ΔB_j и Δx_j имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и с одинаковыми дисперсиями. Для их за-

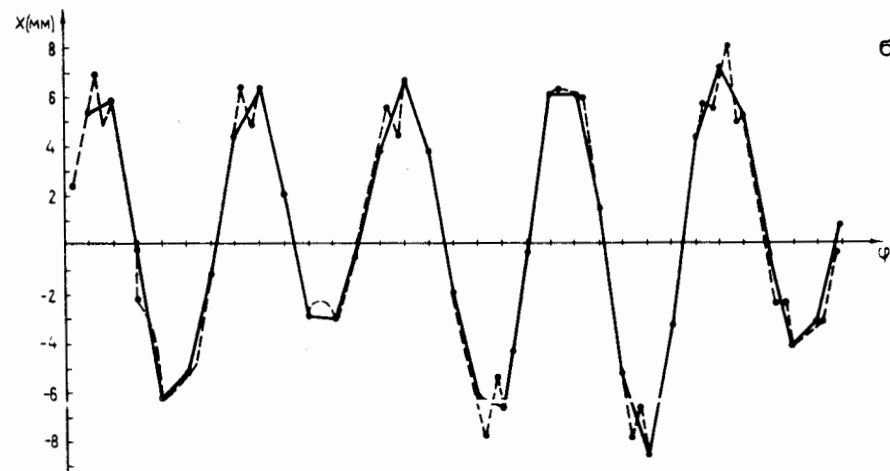
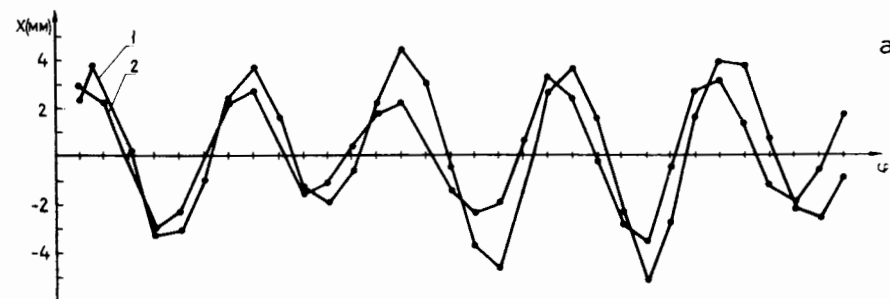


Рис.3. Моделирование орбиты ТИСа в горизонтальной плоскости: а/ кривая 1-орбита, связанная с диполями, 2-орбита, связанная с квадрупольями; б/ суммарная орбита, вычисленная по 32 точкам, пунктиром показана та же орбита, вычисленная по 96 точкам.

дания была использована программа-генератор псевдослучайных чисел RANDU из пакета прикладных программ SSP фирмы IBM. Результат моделирования для горизонтальной плоскости показан на рис.3.

5. КОРРЕКЦИЯ ОРБИТЫ "BEAM-BUMP" -МЕТОДОМ

Идея "beam-bump" -метода состоит в том, чтобы при помощи трех корректоров локально скорректировать орбиту в сигнальном электроде, расположенном между этими тремя корректорами. Другими словами, ставятся следующие условия:

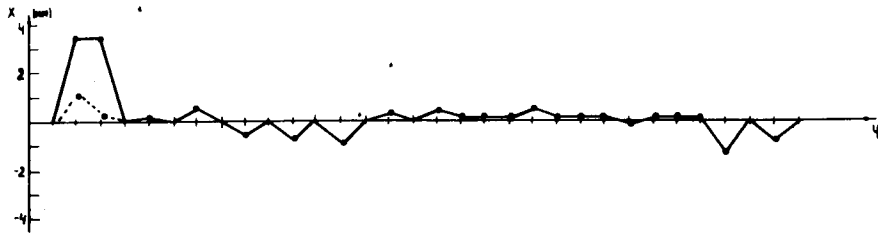


Рис.4. Коррекция орбиты "beam-bump" -методом в горизонтальной плоскости.

$$x(\phi_{C3}) = -x_m,$$

/16/

$$x(\phi < \phi_1, \phi > \phi_3) \equiv x'(\phi < \phi_1, \phi > \phi_3) \equiv 0.$$

Если применить "beam-bump" - метод итеративно, каждый раз передвигаясь вправо на один корректор и один сигнальный электрод, то мы можем скорректировать орбиту по всему периметру ускорителя.

В¹² даны уравнения, которые позволяют вычислить силу корректоров в общем случае произвольно расположенных корректоров и сигнальных электродов. на ускорителях сигнальные электроды /СЭ/ часто расположены очень близко к соответствующим корректорам. Приблизительно такой случай имеем в тяжелоионном синхротроне, где СЭ₁ расположен очень близко к КД₁. Мало и расстояние между СЭ₄ и КД₂, между СЭ₆ и КД₃ и т.д. В этом случае необходимая сила трех корректоров дается соотношениями

$$\delta_1 = - \frac{\eta_m}{2 \sin \pi Q \sin \mu_{12}},$$

$$\delta_2 = \frac{\sin(\mu_{12} + \mu_{23})}{\sin \mu_{12} \sin \mu_{23}} \frac{\eta_m}{2 \sin \pi Q},$$

/17/

$$\delta_3 = - \frac{\eta_m}{2 \sin \pi Q \sin \mu_{23}}.$$

Здесь η_m - нормированное отклонение орбиты в сигнальном электроде; μ_{12} - набег фазы бетатронных колебаний из КД₁ на КД₂; μ_{23} - набег фазы бетатронных колебаний из КД₂ на КД₃.

$$\mu_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\beta(s)} = Q(\phi_2 - \phi_1). \quad /18/$$

В ТИСе первая тройка образована КД₁, КД₂, КД₃. С их помощью мы сделаем локальную орбиту в СЭ₄ равной нулю. Следующая тройка образована КД₂, КД₃, КД₄. При помощи этих трех корректоров мы локально приводим к нулю орбиту в СЭ₆ и т.д. Результат коррекции дается на рис.4. Видно, что в зоне СЭ₂ и СЭ₃ получилась очень хорошая коррекция. Это связано с тем, что в этой зоне корректоры расположены неравномерно. Была проделана дополнительная локальная коррекция в этой области - при помощи КД₁, КД₂ и КД₃ теперь стремились сделать орбиту в СЭ₃ равной нулю. Результат этой дополнительной локальной коррекции показан на рис.4 пунктиром.

Чтобы охарактеризовать, насколько хороша коррекция орбиты, введем термин "качество коррекции" К. Логично определить его следующим образом:

$$K = \frac{\sqrt{M(x_{кор.}^2)}}{\sqrt{M(x_{некор.}^2)}}, \quad /19/$$

где $x_{некор.}$ - нескорректированная орбита; $x_{кор.}$ - скорректированная орбита, а М означает математическое ожидание. Для рассмотренной на рис.4 коррекции "beam-bump" - методом $K=12$.

Важно также оценить максимальную силу корректирующих диполей. Для рассмотренной на рис.4 коррекции "beam-bump" - методом она составила $\Delta B_e \Delta s = 94$ Гс·м. Это означает, что если выбрать длину корректирующих диполей $\Delta s=25$ см, будет нужна $\Delta B_e=380$ Гс.

6. КОРРЕКЦИЯ ОРБИТЫ ГАРМОНИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Найдем сначала гармонический спектр орбиты. Так как орбита задана не аналитически, а своими значениями в сигнальных электродах, т.е. $2N$ значениями, то необходимо использовать какой-нибудь из методов прикладного гармонического анализа^{15,16}.

Обычно коэффициенты Фурье аппроксимируют коэффициентами Бесселя:

$$U_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i,$$

$$U_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i \cos k\phi_i \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

$$V_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i \sin k\phi_i \quad (k = 1, 2, \dots, (N-1)).$$

/20/

Но орбита часто меняет свой знак, приблизительно 2Q раз. Коэффициенты Бесселя, которые, с другой точки зрения, являются применением формулы трапеций для вычисления интегралов, входящих в выражения для коэффициентов Фурье при небольшом количестве точек, будут давать не очень хороший результат.

Лучший результат, в случае когда кривая часто меняет свой знак, дает метод разрывов. В этом методе для вычисления приближенного значения коэффициентов Фурье используются значения разрывов функции и ее производных. Если аппроксимировать функцию ломаной линией, проходящей через заданные точки, то метод разрывов дает для приближенного значения коэффициентов Фурье

$$U_k = -\frac{N}{\pi^2 k^2} \sum_{j=1}^{2N} \Delta^2 \eta_j \cos k\phi_j, \quad /21/$$

$$V_k = -\frac{N}{\pi^2 k^2} \sum_{j=1}^{2N} \Delta^2 \eta_j \sin k\phi_j,$$

где

$$\Delta^2 \eta_j = \eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1}. \quad /22/$$

Можно доказать также, что

$$\frac{\ddot{U}_k}{U_k \text{ Бессель}} = \frac{\ddot{V}_k}{V_k \text{ Бессель}} = K_2 = \left(\frac{\sin \pi k / 2N}{\pi k / 2N} \right)^2. \quad /23/$$

Если аппроксимировать функцию дугами парабол, проходящих через заданные точки, то метод разрывов дает

$$U_k = \frac{N}{2\pi^2 k^2} \sum_{j=1}^{N-1} \Delta^4 \eta_{2j} \cos k\phi_{2j} + \frac{N^2}{\pi^2 k^3} \sum_{j=1}^N (\Delta^2 \eta_{2j+1} - \Delta^2 \eta_{2j-1}) \sin k\phi_{2j}, \quad /24/$$

$$V_k = \frac{N}{2\pi^2 k^2} \sum_{j=1}^{N-1} \Delta^4 \eta_{2j} \sin k\phi_{2j} - \frac{N}{\pi^2 k^3} \sum_{j=1}^N (\Delta^2 \eta_{2j+1} - \Delta^2 \eta_{2j-1}) \cos k\phi_{2j},$$

где

$$\Delta^4 \eta_{2j} = \eta_{2j+2} - 4\eta_{2j+1} + 6\eta_{2j} - 4\eta_{2j-1} + \eta_{2j-2}. \quad /25/$$

Можно показать, что в этом случае

$$\frac{U_k}{U_k \text{ Бессель}} = \frac{V_k}{V_k \text{ Бессель}} = K_3 = \sec \frac{\pi k}{2N} \left(\frac{\sin \pi k / 2N}{\pi k / 2N} \right)^3. \quad /26/$$

Если аппроксимировать функцию дугами кубических парабол, проходящих через заданные точки, то метод разрывов дает

$$A_k = \frac{3N^3}{k^4 \pi^4} \sum_{j=1}^{2N} \Delta^4 \eta_j \cos k\phi_j - \frac{N^2}{\pi^2 k^3} \sum_{j=1}^{2N} (\Delta^2 \eta_{j+1} - \Delta^2 \eta_{j-1}) \sin k\phi_j, \quad /27/$$

$$B_k = \frac{3N^3}{k^4 \pi^4} \sum_{j=1}^{2N} \Delta^4 \eta_j \sin k\phi_j - \frac{N^2}{\pi^2 k^3} \sum_{j=1}^{2N} (\Delta^2 \eta_{j+1} - \Delta^2 \eta_{j-1}) \cos k\phi_j.$$

Можно показать, что в этом случае

$$\frac{U_k}{U_k \text{ Бессель}} = \frac{V_k}{V_k \text{ Бессель}} = K = \frac{3}{1 + 2\cos^2 \pi k / 2N} \left(\frac{\sin \pi k / 2N}{\pi k / 2N} \right)^4. \quad /28/$$

Коэффициенты K_1, K_2 и K_3 при $2N=32$ приведены в табл. 3.

Результаты гармонического анализа орбиты даны в табл. 4 и 5. В этих таблицах также представлены значения коэффициентов Фурье, вычисленных на основе существующих в ускорителе возмущений. Дело в том, что при моделировании коррекции мы точно знаем все возмущения, и это позволяет с их помощью вычислить спектр орбиты. Из табл. 4 и 5 следует, что основные 4, 5 и 6 гармоники орбиты лучше всего представляются методом разрывов с аппроксимацией кривой дугами парабол. Амплитудный спектр орбиты показан на рис. 5.

В гармоническом методе коррекции орбиты^{2,7/} сначала на основе показаний $2N$ сигнальных электродов вычисляют приближенное значение первых N гармоник орбиты u_0 ,

$$u_k, v_k: \quad \eta(\phi) = \frac{u_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k \cos k\phi + v_k \sin k\phi). \quad /29/$$

Для этого используют какой-нибудь из описанных выше методов. На основе первых гармоник орбиты вычисляются первые гармоники возмущений. Показывается^{2/}, что гармоники орбиты /29/ и гармоники возмущений /4/ связаны соотношениями

Таблица 3

Коэффициенты перевода K_1, K_3 и K_4 при $2N=32$

k	K_2	K_3	K_4
1.	0,997	1,000	1,000
2.	0,987	1,000	1,000
3.	0,971	1,000	1,000
4.	0,950	1,000	0,999
5.	0,922	1,000	0,998
6.	0,890	1,010	0,996
7.	0,852	1,020	0,992
8.	0,811	1,030	0,986
9.	0,766	1,060	0,974
10.	0,718	1,090	0,954

$$u_0 = f_0$$

$$u_k = \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} \right) f_k$$

$$v_k = \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} \right) g_k$$

/30/

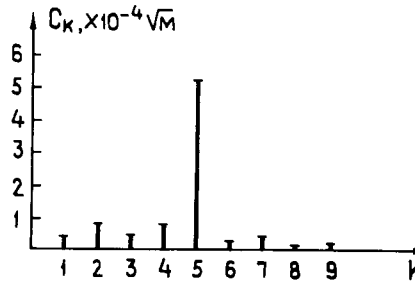


Рис.5. Амплитудный спектр орбиты.

Теперь силу корректирующих диполей/их количество $K = 2N$ / вычисляют так, чтобы они создавали гармоники той же амплитуды, но противоположного знака:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{2N} f_i^{BC} \Delta\phi_i = f_0$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{2N} f_i^{BC} \cos k\phi_i \Delta\phi_i = f_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad /31/$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{2N} f_i^{BC} \sin k\phi_i \Delta\phi_i = g_k \quad (k = 1, 2, \dots, (N-1)).$$

Здесь $\Delta\phi$ - азимутальная длина корректоров и на практике $\Delta\phi_i \ll 2\pi$, так что интегралы, входящие в выражения для коэффициентов Фурье, хорошо вычисляются по формуле трапеции:

$$\delta_i^{BC} = \frac{Q}{2 \sin \pi Q} f_i^{BC} \Delta\phi_i \quad /32/$$

Таблица 4

Косинусные коэффициенты, $\times 10^{-4} \text{ м}^{1/2}$

№ гармоники	Значение, вычисленное по возмущениям	Коэффициенты Бесселя	Ломаная линия	Парабола	Кубическая парабола
0.	2,320	2,390	2,390	2,390	2,390
1.	0,607	0,553	0,546	0,553	0,553
2.	0,486	0,499	0,484	0,499	0,499
3.	1,970	2,020	1,920	2,020	2,020
4.	-4,020	-4,080	-3,760	-4,080	-4,070
5.	5,770	5,810	5,170	5,870	5,790
6.	1,010	0,968	0,825	0,987	0,960
7.	-1,960	-1,990	-1,610	-2,050	-1,960
8.	-0,544	-0,484	-0,371	-0,513	-0,471

Таблица 5

Синусные коэффициенты, $\times 10^{-4} \text{ м}^{1/2}$

№ гармоники	Значение, вычисленное по возмущениям	Коэффициенты Бесселя	Ломаная линия	Парабола	Кубическая парабола
1.	1,550	1,600	1,580	1,600	1,600
2.	-3,990	-4,060	-3,940	-4,060	-4,060
3.	-1,210	-1,130	-1,070	-1,130	-1,120
4.	-0,829	-0,771	-0,711	-0,771	-0,769
5.	26,000	25,600	22,800	25,860	25,500
6.	1,060	1,070	0,912	1,090	1,060
7.	-0,751	-0,846	-0,686	-0,871	-0,834
8.	-0,275	-0,271	-0,207	-0,287	-0,264

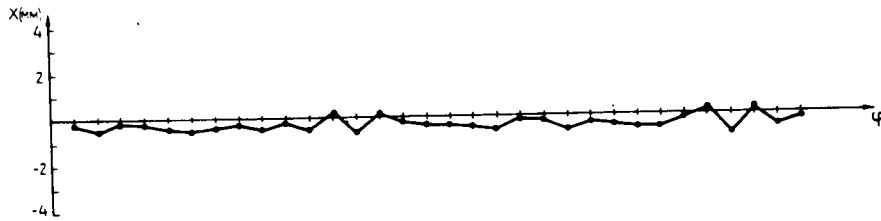


Рис.6. Орбита ТИСа в горизонтальной плоскости, скорректированная гармоническим методом.

Результат гармонической коррекции орбиты ТИСа в горизонтальной плоскости показан на рис.6. Качество коррекции орбиты, вычисленное по /19/, $K = 8\%$. Максимальная сила корректоров $\Delta V_c \Delta s = 70$ Гс·м, что дает при $\Delta s = 25$ см $\Delta V_c = 280$ Гс.

7. КОРРЕКЦИЯ ОРБИТЫ ДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В результате измерения орбиты сигнальными электродами мы узнаем ее отклонение в $2N$ точках. Общее количество возмущений ($M+L$), как правило, намного больше количества сигнальных электродов - $M+L > 2N$. Тогда мы не можем решить /13/ относительно существующих возмущений. Из этой системы уравнений мы можем только выразить $2N$ возмущений через показания сигнальных электродов и остальных возмущений. Таким образом, мы имеем случай коррекции в условиях неопределенности.

Из-за свойства ортогональности тригонометрических функций удобнее выразить орбиту через ряд Фурье /29/. Пусть η_i , $i = 1, 2, \dots, 2N$, - измеренные сигнальными электродами отклонения орбиты. Тогда можно записать

$$\eta_i = \frac{u_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k \cos k\phi_i + v_k \sin k\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, 2N. \quad /33/$$

Из этих уравнений мы можем выразить первые N коэффициенты Фурье $u_0, u_1, \dots, u_N, v_1, \dots, v_{(N-1)}$ через отклонения η_i и высшие гармоники орбиты. Предполагая, что сигнальные электроды расставлены равномерно по периметру ускорителя, то есть что $\phi_i = 2\pi/2N$, из /33/ можно получить

$$u_0 = U_0 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} u_{2Nj}, \quad /34/$$

$$u_k = U_k - \sum_{j=1}^{\infty} (u_{2Nj-k} + u_{2Nj+k}).$$

$$v_k = V_k - \sum_{j=1}^{\infty} (-v_{2Nj-k} + v_{2Nj+k}).$$

Равновесная орбита является суммой орбит, связанных с возмущениями в диполях и квадруполях $\eta^{(B+g)}$ и с корректорами η^{BC} :

$$\eta = \eta^B + \eta^g + \eta^{BC} = \eta^{(B+g)} + \eta^{BC}. \quad /35/$$

Определим критерий качества коррекции орбиты функционалом

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^2(\phi) d\phi. \quad /36/$$

Этим выбором критерия качества мы подчеркиваем, что важно скорректировать орбиту по всему периметру, а не только в сигнальных электродах.

Так как орбита является случайной функцией обобщенного азимута, то /36/ нужно уточнить, взяв математическое ожидание:

$$q = M \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^2(\phi) d\phi \right). \quad /37/$$

Далее мы покажем, что, используя свойства орбиты и возмущений, можно свести q к функции от показаний сигнальных электродов и от сил корректоров.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta^2(\phi) d\phi &= \frac{u_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^2 + v_k^2) = \\ &= \left[\frac{u_0^{(B+g)2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^{(B+g)2} + v_k^{(B+g)2}) \right] + \left[u_0^{(B+g)} u_0^{BC} + \sum_{k=1}^{\infty} (2u_k^{(B+g)} u_k^{BC} + \right. \\ &\left. + 2v_k^{(B+g)} v_k^{BC}) \right] + \left[\frac{u_0^{BC2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^{BC2} + v_k^{BC2}) \right] = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \quad /38/ \end{aligned}$$

Аппроксимируем первые N гармоники возмущенной орбиты коэффициентами Бесселя. Используя /34/, можно записать

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left[\frac{U_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} (U_k^2 + V_k^2) + \frac{U_0^2}{2} \right] + \left[-U_0 S_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (-2U_k S_k - 2V_k R_k) - \right. \\ &\left. - U_N S_N \right] + \left[\frac{S_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} (S_k^2 + R_k^2) + S_N^2 - \frac{U_N^2}{4} + v_N^{(B+g)2} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} (u_k^{(B+g)2} + v_k^{(B+g)2}) \right] = \Sigma_a + \Sigma_b + \Sigma_c, \quad /39/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = & [U_0 u_0^{BC} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (U_k u_k^{BC} + V_k v_k^{BC}) + U_N u_N^{BC}] + \\ & + [2v_N^{(B+g)} v_N^{BC} - u_0^{BC} S_0 - 2 \sum_{k=1}^{N-1} (u_k^{BC} S_k + v_k^{BC} R_k) - 2u_N^{BC} S_N] + /40/ \\ & + [2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (u_k^{(B+g)} u_k^{BC} + v_k^{(B+g)} v_k^{BC})] = \Sigma_d + \Sigma_e + \Sigma_f. \end{aligned}$$

Здесь мы введем обозначения:

$$\begin{aligned} S_0 &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} u_{2Nj}^{(B+g)}, \\ S_k &= \sum_{j=1}^{\infty} (u_{2Nj-k}^{(B+g)} + u_{2Nj+k}^{(B+g)}), /41/ \\ R_k &= \sum_{j=1}^{\infty} (-v_{2Nj-k}^{(B+g)} + v_{2Nj+k}^{(B+g)}), \\ S_N &= \sum_{j=1}^{\infty} u_{(2j+1)N}^{(B+g)}. \end{aligned}$$

Используя тот факт, что высшие гармоники возмущенной орбиты статистически независимы и имеют нулевые математические ожидания, можно получить

$$M(\Sigma_d) = M(\Sigma_e) = M(\Sigma_f) = 0. /42/$$

Можно показать также, что

$$M(\Sigma_c) = 4 \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} \right)^2 D, /43/$$

где через D обозначили дисперсию возмущений /5/.

Из /30/ и /32/ следует, что

$$u_k = c_k \sum_i \delta_i \cos k \phi_i, /44/$$

$$v_k = c_k \sum_i \delta_i \sin k \phi_i,$$

где

$$c_k = \frac{2Q \sin \pi Q}{\pi(Q^2 - k^2)}. /45/$$

Тогда, используя /20/ и /44/, можно получить

$$\Sigma_a = \sum_{p=1}^{2N} \sum_{q=1}^K A_{pq} \eta_p \delta_q^{BC}, /46/$$

где

$$A_{pq} = \frac{1}{N} (c_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} c_k \cos k(\phi_p - \phi_q) + c_N \cos N \phi_p \cos N \phi_q). /47/$$

Используя /44/, можно также получить

$$\Sigma_g = \sum_{q=1}^K \sum_{r=1}^K B_{qr} \delta_q^{BC} \delta_r^{BC}, /48/$$

где

$$\begin{aligned} B_{qr} &= \frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \cos k(\phi_q - \phi_r) = \cos Q |\phi_q - \phi_r| + /49/ \\ &+ \frac{\sin \pi Q}{\pi Q} \cos(\pi - |\phi_q - \phi_r|) Q - \frac{|\phi_q - \phi_r| \sin \pi Q}{\pi} \sin(\pi - |\phi_q - \phi_r|) Q. \end{aligned}$$

Наконец, согласно прикладному гармоническому анализу

$$\Sigma_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i^2. /50/$$

Окончательно для критерия качества имеем

$$\begin{aligned} 2q &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i^2 + \sum_{p=1}^{2N} \sum_{q=1}^K A_{pq} \eta_p \delta_q^{BC} + /51/ \\ &+ \sum_{q=1}^K \sum_{r=1}^K B_{qr} \delta_q^{BC} \delta_r^{BC} + 4 \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} \right)^2 D. \end{aligned}$$

Коэффициенты A_{pq} и B_{qr} даются /47/ и /49/. В этих формулах ϕ_p - азимуты сигнальных электродов, а ϕ_q и ϕ_r - азимуты корректирующих диполей.

Сила корректоров определяется из условия минимума q. Это условие ведет к следующей системе уравнений:

$$2 \sum_{p=1}^K B_{sp} \delta_p^{BC} = - \sum_{p=1}^{2N} A_{ps} \eta_p \quad (s = 1, 2, \dots, k). /52/$$

Если ввести матрицы $B = \{B_{ij}\}$ и $A = \{A_{ij}\}$ и векторы коррекций δ^{BC} и показаний датчиков $\vec{\eta}$, то /52/ можно записать в матричной форме:

$$2B \delta^{BC} = -A^T \vec{\eta}. /53/$$

Символ T означает транспонирование.

Введем матрицу

$$R = -\frac{1}{2} B^{-1} A^T. /54/$$

Матрица R зависит от азимута сигнальных электродов и корректирующих диполей, и для данного ускорителя она может быть вычислена до начала коррекции.

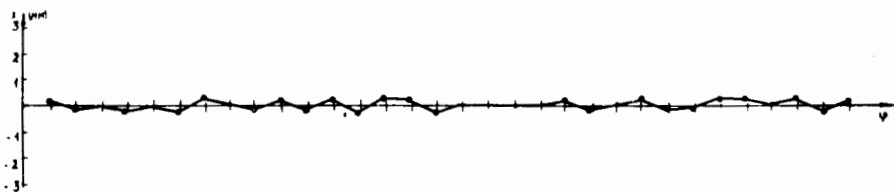


Рис.7. Коррекция орбиты динамическим методом коррекции.

Необходимая сила корректоров тогда определяется матричным равенством:

$$\vec{\delta}^{BC} = R \cdot \vec{\eta}. \quad /55/$$

Результат моделирования динамической коррекции орбиты ТИСа в горизонтальной плоскости показан на рис.7.

Качество коррекции орбиты, вычисленное по /19/, $K = 3,8\%$. Максимальная сила корректоров $\Delta V_c \Delta s = 64$ Гс·м, что дает при $\Delta s = 0,25$ м $\Delta V_c = 255$ Гс.

8. КОРРЕКЦИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Была также смоделирована коррекция орбиты в вертикальной плоскости. Начальная орбита, смоделированная на ЭВМ, показана на рис.8. Для нее $M(Z^2) \approx 16,2$ мм².

В вертикальной плоскости орбита была скорректирована только динамическим методом. Результат модели-

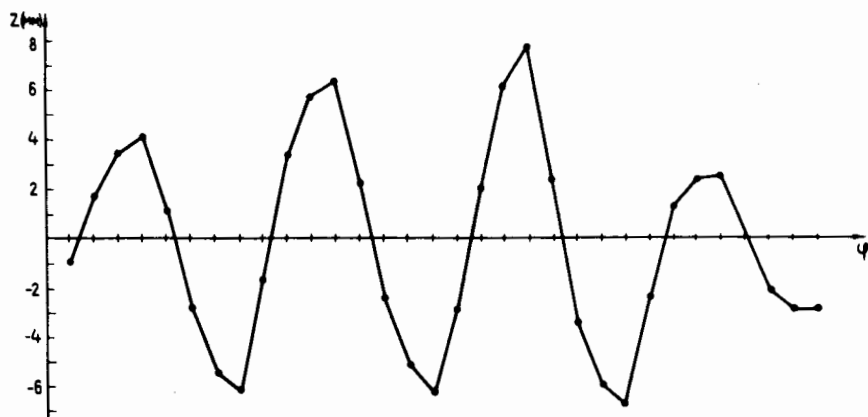


Рис.8. Начальная орбита тяжелоионного синхротрона в вертикальной плоскости.

рования коррекции дан на рис.9. В этом случае достигается качество коррекции орбиты $K = 2,5\%$. Максимальная сила корректоров $\Delta V_c \Delta s = 47$ Гс·м, что дает при $\Delta s = 25$ см $\Delta V_c = 188$ Гс.



Рис.9. Орбита в вертикальной плоскости, скорректированная динамическим методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балдин А.М. и др. ОИЯИ, 9-11796, Дубна, 1978.
2. Динев Д. ОИЯИ, 9-12479, Дубна, 1979.
3. Strolin P. CERN/ISR-TH/68-4, Geneva, 1968.
4. Gluckstern R.L. Particle Accelerators, 1978, vol.8, p. 203.
5. Хеминг Р.В. Численные методы. "Наука", М., 1968.
6. Серебренников М.Г. Гармонический анализ. ОГИЗ-Гостехиздат, М., 1948.
7. Resegotti L. CERN/ISR-MAG/68-30, Geneva, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D13-11182	Труды IX Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна, 1977.	5 р. 00 к.
D17-11490	Труды Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1977.	6 р. 00 к.
D6-11574	Сборник аннотаций XV совещания по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1978.	2 р. 50 к.
D3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
D13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
D1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
D1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
D11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
D4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
D4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
D2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
D10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
D1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
D17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
D1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
P18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Динев Д.Х. Коррекция орбиты в тяжелоионном синхротроне P9-82-502

Рассматривается коррекция орбиты в тяжелоионном синхротроне /ТИС/ в проекте УКТИ. Вычислены дисперсия орбиты и статистические свойства максимального отклонения орбиты. Дается результат моделирования орбиты и ее коррекции при помощи ЭВМ. Определено число и расположение сигнальных электродов и корректирующих диполей. Показано, как можно скорректировать орбиту тремя методами: "beam - bump" - методом, гармоническим и динамическим методом коррекции. "Beam-bump" - метод рассматривается при неравномерном расположении сигнальных электродов и корректоров. В рамках гармонического метода для вычисления коэффициентов Фурье применялся метод разрывов.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Dinev D. et al. Orbit Correction in a Heavy-Ion Synhrotron P9-82-502

The orbit correction in the Heavy-Ion Synchrotron in the project of an Accelerating Complex is considered. The orbit dispersion and the statistical properties of the orbit maximum distortion are calculated. A computer simulation of the orbit and its correction is done. A suggestion is made concerning the quantity and disposition of pick-up electrodes and correcting magnets. It is shown how to correct the orbit using the "beam-bump" method or the harmonic method or the dynamic method of correction.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.