сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р9-81-712

С.Н.Доля, Е.П.Каданцева, С.Б.Рубин

О СТРУКТУРЕ ПОЛЯ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СГУСТКА, ПРОЛЕТАЮЩЕГО СКВОЗЬ ПЛОСКИЕ ЭКРАНЫ

1981

Известно, что при пропускании сильноточного релятивистского электронного пучка сквозь фольгу амплитуда поля переходного излучения достигает значительной величины. В [1] Ломизе обратил внимание на существование при переходном излучении области "замороженного" поля, такой, что в ней некоторое время существует чисто электростатическое поле. По истечении времени, равного величине b/c /где b - радиальный размер пучка, c - скорость света/, когда распространяющееся от места влета вихревое поле достигает "замороженной области", эта область "оттаивает", и у поля появляются все компоненты.

В данной работе показано, что время существования поля со значительной напряженностью несколько больше отношения b/c и определяется скоростью "вытекания" запасенной энергии. Получены аналитические формулы для вычисления времени жизни поля в случае влета в резонатор бесконечно тонкого диска.

1. Для уточнения длительности существования области "замороженного" поля рассматривалась модельная задача влета сгустка электронов в замкнутый коаксиальный резонатор /рис.1/ длиной 4 см, внутренним радиусом 1 см и наружным 7 см. Сгусток тороидальной формы со средним радиусом $R=4$ см, радиальной толщиной 2 см и аксиальным размером 0,75 см, с полным числом электронов $N=10^{13}$ влетает в резонатор через левую торцевую стенку со скоростью $\beta_z=0{,}95$.

Методом сеток определялась карта полей E_r, E_z, H_ϕ во всем объеме резонатора. Значения полей рассчитывались в 23 точках вдоль оси z и 10 точках по радиусу для ряда фиксированных положений центра сгустка в резонаторе $z_ц = c\beta_z t$.

Основные результаты следующие. Поле, оставленное сгустком в резонаторе, имеет порядок величины МВ/см. Однополярность E_z существует значительно дольше, чем "замороженное" поле, что иллюстрируется графиками на рис.2 и 3. На рис.2 приведена зависимость H_ϕ в эрстедах от координаты z на радиусе 4 см для различных положений центра сгустка $z_ц=n/32$ /см/; так, $n = 16$ соответствует $z_ц = 0{,}5$ см, для $n = 32$ $z_ц = 1$ см и т.д.

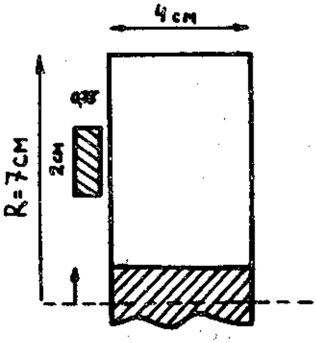

Рис.1

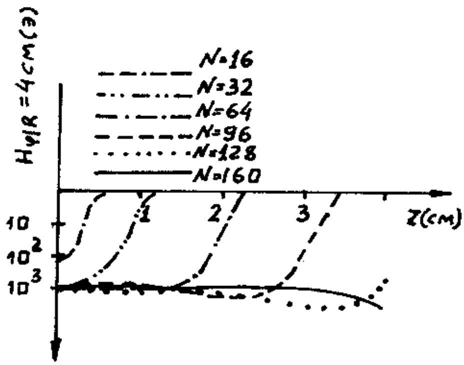

Рис.2

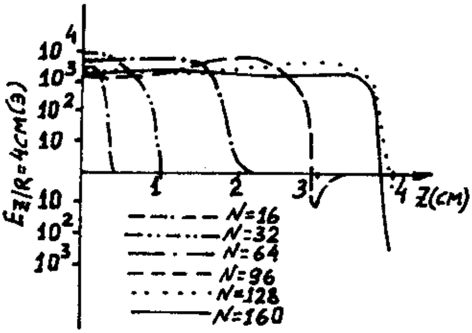

Рис.3

На рис.3 дана зависимость E_z на радиусе $r = 4$ см для тех же значений $z_ц$. Видно, что во время нахождения сгустка в резонаторе и даже после его вылета* E_z униполярно. При этом фронт поля распространяется вместе со сгустком, несколько обгоняя его. В течение некоторого времени перед сгустком существует область, свободная от поля.

2. Для более подробного рассмотрения, несколько изменив постановку задачи, можно получить аналитические зависимости. Пусть сгусток - бесконечно тонкий диск радиуса b проникает в пространство между двумя идеально проводящими плоскостями, двигаясь со скоростью $v = c\beta$. Расстояние между плоскостями h.

Используя кулоновскую калибровку потенциалов поля и разложения по собственным функциям цилиндрической области, где h - расстояние между торцевыми плоскостями; a - радиус, и положив $a \to \infty$, получим /см., например, /2/ / следующее выражение для вихревой части z-й составляющей поля $\bar{E}$ внутри области:

$$E_z^{\perp} = (E_z^{\perp})_1 + (E_z^{\perp})_2 , \qquad /1/$$

---

*После вылета сгустка из резонатора оставленное в его объеме поле является суперпозицией колебаний, соответствующих собственным частотам резонатора.

где

$$(E_z^{\perp})_1 = \frac{8\pi Q\beta^2}{bh}\sum_{m=1}^{\infty} m\cos\frac{m\pi z}{h}\sin\frac{m\pi\beta\xi}{h}\int_0^{\infty}\frac{J_1(sb)J_0(sr)s^2ds}{[s^2+(m\pi/h)^2][s^2+(m\pi/h\gamma)^2]}, \qquad /2/$$

$$(E_z^{\perp})_2 = -\frac{4Q\beta}{bh}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m\cos\frac{m\pi z}{h}\int_0^{\infty}\frac{J_1(sb)J_0(sr)\sin(\xi\sqrt{s^2+(\frac{m\pi}{h})^2})s^2}{\sqrt{s^2+(\frac{m\pi}{h})^2}[s^2+(\frac{m\pi}{h\gamma})^2]}ds. \qquad /3/$$

В /2/, /3/ знаком $\perp$ отмечена принадлежность к вихревой части поля; $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$; $\epsilon_m = \begin{cases}1 \text{ при } m=0,\\ 2 \text{ при } m\neq 0,\end{cases}$ Q - полный заряд сгустка; $\xi = ct$. Продольная часть $\bar{E}$ выражается через скалярный потенциал:

$$E_z^{\parallel} = -\frac{\partial\phi}{\partial z},$$

и при конечном радиусе a

$$\phi = \frac{16Q}{abh}\sum_{\ell,m=1}^{\infty}\frac{J_1(\nu_\ell\frac{b}{a})J_0(\nu_\ell\frac{r}{a})}{\nu_\ell J_1^2(\nu_\ell)[(\nu_\ell/a)^2+(m\pi/h)^2]}\sin\frac{m\pi z}{h}\sin\frac{m\pi x(t)}{h}, \qquad /4/$$

где ν_ℓ - корни уравнения $J_0(\xi)=0$; $x(t)$ - положение центра сгустка на оси Oz в момент t. В [2] было выполнено суммирование ряда /4/ по радиальным функциям, то есть по ℓ. В результате этого аналитически выделилась разрывная часть.* Использовав результат [2], окончательное выражение для $E_z^{\parallel}$ после предельного перехода $a\to\infty$ приводим к виду /нас интересует случай $r<b$ /:

$$E_z^{\parallel}\big|_{r<b} = \frac{8Q}{bh}\sum_{m=1}^{\infty}I_0(\frac{m\pi r}{h})K_1(\frac{m\pi b}{h})\cos\frac{m\pi z}{h}\sin\frac{m\pi x(t)}{h} - \frac{4Q}{b^2}\begin{cases}-\frac{x}{h} & \text{при } z>x(t),\\ 1-\frac{x}{h} & \text{при } z<x(t),\end{cases} \qquad /5/$$

в /5/ $x(t) = c\beta t = \beta\xi$. Интегралы в /2/ можно вычислить, и тогда при $r<b$ $(E_z^{\perp})_1$ принимает следующий вид:

$$(E_z^{\perp})_1 = -\frac{8Q}{bh}\sum_{m=1}^{\infty}I_0(\frac{m\pi}{h}r)K_1(\frac{m\pi b}{h})\cos\frac{m\pi z}{h}\sin\frac{m\pi\beta\xi}{h} + \qquad /6/$$

$$+\frac{8Q}{bh\gamma}\sum_{m=1}^{\infty}I_0(\frac{m\pi}{h\gamma}r)K_1(\frac{m\pi b}{h\gamma})\cos\frac{m\pi z}{h}\cdot\sin\frac{m\pi\beta\xi}{h},$$

---

* Ряд /4/ нельзя дифференцировать почленно, так как ряд, получающийся после дифференцирования, не является равномерно сходящимся /при $z = x(t)$ функция $\phi'(z)$ содержит разрывную часть/.

поэтому

$$[E_z^{\parallel} + (E_z^{\perp})_1]_{r<b} = -\frac{4Q}{b^2}\begin{Bmatrix} -\dfrac{\beta\xi}{h} & \text{при } z>\beta\xi \\ 1-\dfrac{\beta\xi}{h} & \text{при } z<\beta\xi \end{Bmatrix} + \qquad /7/$$

$$+\frac{8Q}{bh\gamma}\sum_{m=1}^{\infty} I_0\left(\frac{m\pi}{h\gamma}r\right)K_1\left(\frac{m\pi}{h\gamma}b\right)\cos\frac{m\pi z}{h}\sin\frac{m\pi\beta\xi}{h}.$$

При условии $\xi < b-r$ $(m \neq 0)$ вычисляются и интегралы в /3/, в результате чего $(E_z^{\perp})_2$ может быть представлено как

$$(E_z^{\perp})_2\Big|_{\xi<b-r} = -\frac{8Q}{bh\gamma}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi z}{h}\sin\frac{m\pi\beta\xi}{h}I_0\left(\frac{m\pi}{h\gamma}r\right)K_1\left(\frac{m\pi b}{h\gamma}\right) -$$

$$-\frac{4Q\beta}{bh}\int_0^{\infty} J_1(sb)\,J_0(sr)\sin(\xi s)\frac{ds}{s}. \qquad /8/$$

Теперь полное значение E_z будет следующим:

$$[E_z^{\parallel} + (E_z^{\perp})_1 + (E_z^{\perp})_2]_{\xi<b-r} =$$

$$= -\frac{4Q}{b}\begin{Bmatrix} -\beta\xi/h & \text{при } z>\beta \\ 1-\beta\xi/h & \text{при } z<\beta\xi \end{Bmatrix} - \frac{4Q\beta}{bh}\int_0^{\infty} J_1(sb)\,J_0(sr)\sin(s\xi)\frac{ds}{s}. \qquad /9/$$

Но при том же условии $\xi < b-r$ интеграл в /9/ равен ξ/b, поэтому окончательно получим

$$E_z\Big|_{\xi<b-r} = -\frac{4Q}{b^2}\begin{Bmatrix} 0 & \text{при } h \geq z < \beta\xi \\ 1 & \text{при } 0<z<\beta\xi \end{Bmatrix}, \quad \beta\xi \equiv x(t). \qquad /10/$$

Если рассматривать поле на оси $(r=0)$, то из /10/ следует, что в области $\xi<b$ перед сгустком поле отсутствует, а за сгустком оно постоянно и "заморожено". Когда $\xi = b$, возмущение, распространяющееся от места влета сгустка /точнее, от точек $r=b$, $z=0$ /, достигает оси и поле начинает меняться. Такая ситуация и рассмотрена в /1/.

Когда фронт волны пройдет область "замороженного" поля и "разморозит" его, еще в течение определенного времени запасенная в этой области энергия будет уменьшаться со скоростью, определяемой вектором Пойнтинга $\sim c\dfrac{E_z H_\phi}{4\pi}$. Таким образом, время существования значительного поля будет порядка bE_z/cH_ϕ, что превышает время существования замороженного поля $\tau \sim b/c$, так как величина $E_z/H_\phi > 1$ особенно велика сразу после "размораживания" поля.

Заметим, что в момент $\xi = h/\beta - 0$ для $z < \beta\xi$ два первых слагаемых в /9/

$$E_z = (E_z^{\perp})_1 = 0,$$

т.е. после вылета сгустка из области между пластинами оставшееся поле не содержит продольной составляющей. Оно описывается однородными уравнениями для осцилляторов поля с начальными значениями, соответствующими условиям их возбуждения в момент $\xi = h/\beta$. Ограничиваясь частью поля без вариации по z /наиболее существенной, например, для продольного ускорения ионов/, представим для $\xi > h/\beta$ E_z в виде

$$\bar{E}_z = -\frac{4Q\beta}{hb}\int_0^{\infty} J_1(sb)\,J_0(sr)\,[\sin(s\xi) - \sin[(s(\xi - \frac{h}{\beta})]]\frac{ds}{s} = -\frac{4Q\beta}{hb}\theta. \quad /11/$$

Черта сверху указывает, что взята только не зависящая от z часть полной составляющей E_z.

Будем рассматривать поле по оси z. В этом случае вычисление интеграла дает

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{h}{b\beta}\left(1 - \dfrac{\beta}{h}\sqrt{\xi^2 - b^2}\right), & \text{если } \dfrac{h}{\beta} < \xi < b + \dfrac{h}{\beta}, \\[2ex] \dfrac{h}{b\beta}\left[1 - \dfrac{2\xi - h/\beta}{\sqrt{(\xi - h/\beta)^2 - b^2} + \sqrt{\xi^2 - b^2}}\right], & \text{если } \xi > b + h/\beta. \end{cases} \quad /12/$$

Наконец, если выполнено условие $h/\beta < b$, то имеем еще дополнительно

$$\theta = \frac{h}{b\beta} \quad \text{при} \quad \xi < b. \quad /13/$$

Значение θ при $\xi > b + h/\beta$ меняет знак и при $\xi \to \infty$ стремится к нулю*. Таким образом, изменение направления $\bar{E}_z$ происходит в промежутке $h/\beta < \xi < b + h/\beta$ и соответствующее критическое значение ξ есть

$$\xi_{\text{крит.}} = \sqrt{b^2 + (h/\beta)^2}. \quad /14/$$

Учитывая /10/, в случае $h/\beta < b$ можно представить $\bar{E}_z$ в области за сгустком в виде графика, приведенного на рис.4.

Естественно, что при наличии "толщины" у сгустка и размытого фронта приведенные соотношения будут иметь только качественный смысл.

---

* Поле распространяется из приосевой области в радиальном направлении.

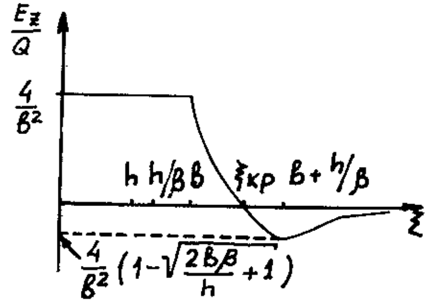

Рис.4

Анализ распределения поля /рис.4/ показывает, что если фронт пучка /в нашей модели это заряженный диск/ пройдет между плоскостями /например, из фольги/, не останавливаясь в промежутке между ними, то время существования униполярного электрического поля

$$t_{крит.} = \frac{1}{c}\sqrt{b^2+(h/\beta)^2}\,.$$

Аналитическое выражение для соответствующего суммарного поля громоздко и его трудно анализировать. Однако результаты расчета для достаточно тонкого в радиальном направлении кольца /см. рис.2,3/ показывают, что однополярное поле за сгустком существует и после "размораживания" в течение длительного промежутка - практически в течение всего времени нахождения сгустка в зазоре. Длительность существования замороженного поля тем больше, чем больше радиальная ширина пучка. Напряженность поля переходного излучения может достигать значительной величины - порядка напряженности кулоновского поля пучка.

Из результатов работ по исследованию дифракционного излучения /см., например, [3]/ следует, что сила ускорения сгустка, подлетающего с релятивистской скоростью к экрану, меньше силы торможения, действующей на сгусток за ним. Такое различие возникает вследствие того, что сгусток движется с релятивистской скоростью. При подлете к препятствию возникает небольшое встречное поле, которое ускоряет сгусток /но тормозило бы ионы/. При прохождении пучком последовательности экранов униполярное поле будет возбуждаться в каждом зазоре.

Из этого следует также, что при достижении электронным сгустком релятивистской скорости эффективная потенциальная яма для ионов /см. [4]/ при прохождении системы экранов расширяется в область за сгустком, глубина ямы при этом практически не уменьшается.

3. Можно несколько изменить постановку задачи, удалив второй экран, то есть принять $h=\infty$. Приведенные в разделе 2 формулы в этом случае допускают дальнейшие преобразования. Положив в формуле /3/, дающей собственно поле излучения, $\pi/h = d\eta$, $m\pi/h=\eta$, при $h\to\infty$ переходим от суммирования к интегрированию. Введя в двойном интеграле полярные координаты, получим

$$(E_z^{\perp})_2 = \frac{-8Q\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\phi d\phi}{(\cos^2\phi + \sin^2\phi/\gamma^2)} \times$$

/15/

$$\times \int_0^{\infty} J_1(Rb\cos\phi) J_0(Rr\cos\phi) \{\sin[R(\xi - z\sin\phi)] + \sin[R(\xi + z\sin\phi)]\} dR .$$

Рассматривая поле на оси $r=0$, можно вычислить внутренний интеграл в /15/, тогда в случае, если $\xi<\sqrt{b^2+z^2}$, получим

$$(E_z^{\perp})_2 |_{r=0} = -\frac{8Q\beta}{2\pi b^2} [\int_{\phi_1^{(-)}}^{\phi_2^{(-)}} \frac{(\xi - z\sin\phi)\cos\phi\, d\phi}{[\cos^2\phi + \frac{1}{\gamma^2}\sin^2\phi]\sqrt{b^2\cos^2\phi - (\xi - z\sin\phi)^2}} +$$

/16/

$$+ \int_{\phi_1^{(+)}}^{\phi_2^{(+)}} \frac{(\xi + z\sin\phi)\cos\phi\, d\phi}{[\cos^2\phi + \frac{1}{\gamma^2}\sin^2\phi]\sqrt{b^2\cos^2\phi - (\xi + z\sin\phi)^2}}],$$

где

$$\phi_1^{(-),(+)} = \mp \arccos\frac{\xi}{\sqrt{b^2+z^2}} + \operatorname{arctg}\frac{z}{b},$$

$$\phi_2^{(-),(+)} = \mp \arccos\frac{\xi}{\sqrt{b^2+z^2}} - \operatorname{arctg}\frac{z}{b}.$$

При $\xi>\sqrt{b^2+z^2}$ интеграл /16/ обращается в нуль. Физически это означает, что фронт излучения миновал точку наблюдения z. Таким образом, при $\xi>\sqrt{b^2+z^2}$ поле определяется квазистатическими членами, получающимися из формулы /7/ после предельного перехода $h\to\infty$. Осуществив этот предельный переход, получим вместо суммы /7/ интеграл. Последний можно вычислить и, например, для случая $r=0$, $z<\beta\xi$ получается выражение

/17

$$(E_z^{\parallel} + (E_z^{\perp})_1) = \frac{4Q}{b^2}[-1 + \frac{\beta\xi - z}{2\sqrt{b^2/\gamma^2 + (\beta\xi - z)^2}} + \frac{\beta\xi + z}{2\sqrt{b^2/\gamma^2 + (\beta\xi + z)^2}}].$$

Условие $z<\beta\xi$ означает, что наблюдение поля ведется во время, когда сгусток уже пролетел точку наблюдения z. Видно, что один из членов в /17/ относится к полю сгустка, движущегося в пространстве, а второй - к полю его изображения в экране $(z=0)$. Постоянная часть в /17/ исчезла бы при условии $z>\beta\xi$, то есть она относится к собственному полю сгустка, которое изменяется при его пересечении*. Подобная интерпретация квазистатических членов уже отмечалась в /5/.

---

*Необходимо напомнить, что сгусток - бесконечно тонкий диск радиуса b, а поле рассматривается только на оси /при $r=0$ /.

Учитывая, что фронт волны излучения к рассматриваемому моменту времени уже миновал точку наблюдения и не влияет на величину поля в ней, интересно оценить скорость изменения этого поля. Вычисление по формуле /17/ показывает, что амплитуда поля уменьшается в два раза в точке $z=0$ за время $t=\frac{1}{\sqrt{3}\,c}\cdot\frac{b}{\sqrt{\gamma^2-1}}$. В тот же момент времени в точке $z=\frac{b}{2\gamma}$ поле составляет величину 0,6 от максимального. Как видно, время существования значительной величины поля увеличивается с уменьшением скорости движения сгустка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломизе Л.Г. ЖТФ, 1980, 50, вып.9, с.1815.
2. Рубин С.Б., Мамонов В.Н. ОИЯИ, 9-3346-2, Дубна, 1967.
3. Кузнецов А.Б., Рубин С.Б. ЖТФ, 1971, XLI, вып.9, с.1891.
4. Иванов И.Н. и др. ЭЧАЯ, 1971, т.1, вып.2, с.390.
5. Ломизе Л.Г., Свешникова Н.Н. Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978. ОИЯИ, Дубна, 1979, т.2, с.281.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 ноября 1981 года.