сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P9-81-743

Л.А.Меркулов

РАСЧЕТ УСКОРЕНИЯ И ТРАНСПОРТИРОВКИ СИЛЬНОТОЧНОГО ЛАМИНАРНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В НЕЛИНЕЙНЫХ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

1981

ВВЕДЕНИЕ

В конструкции любой современной электрофизической установки /в частности, в линейном индукционном ускорителе/ можно найти большое разнообразие нелинейных оптических элементов /ускоряющий индуктор, фокусирующий соленоид, электростатические линзы, магнитный корректор и т.д./, при прохождении которых вполне вероятно возникновение резкого изменения распределения плотности объемного заряда ρ по сечению пучка.

С аналогичным физическим явлением приходится сталкиваться и в электронике интенсивных электронных потоков, используемых в современных приборах СВЧ О-типа /клистроны, лампы с бегущей волной, лампы с обратной волной и т.п./.

Фокусирующая сила в таких оптических элементах значительно, причем нелинейно, изменяется в поперечном сечении пучка, так что пучок, предполагаемый ламинарным на входе, превращается в неламинарный при дальнейшем прохождении системы /1/.

Как известно, ламинарный пучок с однородным распределением плотности заряда по сечению имеет нулевой фазовый объем и на фазовой плоскости в координатах (r, r') представлен прямой, проходящей через начало координат. Нелинейные поля оптических элементов преобразуют прямолинейный отрезок на фазовой плоскости в кривую, сохраняя нулевой фазовый объем /2/. Многократное прохождение пучка через такие элементы ускоряет процесс искривления, приводя к неламинарности.

Известно /3/, что только траектории ламинарного параксиального пучка поперечно-подобны относительно оси пучка, а плотность заряда постоянна в любом нормальном сечении. При этом рассматривается движение электронов, находящихся настолько близко к оси пучка, что можно предположить, что составляющие скорости электронов, направленные по нормали к оси пучка, малы по сравнению с составляющими, направленными параллельно оси пучка. Так как расстояния по нормали к оси пучка предполагаются малыми, то ограничиваются только членами первого порядка малости.

В общем же случае, что и будет рассмотрено в работе, параметры пучка соизмеримы с размерами фокусирующей системы, что неизбежно приведет к нелинейному характеру взаимодействия всех сил в области пучка.

Как уже отмечалось[4], нелинейные эффекты, связанные с неоднородным распределением пространственного заряда в интенсивных пучках, играют доминирующую роль.

В работе[5] приведен пример, где линейная аппроксимация всех действующих сил предсказывает максимальный диаметр пучка, который содержит только 39% общего заряда того случая расчета, когда учтены все нелинейные эффекты, а сам предсказываемый максимальный диаметр составляет только 70% диаметра, получаемого при использовании нелинейной методики расчета.

Необходимо заметить, что и в случае транспортировки электронного пучка с большим зарядом при расстоянии дрейфа в несколько десятков метров уже ощущается расплывание даже электронного пучка высокой энергии[2].

Поэтому широкое развитие и применение устройств, имеющих в наличии электронные пучки с большим зарядом, требуют и более совершенных и точных методов расчета, которые бы учитывали как нелинейный характер внешних электрических и магнитных полей, так и неоднородную структуру пучка по сечению.

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Точное уравнение траектории электрона в аксиально-симметричном ламинарном потоке релятивистских электронов в осесимметричных стационарных электрических и магнитных полях, как известно[6,7], записывается в виде /гауссова система единиц/:

$$\frac{d^2r}{dz^2}=\frac{\sigma}{\gamma\beta_z^2}\Big[r'E_z-E_r-\frac{\sigma}{\gamma}\Big(A_\phi-\frac{\alpha}{r}\Big)\Big(\frac{\partial A_\phi}{\partial r}+\frac{\alpha}{r^2}-r'\frac{\partial A_\phi}{\partial z}\Big)-\frac{2\beta_z I(r)}{cr}(1+r'^2)\Big], \qquad /1/$$

где

$$E_r=E_{r\Pi}+E_{rB}=-\frac{\partial V}{\partial r};\qquad E_z=E_{z\Pi}+E_{zB};\quad \alpha=r_0A_0$$

и предполагается определенной на некоторой поверхности катода, являющейся источником происхождения исследуемого пучка; $r'=\frac{dr}{dz}$; $\sigma=\frac{e}{E_0}$; $e>0$; e и E_0 - заряд и энергия покоя электрона; $\beta=\frac{v}{c}$; $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$; v и c - скорость электрона и скорость света;

$$\beta_z=\frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{\gamma^2-1-\sigma^2(A_\phi-\alpha/r)^2}{1+r'^2}}\quad;$$

$I(r)$ - ток пучка произвольной внутренней траектории в аксиально-симметричном ламинарном потоке, заключенный внутри окружности радиуса r; $E_{r\Pi}, E_{z\Pi}$ - радиальная и продольная составляющие электрического поля, вызванные объемным зарядом пучка; E_{rB} - суммарная радиальная составляющая внешних электрических полей; E_{zB} - суммарная продольная составляющая внешних электрических полей; A_ϕ - суммарная азимутальная составляющая векторного потенциала внешних фокусирующих полей.

Фокусировка осуществляется расположенными последовательно вдоль исследуемого участка неэкранированными соленоидами с прямоугольным сечением катушек, так что суммарная азимутальная составляющая векторного потенциала от M катушек определяется выражением

$$A_\phi(r,z) = \sum_{i=1}^{M} \left[\frac{r}{2}H_i(0,z) - \frac{r^3}{16}\frac{\partial^2 H_i(0,z)}{\partial z^2} + \ldots\right], \qquad /2/$$

где

$$H_i(0,z) = \frac{2\pi J_i}{c}\left[(z_{2i}-z)\ln\frac{r_{2i}+\sqrt{r_{2i}^2+(z_{2i}-z)^2}}{r_{1i}+\sqrt{r_{1i}^2+(z_{2i}-z)^2}} - (z_{1i}-z)\ln\frac{r_{2i}+\sqrt{r_{2i}^2+(z_{1i}-z)^2}}{r_{1i}+\sqrt{r_{1i}^2+(z_{1i}-z)^2}}\right],$$

J_i - плотность тока питания i-той фокусирующей катушки; r_{1i}, r_{2i}, z_{1i}, z_{2i} - координаты узлов сечения i-той катушки в меридианной плоскости.

В уравнении /1/ используются потенциал V, а также величины E_r и E_z, получаемые при решении уравнения Пуассона

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial V(r,z)}{\partial r}\right] + \frac{\partial^2 V(r,z)}{\partial z^2} = 4\pi\rho[r(z)]. \qquad /3/$$

Уравнения /1/ и /3/ должны быть самосогласованными. Так как $E_z = E_{z\Pi} + E_{zB}$, то, решая /3/, получим в каждой точке сечения пучка

$$E_r(r,z) = -\frac{4\pi}{r}\int_0^r \rho_0[r(z)]\,r\,dr, \qquad /4/$$

где

$$\rho_0[r(z)] = \rho[r(z)] + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Хочется отметить, что в общем виде значение потенциала $V(r,z)$ в сечении пучка легко можно определить из /4/:

$$V(r,z) = V(R_a,z) - 4\pi\left[\ln R_a \cdot \int_0^R \rho_0 r\,dr - \ln r \cdot \int_0^r \rho_0 r\,dr - \int_r^R \ln r \cdot \rho_0 r\,dr\right]. \qquad /5/$$

Соответственно

$$E_z(r,z) = \Phi(R_a,z) + 4\pi\{\ln R_a \cdot \int_0^R r'\left(\rho_0 + \frac{\partial\rho_0}{\partial r}r\right)dr +$$

$$+ \frac{R_a'}{R_a}\int_0^R \rho_0 r\,dr - \frac{r'}{r}\int_0^r \rho_0 r\,dr - \ln r \cdot \int_0^r r'\left(\rho_0 + \frac{\partial\rho_0}{\partial r}r\right)dr - \qquad /6/$$

$$- \int_r^R r'[\rho_0 + \ln r \cdot (\rho_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial r} r)]\, dr\}.$$

Так как в дальнейшем условие сохранения ламинарности предполагается рассмотреть на примерах, в которых отсутствуют внешние силы ускорения, то в уравнении /1/ выражение $(r' E_z - E_r)$ будет тождественно соотношению $-E_{r\Pi}(1 - \frac{r' E_{z\Pi}}{E_{r\Pi}})$. Учитывая сложность вычисления $E_{z\Pi}$ по /6/, оценим на простых характерных распределениях плотности заряда величину поправки $k = \frac{r' E_{z\Pi}}{E_{r\Pi}}$ с целью определения возможности пренебречь этой величиной по сравнению с $E_{r\Pi}$ для сокращения времени счета без ущерба для конечных результатов.

При рассмотрении произвольных распределений плотности заряда вида $\rho = \rho_1 e^{ar}$ и $\rho = \rho_1 e^{-ar^2}$, $r \le R(z)$, где значения $b = \rho/\rho_1$, R и R' варьировались в широком диапазоне $/0,1 \le b \le 10$; $0,012\,м \le R \le 0,024\,м$; $0 < R' \le 0,2/$, с помощью /6/ была оценена величина поправки k для тока в 250 А, которая для тех характерных параметров пучка в наших примерах /средний радиус $R \sim 0,02$м, слабо развитое радиальное движение с максимальным $R' \sim 0,1$ и на большей части пучка $1 \le b \le 2,5$/ составляет не больше 1%. Это дает полное право в дальнейших наших численных расчетах пренебречь величиной $E_{z\Pi}$ при рассмотрении конкретных примеров.

Заметим, что в процессе ускорения /особенно когда напряженность ускоряющего поля незначительна/ пренебрегать $E_{z\Pi}$ нельзя, так как по абсолютной величине $E_{z\Pi}$ и E_{zB} практически могут быть одного порядка. Энергия электрона в произвольной точке сечения определяется значением потенциала $V(r,z)$ в этой же точке, так что из уравнения /4/ с учетом неравномерного распределения плотности объемного заряда по сечению и провисания потенциала внутри пучка можно получить выражение

$$\gamma(r,z) = \gamma(R,z) + \sigma \int_r^{R(z)} E_r(r,z)\,dz, \qquad /7/$$

где $\gamma(R,z)$ - величина энергии крайнего электрона, движущегося по огибающей пучка. Уравнение /7/ также позволяет оценить разброс электронов по энергии в любом сечении потока.

Распределение потенциала в пространстве между границей пучка и металлической стенкой вакуумной камеры радиуса R_a, согласно[8], также определяется из выражения /4/, так что на границе пучка имеем

$$V(R,z) = V(R_a, z) + E_r(R,z) \cdot R \cdot \ln \frac{R_a}{R}. \qquad /8/$$

$V(R_a,z)$ – значение напряжения на стенке вакуумной камеры, эквивалентное величине приобретенной энергии электрона в данном сечении пучка и, соответственно, определяемое как

$$V(R_a,z)=V(R_a,z_H)-\int_{z_H}^{z}\Phi(R_a,z)\,dz, \qquad /9/$$

где

$$\Phi(R_a,z)=E_{zB}(R_a,z)+R_a'(z)\cdot E_{rB}(R_a,z).$$

Найденное значение $V(R,z)$ из /8/ служит основой для определения $\gamma(R,z)$ из выражения

$$\gamma(R,z)=1+\sigma\cdot V(R,z). \qquad /10/$$

Расчет уравнения /1/ для каждой траектории производится методом Рунге-Кутта четвертого порядка с переменным шагом и с заданной абсолютной точностью.

Подготовка к расчету начинается с задания исследуемого участка тракта /координаты z_H и z_k/ с соответствующими фокусирующими и ускоряющими элементами, начального радиуса пучка R_0 и заключенного внутри него тока I_0, величины начального замагничивания α_0 для огибающей пучка и начальной производной огибающей пучка R_0'.

Предполагается, что к началу рассмотрения заданный пучок был получен с помощью какого-то ускоряющего устройства и энергия его на входе участка однозначно определяется заданием величины напряжения $V(R_a,z_H)$.

В качестве начального условия на входе исследуемого участка предпочтительнее рассматривать пучок с постоянной плотностью объемного заряда по сечению, что, в принципе, вполне достижимо/6/, так как именно в этом случае наиболее точно можно определить распределения как потенциала, так и величины тока в зависимости от радиуса внутри пучка.

Условия ламинарности потока и постоянства плотности объемного заряда по сечению /только на входе/ позволяют однозначно определить в качестве начального условия как величину тока, заключенного в произвольной окружности радиуса r, так и величину начальной энергии электрона в этой точке:

$$I(r)\big|_{z_H}=\frac{c}{\sigma}(A_1-A_2+\mathrm{arctg}\,A_2-\mathrm{arctg}\,A_1), \qquad /11/$$

где

$$A_1=\sqrt{\gamma^2(r,z_H)-1}, \qquad A_2=\sqrt{\gamma^2(0,z_H)-1},$$

$$\gamma(r,z_H)=\gamma(R_a,z_H)-\sigma\pi\rho R_0^2\left(1-\frac{r^2}{R_0^2}+2\ln\frac{R_a}{R_0}\right).$$

Величина ρ очень легко определяется из условия

$$I(R_0)|_{z_H} = I_0 \ .$$

Решение самосогласованной стационарной задачи проводится путем последовательных приближений по объемному заряду при совместном решении уравнения движения /1/ и вытекающих из уравнения Пуассона /3/ уравнений /4/ ÷ /9/. Распределение плотности объемного заряда по сечению пучка в любой точке вдоль рассматриваемого участка можно определить, если известен набор траекторий внутри пучка, берущих свое начало на различных радиусах переднего фронта пучка в точке z_H. Для этого на входе участка начальный радиус огибающей пучка R_0 разбивается на N равных отрезков. Точки разбиения являются одновременно начальными координатами /радиусов и производных/ набора из N траекторий электронов с соответствующими значениями потенциалов и с соответствующими значениями токов в каждой элементарной трубке тока, определяемых с помощью /11/. Каждая рассчитанная траектория из этого набора содержит информацию, включающую в себя последовательность значений $\{z_i\}, \{r_i\}, \{r_i'\}$ и $\{\gamma_i\}$.

Наличие этих сведений, а также основополагающее условие ламинарности позволяют определить с достаточно хорошей точностью в окрестности точки пересечения каждой траектории с рассматриваемым сечением пучка соответствующие величины плотности тока

$$j_n = \frac{1}{4\pi r_n}\left[\frac{I(r_{n+1}) - I(r_n)}{r_{n+1} - r_n} + \frac{I(r_n) - I(r_{n-1})}{r_n - r_{n-1}}\right], \quad n = 1,\ldots,N-1, \qquad /12/$$

откуда уже с помощью квадратичной интерполяции можно затем получить и непрерывную зависимость $\rho = \rho(r,z)$.

Первая стадия расчета / $i=1$/ начинается с вычисления всех N траекторий на заданном участке тракта. При этом предполагается, что плотность тока по сечению пучка постоянна, а полученные при этом траектории являются базовыми для второй стадии расчета. Нелинейный характер электрического и магнитного полей проявится в нелинейной зависимости координат $r_{k,i}(n)$ всех траекторий / $n=1,\ldots,N$ / на выходе участка в точке z_k. Полученные базовые траектории являются основой для определения распределения потенциала и действующих электрических сил при вычислении N внутренних траекторий во второй стадии расчета. После сравнения значений координат $r_{k,i+1}(n)$ всех траекторий второй стадии на выходе участка с соответствующими базовыми выходными параметрами $r_{k,i}(n)$ траекторий первой стадии и в случае их несовпадения, что является вначале обычным, переходим к третьей стадии расчета, для которой все траектории второй стадии становятся базовыми. Самосогласованный расчет пучка на заданном участке тракта заканчивается, когда рассчитанный веер траекторий на некоторой стадии расчета совпадает с заданной точностью δ с базовым ходом веера траекторий предыдущей стадии, т.е. когда

$$\left| \frac{r_{k,i+1}(n) - r_{k,i}(n)}{r_{k,i}(n)} \right| \leq \delta , \quad n = 1,\ldots,N. \qquad /13/$$

Вычислительная программа предусматривает определение всех параметров самосогласованного ускоряемого ламинарного пучка в электроноводе с заданной геометрией, причем с момента задания начальных условий и до конца счета исключена необходимость каких-либо предположений.

К определяемым параметрам в любой точке рассматриваемого участка относятся радиус произвольной внутренней траектории и величина ее производной, распределение плотности тока /объемного заряда/ по сечению и энергия электронов с соответствующим разбросом в данном сечении пучка.

Программа работоспособна и с хорошей точностью отражает характер происходящих процессов до момента возникновения неламинарности. Возникшая неламинарность в точке z_0 в промежутке рассматриваемого участка автоматически ограничивает длину этого участка до координаты z_0. Дальнейший счет прекращается.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА

В качестве проверки вывода о неизбежном возникновении неламинарности, вызванной нелинейными силами электрического и магнитного характера, рассмотрим два примера, связанных с прохождением электронного пучка с начальным радиусом R_0=0,014 м и током I_0 =250 А через различные фокусирующие системы. В обоих случаях полагаем, что R_a=0,04 м, $V(R_a, z_H)$ =300 кВ и α_0 = =$95\cdot 10^{-8}$ $м^2Т$.

1/ Случай однородного магнитного поля

Распределение практически однородного магнитного поля, создаваемого пятью последовательно вплотную расположенными неэкранированными соленоидами с размерами r_{1i}=0,051 м, r_{2i} =0,081 м, $z_{2i} - z_{1i}$ =0,36 м / i =1,...,5/ и зазором между всеми соленоидами 0,02 м, изображено пунктиром на рис.1, при этом каждая катушка в отдельности создает в центре себя на оси магнитное поле B_i =0,04 Т.

Предполагаем, что в некоторой начальной плоскости z_H находящийся внутри этой фокусирующей системы электронный пучок с вышеуказанными параметрами имеет начальную производную R_0' = =0,02 и однородное распределение плотности объемного заряда

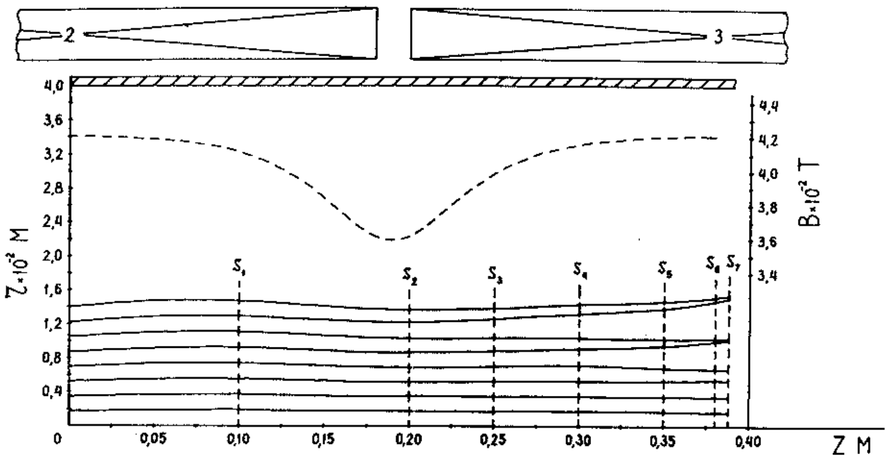


Рис.1. Схема электронно-оптического тракта для случая практически однородного магнитного поля.

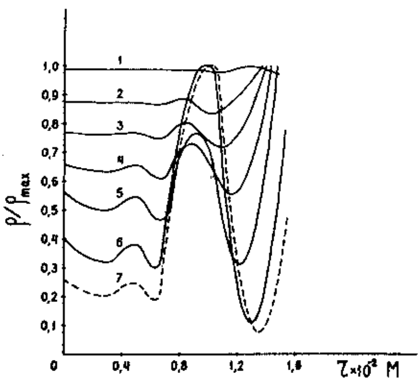


Рис.2. Относительное распределение плотности заряда в отдельных сечениях.

1. z_{S_1} =0,1 м,
2. z_{S_2} =0,2 м,
3. z_{S_3} =0,25 м,
4. z_{S_4} =0,3 м,
5. z_{S_5} =0,35 м,
6. z_{S_6} =0,38 м,
7. z_{S_7} =0,388 м.

по сечению. Поведение всех внутренних траекторий пучка изображено на рис.1 /сплошные кривые/, а относительное распределение плотности объемного заряда в пучке в отдельных сечениях $S_1 \div S_7$,т.е. там, где пучок пока еще ламинарный, изображено на рис.2.

Видно, что даже в фокусирующих магнитных полях с незначительной нелинейностью можно ожидать возникновения неламинарности в сильноточном электронном пучке.

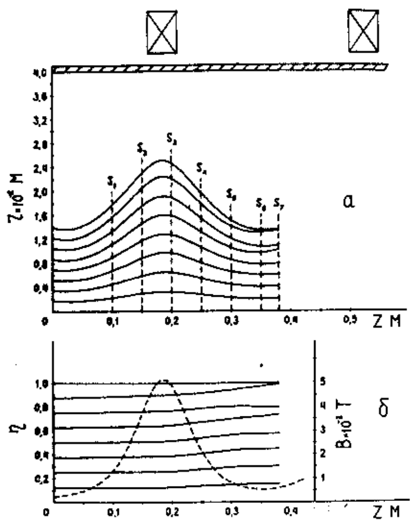
2/ Случай нелинейного магнитного поля

В данном примере мы обойдемся только фокусирующей системой, состоящей из двух одинаковых неэкранированных соленоидов и отстоящих друг от друга на расстоянии 0,29 м. Прямоугольное сечение этих катушек имеет размеры r_{1i} =0,051 м, r_{2i} =0,081 м /i =1,2/, $z_{2i} - z_{1i}$ =0,05 м и создаваемое ими поле на оси в центре каждой катушки равно B_i=0,051 Т.

Предположим, что первая фокусирующая катушка отстоит от начальной плоскости $z_н$ на расстояние 0,16 м, а начальная производная электронного пучка с теми же вышеуказанными параметрами имеет величину R_0' =-0,03.

На рис.3а изображены кривые набора внутренних траекторий пучка до момента возникновения неламинарности, в то время как на рис.3б можно видеть как распределение фокусирующего магнитного поля /пунктир/, так и кривые относительных значений $\eta(z) = \dfrac{r(z)}{R(z)}$ всего набора траекторий. Трансформация распределения плотности объемного заряда по радиусу в относительных единицах от начальной плоскости $z_н$, где оно однородно, до момента возникновения неламинарности прослеживается на рис.4, где кривые принадлежат отдельным сечениям $S_1 \div S_7$.

Можно заметить, что в обоих примерах конечный эффект неламинарности достигается один и тот же, что лишний раз подчеркивает важность учета этого явления при конкретных расчетах реальных сложных каналов.



Результат проверочного счета, в основу которого был положен конечно-разностный метод, показывает удовлетворительное качественное совпадение кривых распределения пространственного заряда по сечению с аналогичными кривыми, полученными способом, описанным в данной работе.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить А.Г.Бонч-Осмоловского и Э.А.Перельштейна за ряд полезных замечаний.

Рис.3. Схема электронно-оптического тракта для случая нелинейного магнитного поля.

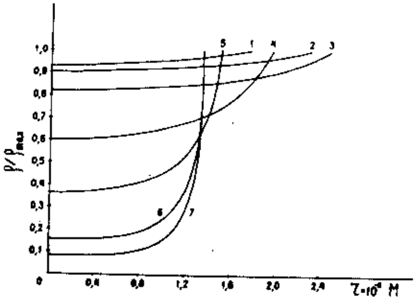


Рис.4. Относительное распределение плотности заряда в отдельных сечениях.

1. z_{S_1} =0,1 м,
2. z_{S_2} =0,15 м,
3. z_{S_3} =0,2 м,
4. z_{S_4} =0,25 м,
5. z_{S_5} =0,3 м,
6. z_{S_6} =0,35 м,
7. z_{S_7} =0,38 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коцержинский Б.А. Изв. вузов, Радиоэлектроника, 1969, 12, с. 1057.
2. Капчинский И.М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. "Атомиздат", М., 1966.
3. Кирштейн П.Т., Кайно Г.С., Уотерс У.Е. Формирование электронных пучков. "Мир", М., 1970.
4. Kuznetsov V.S. Part.Accel., 1971, 2, p.261.
5. Taylor C.S. et al. CERN, LIN 69-15, Geneva, 1969;
   В кн.: Труды VII Международной конференции по ускорителям заряженных частиц высоких энергий. т.1, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1970, с. 213.
6. Матора И.М., Меркулов Л.А. ОИЯИ, Р9-9476, Дубна, 1976; РЭ, 1977, 22, с. 1246.
7. Матора И.М. ОИЯИ, Р9-11407, Дубна, 1978.
8. Алямовский И.В. Электронные пучки и электронные пушки. "Советское радио", М., 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 ноября 1981 года.