сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P9-81-62

В.Н.Мамонов, С.Б.Рубин

К ЗАДАЧЕ О ВОЗБУЖДЕНИИ СИСТЕМЫ КОЛЬЦЕВЫХ ЭКРАНОВ ДВИЖУЩИМСЯ СГУСТКОМ ЭЛЕКТРОНОВ

1981

Несмотря на расширяющееся внедрение численных методов в практику исследований взаимодействия потока ускоряемых заряженных частиц с ускоряющей структурой, даже ограниченное аналитическое рассмотрение случаев, в которых оно удается, представляет интерес. В работах [1, 2] с помощью аналитической техники факторизации Винера-Хопфа-Фока задачи о взаимодействии сгустка частиц с плоским диафрагмированным "волноводом" и прямоугольным волноводом в конечном счете были сведены к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, однако аналитическая форма промежуточных выражений в то же время дала возможность судить об основных характерных физических свойствах возбужденных полей. При численных методах расчета извлечь аналогичные данные было бы труднее.

В практических приложениях чаще используются азимутально-симметричные структуры. К сожалению, мощный метод факторизации хорошо приспособлен лишь для "декартовых конфигураций". Поэтому в азимутально-симметричных случаях обычно при расчетах пользуются методами, более непосредственно связанными с численными /метод сеток, метод "сшивания"/.

I

В качестве азимутально-симметричной системы, поддающейся решению с помощью комбинированного подхода /не с помощью факторизации/ и имеющей практический интерес, ниже рассмотрена открытая периодическая структура, состоящая из кольцевых идеально проводящих экранов, взаимодействующих со сгустком цилиндрической формы, пролетающим по оси системы с постоянной скоростью v.

Подход к некоторым аналитическим преобразованиям, используемым далее, был предложен в [3] /в [3] рассматривались бесконечно протяженные экраны с "пролетным отверстием" и давались некоторые асимптотические оценки потерь энергии сгустком на излучение в случае $v \to c$; структура и обозначения размеров даны на рис.1а/. В дальнейшем Q - полный заряд сгустка, b - радиус, 2ℓ - длина.

Для $r > b$ фурье-разложение первичного поля такого источника определяется z-составляющей фурье-компонентой вектора Герца ($k = \frac{\omega}{c}$, $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$)

$$\Pi^{(0)}_{z\omega} = \frac{iQ}{\pi\omega} K_0\left(\frac{kr}{\gamma\beta}\right) I_0\left(\frac{kb}{\gamma\beta}\right) \frac{\sin(k\ell/\beta)}{(k\ell/\beta)} e^{i\frac{kz}{\beta}} \quad . \qquad /1/$$

Из периодичности структуры и постоянства скорости источника следует известное соотношение, связывающее значение плотности наведенного тока на произвольном m-м экране системы с током на условно выделенном "нулевом экране" /в силу симметрии отлична от нуля только r-я составляющая тока на экранах/

$$j_{rm}\left(r, t + \frac{mD}{v}\right) = j_{r0}(r,t), \qquad \text{или} \quad j_{rm\omega}(r) = e^{\frac{imDk}{\beta}} j_{r0\omega}(r). \qquad /2/$$

Вторичные поля, создаваемые токами, определяются через фурье-компоненту вектора Герца ($\Pi_{\phi\omega} = \Pi_{z\omega} \equiv 0$)

$$\Pi_{r\omega} = \frac{i}{ck} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{A_s} j_{rs\omega}(r') \frac{e^{ikR_s}}{R_s} \cos(\phi-\phi') r' dr' d\phi' , \qquad /3/$$

где $R_s = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\phi-\phi') + (z-sD)^2}$, A_s - площадь s-го экрана. После ряда преобразований /см. приложение 1/, основанных на использовании соотношения /2/, $\Pi_{r\omega}$ приводится к виду

$$\Pi_{r\omega} = -\frac{2\pi^2}{ckD} \int_{R_1}^{R_2} j_{r0\omega}(r') \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{iw_s z} \begin{cases} J_1(\kappa_s r) H_1^{(1)}(\kappa_s r'), & r < r' \\ J_1(\kappa_s r') H_1^{(1)}(\kappa_s r), & r > r' \end{cases} \right) r' dr' , \qquad /4/$$

где

$$w_s = \frac{k}{\beta} - \frac{2\pi s}{D}, \quad \kappa_s = \sqrt{k^2 - w_s^2} \qquad (\mathrm{Im}\{\kappa_s\} > 0) . \qquad /5/$$

Из /4/ видно, что для решения задачи достаточно найти функцию $j_{r0\omega}(r)$ - распределение тока на выделенном "нулевом" элементе. На каждом элементе структуры /экране/ выполняется граничное условие

$$[E^{(0)}_{r\omega} + E_{r\omega}]\Big|_{\substack{R_1 \le r \le R_2 \\ z = mD}} = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \qquad /6/$$

Однако в силу /2/ совокупность условий /6/ сводится всего к одному условию. Записав его для нулевого элемента ($m=0$), сведем задачу к интегродифференциальному уравнению, которому удовлетворяет функция $j_{r0\omega}(r)$. $E^{(0)}_{r\omega}$ получится дифференцированием из /1/, а

$$E_{r\omega} = \hat{\mathfrak{L}} \Pi_{r\omega}, \quad \hat{\mathfrak{L}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + k^2 . \qquad /7/$$

Обозначим сумму, входящую в /4/ /при значении $z = 0$ /, через $M(k,r,r')$, т.е.

$$M(k,r,r') = -\frac{2\pi^2}{ckD} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} J_1(\kappa_s r) H_1^{(1)}(\kappa_s r'), & r < r' \\ J_1(\kappa_s r') H_1^{(1)}(\kappa_s r), & r > r' \end{Bmatrix} . \qquad /8/$$

Тогда условие /6/, записанное для нулевого элемента $(m=0)$, приводит к искомому уравнению:

$$\hat{\mathfrak{L}} \int_{R_1}^{R_2} M(k,r,r') j_{r\omega 0}(r') r' dr' = -E_{r\omega}^{(0)}(r,z)|_{z=0} . \qquad /9/$$

Дифференциальный оператор $\hat{\mathfrak{L}}$ нельзя непосредственно внести под знак интеграла, т.к. после этого сумма, представляющая подынтегральное выражение, становится расходящейся. Поэтому приходится предварительно применить следующий искусственный прием, см.[4]. Обозначив интеграл, входящий в /9/, через $\Phi(k,r)$ и решая дифференциальное уравнение $\mathfrak{L}\Phi = -E_{r\omega}^{(0)}(r)$ относительно функции $\Phi(k,r)$ как неизвестной, получим с учетом значения $E_{r\omega}^{(0)}$, $\Gamma \equiv 1/\gamma\beta$:

$$\Phi(k,r) = A J_1(kr) + BY_1(kr) - \frac{2Q}{\pi k\gamma} \frac{\sin(k\ell/\beta)}{(k\ell/\beta)} I_0(\Gamma kb) K_1(\Gamma kr) \equiv \Psi(k,r). \quad /10/$$

$A = A(k)$, $B = B(k)$ - не зависящие от r константы. Для определения их можно использовать "условия на ребре" для искомого тока, которые в данном случае сводятся к соотношениям

$$j_{r0\omega}(r)|_{r=R_1;R_2} = 0. \qquad /11/$$

В результате вместо /9/ получается интегральное уравнение 1-го рода

$$\int_{R_1}^{R_2} M(k,r,r') j_{r0\omega}(r') r' dr' = AJ_1(kr) + BY_1(kr) - \frac{2Q}{\pi k\gamma} \frac{\sin(k\ell/\beta)}{(k\ell/\beta)} I_0(\Gamma kb) K_1(\Gamma kr) \qquad /12/$$

с областью изменения переменной $R_1 \le r \le R_2$ и условиями /11/, налагаемыми на неизвестную функцию.

II

Ядро $M(k,r,r')$ уравнения /12/, определяемое формулой /8/, имеет логарифмическую особенность при $r=r'$. Это следует из того, что функциональный ряд /8/ логарифмически расходится в точке $r=r'$. В [3] было предложено преобразование ряда /8/ к следующей интегральной форме /см. приложение 2/:

$$M(k,r,r') = -2\pi \int_0^\infty J_1(kr\sqrt{v^2-2iv})\, J_1(kr'\sqrt{v^2-2iv})\, G(v)\, dv\,, \qquad /13/$$

$$G(v) = \mathrm{ctg}\left[\frac{kD}{2\beta}(1+\beta+i\beta v)\right] - \mathrm{ctg}\left[\frac{kD}{2\beta}(1-\beta-i\beta v)\right] = -\frac{2\sin[kD(1+iv)]}{\cos[kD(1+iv)]-\cos(kD/\beta)}^{*}. \qquad /14/$$

Легко видеть, что интеграл /13/, так же как и исходное выражение /8/, логарифмически расходится при $r=r'$, однако форма /13/ оказывается более удобной в том отношении, что позволяет явным образом выделить эту особенность ядра. Займемся этим делом. Учитывая, что $\lim_{v\to\infty} G(v) = -2i$, представим /13/ в следующем тождественном виде:

$$M = -2\pi\Big\{\int_0^\infty J_1(kr\sqrt{v^2-2iv})\, J_1(kr'\sqrt{v^2-2iv})\,[G(v)+2i]\,dv - $$
$$- 2i\int_0^\infty J_1(kr\sqrt{v^2-2iv})\, J_1(kr'\sqrt{v^2-2iv})\,dv\Big\}. \qquad /15/$$

В /15/ первый интеграл сходится экспоненциально, второй требует дальнейших преобразований. Деформируем путь интегрирования $\mathcal{L}_1 = \{0,\infty\}$ в путь $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ в плоскости комплексной переменной v при $V\to\infty$, см. рис.2а. Можно записать /с учетом того, что внутри контура $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_4 + (-\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3)$ подынтегральная функция не имеет особенностей и что по лемме Жордана, условия для которой в данном случае выполнены, $\int_{\mathcal{L}_4} (\ldots)\,dv \to 0$ при $V\to\infty$/,

$$I_2 \equiv \int_{\mathcal{L}_1} J_1(kr\sqrt{v^2-2iv})\, J_1(kr'\sqrt{v^2-2iv})\,dv = \int_{\mathcal{L}_2}(\ldots)\,dv + \int_{\mathcal{L}_3}(\ldots)\,dv. \qquad /16/$$

Делая в первом из интегралов /16/ замену $v = iy$, а во втором – $v = i + x$, получим

$$I_2 = i\int_0^1 J_1(kr\sqrt{2y-y^2})\, J_1(kr'\sqrt{2y-y^2})\,dy + \int_0^\infty J_1(kr\sqrt{1+x^2})\, J_1(kr'\sqrt{1+x^2})\,dx. \qquad /17/$$

Очевидно, что особенностью обладает лишь второй интеграл в /17/. Выберем некоторое значение x_a, такое, чтобы при $x = x_a$ можно было бы использовать асимптотику функций Бесселя /вообще говоря, x_a зависит от величины k/. Произведем разбиение

---

* В [3] в этой формуле имеется ошибка в знаке: между обоими котангенсами должен стоять именно знак минус.

$$\int_0^\infty J_1(kr\sqrt{1+x^2})J_1(kr'\sqrt{1+x^2})dx \approx \int_0^{x_a} J_1(kr\sqrt{1+x^2})J_1(kr'\sqrt{1+x^2})dx + \qquad /18/$$
$$+\frac{1}{\pi k\sqrt{rr'}}\int_{x_a}^\infty \{\cos[k(r-r')\sqrt{1+x^2}] - \sin[k(r+r')\sqrt{1+x^2}]\}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Представив $\int_{x_a}^\infty = \int_0^\infty - \int_0^{x_a}$ и собирая члены с одинаковыми пределами, получаем

$$I_2 = i\int_0^1 J_1(kr\sqrt{2y-y^2})\,J_1(kr'\sqrt{2y-y^2})\,dy + \int_0^{x_a}\{J_1(kr\sqrt{1+x^2})J_1(kr'\sqrt{1+x^2}) -$$
$$-\frac{\cos[k(r-r')\sqrt{1+x^2}] - \sin[k(r+r')\sqrt{1+x^2}]}{\pi k\sqrt{rr'}\,\sqrt{1+x^2}}\}\,dx + \qquad /19/$$
$$+\int_0^\infty \frac{\cos[k(r-r')\sqrt{1+x^2}] - \sin[k(r+r')\sqrt{1+x^2}]}{\pi k\sqrt{rr'}\,\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Последний из интегралов в /19/ подстановкой $x=\sqrt{u^2-1}$ приводится к двум табличным /см.[5] стр. 433/. Окончательный вид ядра с выделенной уже теперь особенностью будет:

$$M = -2\pi\{\int_0^\infty J_1(kr\sqrt{v^2-2iv})J_1(kr'\sqrt{v^2-2iv})[G(v)+2i]dv + \qquad /20/$$
$$+2\int_0^1 J_1(kr\sqrt{2y-y^2})\,J_1(kr'\sqrt{2y-y^2})\,dy - \lim_{x_a\to\infty} 2i\int_0^{x_a}[J_1(kr\sqrt{1+x^2})J_1(kr'\sqrt{1+x^2}) -$$
$$-\frac{\cos[k(r-r')\sqrt{1+x^2}] - \sin[k(r+r')\sqrt{1+x^2}]}{\pi k\sqrt{rr'}\,\sqrt{1+x^2}}]dx + \frac{i}{k\sqrt{rr'}}[J_0[k(r+r')] + Y_0[k|r-r'|]]\}.$$

Особенность ядра определяется членом $-\frac{2\pi i}{k\sqrt{rr'}}Y_0(k|r-r'|)$, остальная часть ядра, кроме конечного члена $\sim J_0[k(r+r')]$, представляет собой билинейное разложение, выраженное в интегральной форме; входящие в него интегралы сходятся достаточно быстро.

III

Итак, для определения вторичных токов $j_{r0\omega}(r)$ необходимо решить интегральное уравнение 1-го рода /12/. Известно, что в общем случае эта задача является некорректной. Однако согласно численному методу, изложенному в работе Дмитриева и Захарова[6], которому мы будем следовать, при наличии у ядра уравнения слабой особенности, например типа логарифмической, происходит саморегуляризация задачи. Она основывается на том, что соответствующая матрица в силу наличия особенности у ядра имеет диагональные элементы, превосходящие по абсолютной величине остальные элементы. В результате численный счет оказывается достаточно устойчивым при не слишком малом шаге интегрирования. Численная процедура решения для /12/ основывается на замене интегрального уравнения системой линейных алгебраических уравнений и существенно использует предположение о гладкости искомой функции внутри промежутка (R_1, R_2) и на его краях. Поведение ее на краях промежутка, определяемое соотношением /11/, можно еще уточнить: в случае бесконечно тонкого экрана ток, текущий перпендикулярно к ребру этого экрана, при приближении к краю его спадает пропорционально $\rho^{1/2}$, где ρ - расстояние от края. Гладкость же функции внутри промежутка можно обеспечить только ограничением рассматриваемого частотного интервала. Таким образом, настоящее решение пригодно будет только в области ограниченных значений $k(R_2 - R_1)$.

Для дальнейшего удобно, учитывая условия для тока на ребре, представить плотность тока в виде

$$j_{r0\omega}(r) = u(k,r)\,[(R_2 - r)(r - R_1)]^{-1/2} , \qquad /21/$$

где $u(k,r)$ - новая неизвестная функция, которая линейно обращается в нуль при приближении r к R_2 или R_1. Множитель $[(R_2 - r)(r - R_1)]^{-1/2}$ можно включить в ядро.

Отрезок $[R_1, R_2]$ разбивается на элементарные части с равномерным шагом $h = (R_2 - R_1)/N$, и соответствующая система уравнений, приближенно заменяющая уравнение /12/, представится в виде $/\Psi(k,r)$ - правая часть уравнения /12//

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N} A_{ij} u_j = \psi_i , \quad A_{ij} = \int_{r'_j}^{r'_{j+1}} \frac{M(k, r_i, r')r'\,dr'}{\sqrt{(R_2 - r')(r' - R_1)}} , \\ &r'_j = R_1 + (j-1)h , \quad r'_{j+1} = r'_j + h , \quad u_j \approx u(k, r'_j + h/2), \\ &r_i = R_1 + (i - 1/2)\,h , \quad \psi_i = \Psi(k, r_i), \quad i = 1,2,\ldots,N . \end{aligned}\right\} \qquad /22/$$

Таким образом, u_j представляет "среднее значение" неизвестной функции u внутри элементарного интервала. Возможность этой замены следует из принятого условия о гладкости искомой функции. В процессе счета это предположение необходимо контролировать, вычисляя колебание полученного решения на элементарных интервалах. К сожалению, как уже было сказано, из-за ухудшения устойчивости, определяемой матрицей A_{ij}, нельзя добиться существенного повышения точности, значительно увеличивая число разбиений N.

Эффективность способа решения системы /22/ зависит от скорости и точности счета коэффициентов A_{ij}. Поэтому очень важна процедура вычисления соответствующих интегралов. С целью уменьшения времени счета приходится рассматривать три случая: 1/ особая точка $r = r'$ лежит вне отрезка интегрирования $[r'_j, r'_{j+1}]$, а сам отрезок находится вблизи краев экрана. 2/ Особая точка - вне отрезка $[r'_j, r'_{j+1}]$, сам отрезок - достаточно далеко от краев экрана. 3/ Особая точка лежит внутри отрезка $[r'_j, r'_{j+1}]$.

Опуская подробности вычислений, обратимся к следующему: в правую часть системы /22/ входят неизвестные коэффициенты $A(k)$, $B(k)$, тем не менее задача полностью замыкается, если потребовать выполнения условия линейного спада функции $u(k, r)$ на краях области. При дискретном представлении /22/ это осуществляется с помощью линейной интерполяции. Поскольку $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}, u_N$ есть значения u в серединах элементарных промежутков длины $h = (R_2 - R_1)/N$, то линейная интерполяция к нулю в точках $r' = R_1$ и $r' = R_2$ будет означать соотношения

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{3h/2}{h/2} = 3, \quad \frac{u_{N-1}}{u_N} = 3 \qquad /23/$$

для значений функции в ближайших к началу и концу области точках сетки. Запишем для краткости: $\psi_i = \Psi(k, r_i) = A(k) f_i + B(k) \phi_i + \chi_i$. Переходя к векторным обозначениям, имеем вместо /22/ $\hat{A}\bar{u} = A(k)\bar{f} + B(k)\bar{\phi} + \bar{\chi}$, отсюда

$$\bar{u} = A \cdot (\hat{A}^{-1} \bar{f}) + B \cdot (\hat{A}^{-1} \bar{\phi}) + \hat{A}^{-1} \bar{\chi} \equiv A \cdot \bar{v}^{(1)} + B \cdot \bar{v}^{(2)} + \bar{v}^{(3)}, \qquad /24/$$

где $\bar{v}^{(1)}$, $\bar{v}^{(2)}$, $\bar{v}^{(3)}$ - известные /после численного счета/ вектора. Выписывая первые два и последние два $(i = 1, 2;\ i = N-1, N)$ из равенств, входящих в систему /24/, и принимая во внимание /23/, получим значения A, B. После подстановки значений A, B в /24/ определяется полностью искомый вектор $\bar{u}$, и тем самым с учетом /21/ на выбранной сетке нахсдятся значения плотности тока.

Поля получаются теперь с помощью выражения /4/. Можно вычислить и полную работу, совершаемую вторичным полем над источником на периоде структуры. Соответствующая формула имеет вид

$$\Delta W = \int_0^\infty W_\omega \, d\omega = \frac{8\pi Q}{\gamma \beta^2} \int_0^\infty [k I_0(\Gamma k b) \frac{\sin(k\ell/\beta)}{(k\ell/\beta)} \int_{R_1}^{R_2} \mathrm{Re}\{j_{r0\omega}(r)\} K_1(\Gamma k r) r dr] dk. \qquad /25/$$

Эта формула является точной /вывод ее см. в приложении 3/. Функция $j_{r0\omega}(r)$ при расчетах, выполненных по изложенному способу, оказывается известной лишь на определенной сетке значений /при каждом фиксированном значении k /, поэтому внутренний интеграл в /25/ следует вычислять численно, пользуясь той же самой сеткой. При вычислении внешнего интеграла необходимо задаваться шагом по переменной k.

IV

Необходимая для удовлетворительного счета гладкость функции $j_{r0\omega}(r)$ может быть обеспечена лишь ограничением частотного интервала: $k < k_{max}$, где $k_{max} > \frac{2\pi}{R_1}$, и определяется в зависимости от числа разбиений отрезка $[R_1, R_2]$.

Для получения хотя бы грубой оценки влияния оставшегося частотного "шлейфа" $k_{max} < k \le \gamma(R_1-b)^{-1}$* можно поступить следующим образом. Рассматривается случай, когда $R_1 = a$, $R_2 \to \infty$. Будем искать магнитную составляющую вторичного поля в форме

$$H_{\phi\omega} = e^{ikz/\beta}\, W(r,z), \qquad /26/$$

где W - периодична по z с периодом D. Так как $H_{\phi\omega}$ удовлетворяет однородному уравнению

$$(\hat{\mathfrak{L}}_r + k^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}) H_{\phi\omega} = 0, \quad \hat{\mathfrak{L}}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) - \frac{1}{r^2}, \qquad /27/$$

то для функции W получим $(\hat{\mathfrak{L}}_r + \frac{2ik}{\beta}\frac{\partial}{\partial z} - k^2\Gamma^2 + \frac{\partial}{\partial z^2})W = 0$. Вводя безразмерные переменные $r = \xi\sqrt{\frac{D}{k}}$, $z = D\zeta$, имеем

$$\hat{\mathfrak{L}}_\xi W + \frac{2i}{\beta}\frac{\partial W}{\partial \zeta} + kD\Gamma^2 W + \frac{1}{kD}\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} = 0. \qquad /28/$$

Будем рассматривать высокочастотную часть поля и примем, что $kD \gg 1$, кроме того, считаем: $D \sim a$ или $D > a$ и при $\gamma^2 \gg 1$ $k\Gamma^2 D \ll 1$. При этих условиях последними двумя членами в /28/ можно пренебречь. В результате искомая функция удовлетворяет уравнению параболического типа

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi\frac{\partial W}{\partial \xi}) - \frac{W}{\xi^2} + \frac{2i}{\beta}\frac{\partial W}{\partial \zeta} = 0. \qquad /29/$$

Для уравнения, сопряженного к /29/, которое отличается от /29/ лишь знаком перед производной $\partial W/\partial\zeta$, можно построить функцию Грина. Она будет иметь вид /мы возвратимся к старым переменным r, z /

---

* При больших значениях k вклад высоких частот уже спадает соответственно $\sim e^{-k(R_1-b)/\gamma}$.

$$G(r,z;r',z') = \begin{cases} -\dfrac{i}{z-z'} J_1\left(\dfrac{r'rk}{\beta(z-z')}\right)\exp\left[\dfrac{i(r'^2+r^2)k}{2\beta(z-z')}\right] & \text{при} \quad z > z', \\ 0 \quad \text{при} \quad z < z' \end{cases} \qquad /30/$$

и удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{z'\to z,\,(z'>z)} G(r,z;r',z') = \frac{i\beta}{k}\,\frac{\delta(r-r')}{r}, \quad G(r,z;r',z') \to 0 \qquad /31/$$

при $r \to \infty$ или $r' \to \infty$.

Будем рассматривать область $\Omega(0 \le r' < a,\ 0 \le z' \le z-\epsilon)$. В этой области функции $W(r',z')$ и G непрерывны вместе со своими производными и G так же, как и W, удовлетворяет однородному уравнению, которое в записи по r', z' дает

$$\hat{\mathfrak{L}}_{r'} G(r,z;r',z') = \frac{2ik}{\beta}\,\frac{\partial G(r,z;r',z')}{\partial z'}, \quad \text{а} \quad \hat{\mathfrak{L}}_{r'} W = -\frac{2ik}{\beta}\,\frac{\partial W(r',z')}{\partial z'}.$$

Составив из этих равенств выражение

$$W\hat{\mathfrak{L}}_{r'} G - G\hat{\mathfrak{L}}_{r'} W = \frac{2ik}{\beta}\left[W\frac{\partial G}{\partial z'} + G\frac{\partial W}{\partial z'}\right] = \frac{2ik}{\beta}\,\frac{\partial}{\partial z'}(WG),$$

проинтегрируем его по Ω, в результате чего получится

$$\int_0^{z-\epsilon} dz'\left[W\frac{\partial G}{\partial r'}r' - G\frac{\partial W}{\partial r'}r'\right]_0^a = \frac{2ik}{\beta}\int_0^a [W(r',z-\epsilon)G(r,z;r',z-\epsilon) - W(r',0)\,G(r,z;r',0)]\,r'dr'. \qquad /32/$$

Учитывая, что W, G - гладкие функции при $r'=0$, переходя к пределу $\epsilon \to 0$, с учетом /31/ получим

$$W(r,z) = \frac{a}{2}\int_0^z \left\{G(r,z;a,z')\frac{\partial W(r',z')}{\partial z'}\Big|_{r'=a} - W(a,z')\frac{\partial G(r,z;r',z')}{\partial r'}\Big|_{r'=a}\right\}dz' - \frac{ik}{\beta}\int_0^a W(r',0)\,G(r,z;r',0)\,r'dr'. \qquad /33/$$

Если теперь в /33/ положить $z=D$ и учесть периодичность функции W, т.е., что $W(r',D) = W(r',0)$, то получится интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода относительно функции $W(r',0)$. Однако в этом уравнении пока остаются неизвестными функции

$W(a,z')$, $\dfrac{\partial W(r',z')}{\partial r'}\Big|_{r'=a}$ при $0 \le z' \le D$.

Можно, однако, для первоначальной оценки выразить эти величины через поле $H^{(0)}_{\phi\omega}$ самого сгустка: $H^{(0)}_{\phi\omega} = \frac{Qk}{\pi\beta\gamma c} K_1\left(\frac{kr}{\gamma\beta}\right) e^{ik\frac{z}{\beta}} = W_0(r)\, e^{ik\frac{z}{\beta}}$. Окончательно получится

$$W(r,0) = \frac{a}{2}\int_0^D \left\{ G(r,D;a,z')\frac{\partial W_0}{\partial r'}\Big|_{r'=a} - W_0(a)\,\frac{\partial G(r,D;r',z')}{\partial r'}\Big|_{r'=a} \right\} dz' - \qquad /34/$$
$$- \frac{ik}{\beta}\int_0^a W(r',0)\, G(r,D;r',0)\, r'dr',$$

где теперь член, выражаемый интегралом по z', представляет известную функцию r. Приведенная процедура, по-видимому, дает возможность дальнейших уточнений путем проведения итераций.

V

Изложенная методика /исключая материал раздела IV/ была частично использована для создания программы для ЭВМ CDC-6500, и были выполнены некоторые численные расчеты.

Рассматривались структуры с размерами $R_1 = 5,3$ см, $R_2 = 8,3$ см с периодами $D = 10$ см и $D = 4$ см. Расчеты проводились для $\gamma = 5,025$ в случае тонкого сгустка с радиусом $b = 4,25$ см и длиной вдоль оси OZ $\ell = 0,1$ /в лабораторной системе координат/.

Ввиду большой сложности окончательного выражения /25/, для вычисления которого уже в ряде промежуточных процедур требуется вычислять двукратные интегралы от комплекснозначных функций и использовать подпрограммы для вычисления комплексных функций Бесселя, время счета оказывается сильно зависящим от числа разбиений N основного интервала (R_2, R_1) и шага по частотной переменной k. Поэтому не все расчеты выполнялись с максимальным числом коэффициентов /разбиений/, которое было принято равным 20. Большая часть вычислений сделана при $N = 15$ и для более низких частот при $N=10$. Сходимость по числу коэффициентов контролировалась путем рассмотрения решений интегрального уравнения, т.е. графиков распределения тока $j_{r0\omega}(r)$ по экрану, соответствующих данному числу разбиений при выбранных значениях параметра k. Некоторые из этих графиков приведены на рис.16 в частотной области в окрестности $k \approx 1,3$. Сплошной линией даются графики, соответствующие $N = 20$, пунктирной - 15 и штрих-пунктирной - 10. Как видно, сходимость от $N = 15$ к $N = 20$ имеет место. Потери на излучение ΔW /на период структуры и на частицу/ были вычислены лишь в низкочастотной части возбужденного спектра в интервале $0 < k \leq 1,3$. Концевая точка интервала соответствует длине волны в свободном простран-

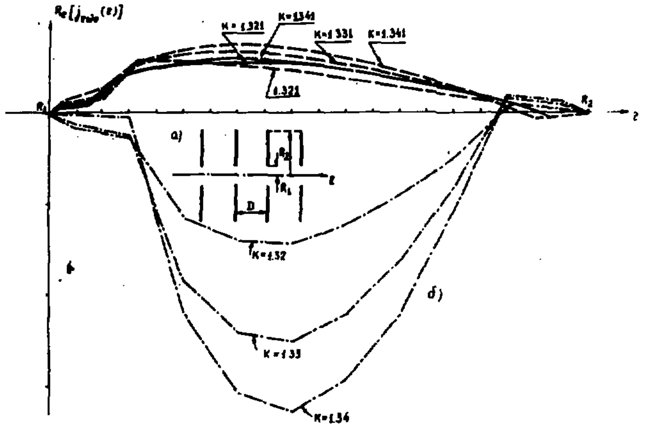

Рис.1. а/ Система кольцевых экранов; б/ распределение вторичных токов на экране в зависимости от частоты $\omega = ck$ и порядка приближения.

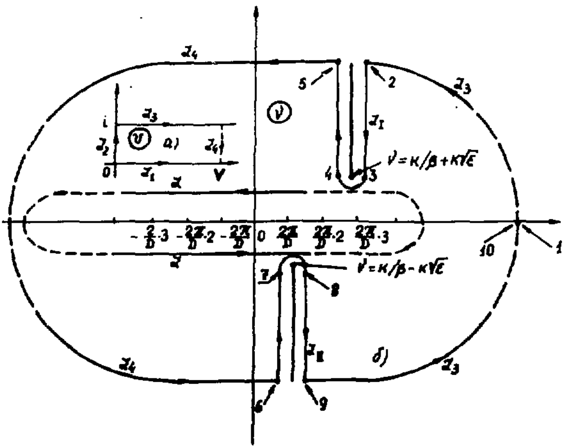

Рис.2. а/,б/. Преобразования контуров интегрирования.

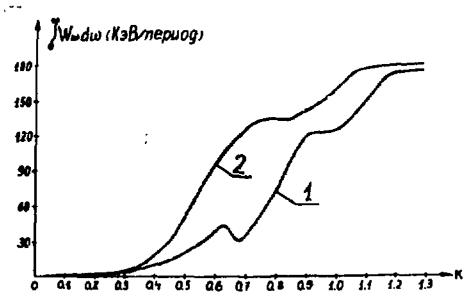

Рис.3. Интегральные потери ΔW при $\gamma = 5{,}025$. 1 – период $D = 10$ см, 2 – $D = 4$ см.

стве: $\lambda = 4{,}8$ см. Эти волны уже распространяются через отверстия в экранах. Графики интегральных потерь для двух случаев показаны на рис.3. Потери достигают ~180 кэВ/пер. при $D = 4$ см, $N_e = 10^{13}$ частиц в сгустке.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Для преобразования /3/ к виду /4/ применим интегральное преобразование

$$\frac{e^{ikR_s}}{R} = \frac{e^{ik\sqrt{H^2+(z-sD)^2}}}{\sqrt{H^2+(z-sD)^2}} = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(vH)\, e^{iw(z-sD)}\, dw, \qquad /1.1/$$

где $H = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\phi-\phi')}$, $v = \sqrt{k^2 - w^2}$, $\mathrm{Im}\, v > 0$. С учетом разложения

$$H_0^{(1)}(vH) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} J_m(vr)\, H_m^{(1)}(vr'), & r < r' \\ J_m(vr')\, H_m^{(1)}(vr), & r > r' \end{matrix} \right\} e^{-im(\phi-\phi')} \qquad /1.2/$$

после интегрирования по ϕ' находим

$$\Pi_{r\omega} = -\frac{\pi}{ck}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_{R_1}^{R_2} j_{rs\omega}(r')\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ \begin{matrix} J_1(vr)\, H_1^{(1)}(vr') \\ J_1(vr')\, H_1^{(1)}(vr) \end{matrix} \right\} e^{iw(z-sD)}\, dw\, r'dr'. \qquad /1.3/$$

С помощью /2/ /1.3/ приводится к виду

$$\Pi_{r\omega} = -\frac{\pi}{ck}\int_{R_1}^{R_2} j_{r0\omega}(r')\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwz}\left\{ \begin{matrix} J_1(vr)\, H_1^{(1)}(vr') \\ J_1(vr')\, H_1^{(1)}(vr) \end{matrix} \right\}\sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{i(\frac{kD}{\beta}-wD)s}\right) r'dr'. \qquad /1.4/$$

Так как $\frac{1}{2\pi}\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{iws} = \sum_{s=-\infty}^{\infty}\delta(w-2\pi s)$, то, интегрируя по w с учетом обозначений /5/, приходим к формуле /4/.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Сумму /8/ $k=\frac{\omega}{c}$, $\kappa_s=\sqrt{k^2\epsilon-(\frac{k}{\beta}-\frac{2\pi s}{D})^2}$ *сначала представим интегралом по контуру $\mathcal{L}$, проведенному в плоскости комплексного переменного ν, как показано на рис.2б.

$$M=\frac{i\pi}{ck}\int_{\mathcal{L}}\left\{\begin{matrix} J_1(r\sqrt{k^2\epsilon-(k/\beta-\nu)^2})H_1^{(1)}(r'\sqrt{k^2\epsilon-(k/\beta-\nu)^2}),\ r<r' \\ J_1(r'\sqrt{k^2\epsilon-(k/\beta-\nu)^2})\ H_1^{(1)}(r\sqrt{k^2\epsilon-(k/\beta-\nu)^2}),\ r>r' \end{matrix}\right\}\mathrm{ctg}(\frac{\nu D}{2})d\nu. \qquad /2.1/$$

Для униформизации многозначных функций из точек ν_+, ν_- проведены разрезы. /Чтобы доказать равенство /2.1/, заметим, что внутри контура $\mathcal{L}$ подынтегральная функция однозначна и имеет полюса только в точках $\nu=0,\pm\frac{2\pi}{D},\pm\frac{2\pi}{D}\cdot 2,\ldots$ с вычетами $\frac{2}{D}$/. Деформируем контур $\mathcal{L}$ в контур $\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_3+\mathcal{L}_4$ так, как показано на рис.2б, где $\mathcal{L}_3,\mathcal{L}_4$ - части окружности бесконечно большого радиуса, а $\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$ - обходы около разрезов. Выбираем ту ветвь многозначной функции $\sigma(\nu)=\sqrt{k^2\epsilon-(k/\beta-\nu)^2}$, которая при больших по модулю действительных значениях ν имеет положительную мнимую часть. Деформация контура $\mathcal{L}$ не нарушает равенства /2.1/, т.к. в процессе ее не встречаются какие-либо новые особенности подынтегральной функции, а все прежние полюса остаются и внутри нового контура. $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{L}_4$ не дают вклада в интеграл. Действительно, при изменении ν вдоль пути $\mathcal{L}_3$ /от точки 9 до точки 2/ $\alpha=\arg\{\sigma(\nu)\}$ изменяется в пределах $0<\alpha<\pi$, а модуль $\rho=|\sigma(\nu)|$ остается постоянным и очень большим. Можно использовать асимптотику обеих цилиндрических функций. Тогда,

---

*В отличие от /5/ в κ_s введена величина ϵ - диэлектрическая проницаемость свободного пространства. Согласно "принципу предельного поглощения" ϵ имеет малую мнимую добавку и поэтому /при $\sim e^{-i\omega t}$ / представляется в форме $\epsilon=\epsilon'+i\epsilon''$, где $\epsilon'=1$, $\epsilon''(\omega)>0$ и $\epsilon''(-\omega)=-\epsilon''(\omega)$. После выполнения всех аналитических преобразований следует считать $\epsilon''=0$.

например, для $r<r'$ имеем на этом контуре

$$J_1(r\sigma(\nu))H_1^{(1)}(r'\sigma(\nu)) \sim \frac{1}{\rho}[e^{ir\rho(\cos a+i\sin a)} + e^{-ir\rho(\cos a+i\sin a)}]\times$$
$$\times e^{ir'\rho(\cos a+i\sin a)} \sim \frac{1}{\rho}e^{-(r'-r)\rho\sin a} \to 0$$

при $\rho\to\infty$*. При рассмотрении изменения ν вдоль пути $\mathfrak{L}_4$ /от точки 5 до точки 6/ необходимо учесть, что при обходе верхнего разреза $\arg\{\sigma(\nu)\}$ теряет π, и поэтому снова имеем $0\le a\le\pi$, т.е. опять оказывается справедливой использованная выше асимптотика /т.к. теперь концы интервала включены, то требуется выполнение в этой области условий леммы Жордана, что и обеспечивается наличием еще множителя $\sim\rho^{-1}$ /. При $r>r'$ согласно /2.1/ переставляются и аргументы у цилиндрических функций; таким образом, и в последнем случае соответствующие вклады отсутствуют.

Преобразуем интегралы, соответствующие путям $\mathfrak{L}^I$, $\mathfrak{L}^{II}$. Обозначим через $\sigma_1(\nu)$ значения функции $\sigma(\nu)$ на левом берегу верхнего разреза. Тогда значения ее на правом берегу представятся, как $e^{i\pi}\sigma_1(\nu)$. При $r<r'$ имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{L}^I} J_1(r\sigma(\nu))H_1^{(1)}(r'\sigma(\nu))\operatorname{ctg}(\frac{\nu D}{2})d\nu = \int\limits_{\nu_+}^{\nu_++i\infty} J_1(r\sigma_1(\nu))H_1^{(1)}(r'\sigma_1(\nu))\operatorname{ctg}(\frac{\nu D}{2})d\nu+$$
$$+\int\limits_{\nu_++i\infty}^{\nu_+} J_1(re^{i\pi}\sigma_1(\nu))H_1^{(1)}(r'e^{i\pi}\sigma_1(\nu))\operatorname{ctg}(\frac{\nu D}{2})d\nu=$$
$$=\int\limits_{\nu_+}^{\nu_++i\infty} J_1(r\sigma_1(\nu))H_1^{(1)}(r'\sigma_1(\nu))\operatorname{ctg}(\frac{\nu D}{2})d\nu - \qquad /2.2/$$
$$-\int\limits_{\nu_+}^{\nu_++i\infty} J_1(r\sigma_1(\nu))e^{i\pi}[-H_1^{(1)}(r'\sigma_1(\nu))+2J_1(r'\sigma_1(\nu))]\operatorname{ctg}(\frac{\nu D}{2})d\nu =$$
$$=2\int\limits_{\nu_+}^{\nu_++i\infty} J_1(r\sigma_1(\nu))J_1(r'\sigma_1(\nu))\operatorname{ctg}(\frac{\nu D}{2})d\nu .$$

Обозначим через $\sigma_2(\nu)$ значение функции $\sigma(\nu)$ на правом берегу нижнего разреза. Тогда ее значение на левом берегу есть $e^{i\pi}\sigma_2(\nu)$ /учитываем, что при переходе от левого берега этого разреза к правому обход точки ν_-, так же как и ранее точки ν_+, идет по часовой стрелке и, следовательно, $\arg\{\sigma(\nu)\}$ снова теряет π /. Аналогично /2.2/

---

*Несущественные множители и слагаемые опущены.

$$\int_{\mathfrak{L}^{II}} J_1(r\sigma(\nu))H_1^{(1)}(r'\sigma(\nu))\,\mathrm{ctg}(\frac{\nu D}{2})d\nu = -2\int_{-i\infty+\nu_-}^{\nu_-} J_1(r\sigma_2(\nu))J_1(r'\sigma_2(\nu))\,\mathrm{ctg}(\frac{\nu D}{2})d\nu. \qquad /2.3/$$

Обозначив интеграл в правой части формулы /2.1/ через I, имеем:

$$I = \int_{\mathfrak{L}} \begin{Bmatrix} J_1(r\sigma(\nu))H_1^{(1)}(r'\sigma(\nu)), & r<r' \\ J_1(r'\sigma(\nu))H_1^{(1)}(r\sigma(\nu)), & r>r' \end{Bmatrix} \mathrm{ctg}(\frac{\nu D}{2})\,d\nu =$$

$$= 2\int_{\nu_+}^{\nu_++i\infty} J_1(r\sigma_1(\nu))\,J_1(r'\sigma_1(\nu))\,\mathrm{ctg}(\frac{\nu D}{2})\,d\nu - \qquad /2.4/$$

$$-\,2\int_{-i\infty+\nu_-}^{\nu_-} J_1(r\sigma_2(\nu))\,J_2(r'\sigma_2(\nu))\,\mathrm{ctg}(\frac{\nu D}{2})\,d\nu .$$

Заметим, что подынтегральные выражения в /2.4/ являются четными функциями от $\sigma_1(\nu)$ или $\sigma_2(\nu)$, поэтому теперь несущественно, на каком берегу разреза рассматривается та или иная функция. Будем считать для определенности $\sigma_1(\nu)=\sigma(\nu)$, $\sigma_2(\nu)=\sigma(\nu)$ соответствующими правым берегам того и другого разрезов и сделаем замены: на контуре верхнего разреза в /2.4/ положим $\nu = e^{+i\frac{\pi}{2}}kv+\nu_+$, на контуре нижнего – $\nu=e^{-i\frac{\pi}{2}}kv+\nu_-$. После этих замен /2.4/ приведется к окончательному виду:

$$I=2ik\int_0^\infty J_1(r\sqrt{v^2-2iv\sqrt{\epsilon}})\,J_1(r'\sqrt{v^2-2iv\sqrt{\epsilon}})\{\mathrm{ctg}[\frac{kD}{2\beta}(1+\beta\sqrt{\epsilon}+i\beta v)] - \qquad /2.5/$$

$$-\,\mathrm{ctg}[\frac{kD}{2\beta}(1-\beta\sqrt{\epsilon}-i\beta v)]\}dv.$$

В /2.5/ можно положить теперь $\sqrt{\epsilon}=1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Общее выражение для работы, совершаемой в единицу времени вторичным полем $\bar{E}$ над источником, выражается соотношением

$$\frac{dW}{dt} = -\int_v \bar{j}\bar{E}\,dv, \left(\bar{j}(\bar{r},t) = \bar{e}_z\,\frac{Qv_0\sigma(\ell-|z-v_0t|)\delta(r-b)}{4\pi r\ell}\;;\; \sigma(\xi)=\begin{cases}1, & \xi>0\\ 0, & \xi<0\end{cases}\right).$$

Подставив $\bar{E}(\bar{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty}\bar{E}_\omega(\bar{r})\,e^{-i\omega t}\,d\omega = 2\mathrm{Re}\{\int_0^\infty \bar{E}_\omega(\bar{r})\,e^{-i\omega t}\,d\omega\}$, имеем

$$W=-\int_t\int_v \bar{j}\cdot 2\mathrm{Re}\{\int_0^\infty \bar{E}_\omega\,e^{-i\omega t}\,d\omega\}\,dvdt = -\int_0^\infty 2\mathrm{Re}\{\int_t(\int_v \bar{j}(\bar{r},t)\,\bar{E}_\omega dv)e^{-i\omega t}dt\}d\omega = \int_0^\infty W_\omega d\omega.$$

Стало быть, выражение для спектральных потерь есть

$$W_\omega = -2\,\mathrm{Re}\left\{\int_t \left[\int_v \bar{j}(\bar{r},t)\,\bar{E}_\omega(\bar{r})\,dv\right] e^{-i\omega t}\,dt\right\}. \qquad /3.1/$$

Так как ток, создаваемый движением сгустка, имеет только z-ю составляющую, то в /3.1/ входит только $E_{z\omega}$-компонента поля. С помощью /4/ находим

$$E_{z\omega}(r) = -\frac{2\pi^2 i}{ckD}\int_{R_1}^{R_2} j_{z0\omega}(r')\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} \kappa_s w_s e^{iw_s z}\begin{cases} J_0(\kappa_s r)H_1^{(1)}(\kappa_s r'),\ r<r' \\ J_1(\kappa_s r')H_0^{(1)}(\kappa_s r),\ r>r' \end{cases}\right) r'dr'.$$

В области источника $r \le b \le R_1 \le r'$ поэтому следует пользоваться верхней строчкой фигурной скобки в /3.2/. Подставив /3.2/ и выражение $\bar{j}(\bar{r},t)$ в /3.1/, будем вести интегрирование по t на интервале, соответствующем времени пролета источником одного периода структуры, т.е. $0 \le t \le D/v_0$. В результате приходим к формуле /25/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережной В.А., Воскресенский Г.В. Труды РИАН, М., 1973, №14, с.106.
2. Бережной В.А. Труды РИАН, М., 1973, №14, с.117.
3. Кузнецов А.Б., Рубин С.Б. Труды VII Международной конференции по ускорителям заряженных частиц. Ереван, 1969, т.II, с.561.
4. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. "Мир", М., 1964.
5. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, М., 1962, с.433.
6. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Вычислительные методы и программирование. Изд-во МГУ, М., 1973, №10, с.12-21.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 января 1981 года.