объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р9-80-679

А.Г.Бонч-Осмоловский

К ТЕОРИИ КУЛОНОВСКОГО СДВИГА ЧАСТОТ НЕКОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЧАСТИЦ В СИНХРОТРОНАХ

Направлено в АЭ

1980

Сдвиг частот некогерентных колебаний частиц является одним из главных факторов, ограничивающих достижение высокой интенсивности пучка в современных ускорителях. Основы теории этого эффекта были заложены в работах Керста, Ласлетта и др. /1-3/. На основе данных этих работ был сформулирован так называемый критерий Ласлетта максимальной интенсивности пучка ускорителя с определенными параметрами:

$$N = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{h^2 A}{r_p Z^2 \bar{R}}\cdot\frac{(\nu_z^{o\,2}-\nu_z^2)\gamma_0}{\epsilon_1\left[1+\dfrac{1}{B(\gamma_0^2-1)}\right]+\epsilon_2\dfrac{h^2}{g^2}+\dfrac{h^2}{B(\gamma_0^2-1)\,b(a+b)}}. \qquad /1/$$

Здесь h - полувысота камеры ускорителя, $\gamma_0=(1-\beta_0^2)^{-1/2}$ - релятивистский фактор инжектируемого пучка, $r_p=\frac{e^2}{M_p c^2}=1,54\cdot10^{-16}$ см , $\bar{R}$ - средний радиус ускорителя, eZ, A - заряд и атомный вес ускоряемых частиц, $\epsilon_1=\frac{\pi^2}{48}$, $\epsilon_2=\frac{\pi^2}{24}$, B - фактор группировки /доля орбиты, занятая пучком/, a, b - малые размеры поперечного сечения сгустка по вертикали (z) и горизонтали (r). ν_z^o - безразмерная частота вертикальных колебаний в отсутствие пространственного заряда, ν_z - безразмерная частота вертикальных колебаний с "кулоном", соответствующая полосе ближайшего опасного резонанса /параметрического/.

Как правило, сдвиг вертикальных колебаний больше сдвига горизонтальных, чем и определяется запись критерия в форме /1/.

Главные предположения, сделанные при установлении /1/, сводятся к следующим двум:

1/ Плотность частот в сгустке близка к однородной,

2/ Размеры a, b сгустка существенно меньше высоты камеры.

Оба допущения приводят к тому, что, согласно /1/, сдвиг частот для всех частиц сгустка практически одинаков, и, следовательно, если из-за такого сдвига частицы попадают в зону действия какого-либо резонанса, то последний влияет одновременно и одинаково на все частицы сгустка.

Далее мы откажемся от обоих допущений и покажем, что после формирования сгустка в сепаратрисе и в начале ускорения, главным образом вследствие неоднородности плотности объемного заряда, частицы сгустка оказываются распределенными по величине сдвига некогерентных частот, так что лишь некоторая их часть попадает в зону действия какого-либо резонанса, причем величина сдвига меняется существенным образом не только в процессе ускорения, но и в период радиально-фазовых колебаний. Предварительное изучение этих вопросов было начато в наших предыдущих работах /4,5,6/, далее мы дадим более полное, с математической точки зрения, исследование изменений сдвига.

Соизмеримость h и a,b была достаточно полно рассмотрена в /4/, она сводится к следующим изменениям величин ϵ_1 и ϵ_2 в /1/:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_1\Big|_{\substack{x=0\\ z=0}} &\approx \frac{\pi^2}{48} - \frac{a^2/4h^2}{4\left(1+\frac{a^2}{4h^2}\right)}; \\ \epsilon_1\Big|_{\substack{x\approx a\\ z=0}} &\approx \frac{\pi^2}{48} - \frac{a^2/5h^2}{1+a^2/h^2}, \qquad a<2h,\ a\gg b. \end{aligned}\right\} \qquad /2/$$

Здесь $x=r-\bar{R}$. Совершенно так же меняется и ϵ_2.

РАСЧЕТ СДВИГА В НЕОДНОРОДНОМ ПО ПЛОТНОСТИ СГУСТКЕ

Для последовательного учета неоднородности плотности частиц в сгустке необходимо опираться на данные экспериментальных измерений, либо на самосогласованную теорию сгустка в сепаратрисе, опять-таки учитывающую опыт. Мы примем за основу закон изменения плотности в объеме сгустка, достаточно общий и неплохо отражающий результаты измерений как на синхрофазотроне ОИЯИ /7/, так и на других ускорителях. Положим, что

$$\rho(x,\phi,z) = \rho_\phi(\phi)\, e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}} . \qquad /3/$$

Здесь $\rho_\phi(\phi)$ - некоторая функция азимутальной координаты. Для определенности положим

$$\rho_\phi(\phi) = \rho_0\left(1-\frac{\phi^2}{\phi_0^2}\right)^{3/2}. \qquad /4/$$

Формула /4/ близка к экспериментальному профилю сгустка в СФ и, как мы покажем далее, может быть обоснована простыми теоретическими моделями. $2\phi_0$ в /4/ - азимутальная протяженность сгустка, она связана с фактором В /см. ниже/.

Поскольку всегда выполнено сильное неравенство:

$$\frac{a}{\bar{R}\,\phi_0} \ll 1, \qquad /5/$$

то при решении задачи о нахождении полей сгустка можно свести ее к задаче о поле в поперечной плоскости, считая на каждом азимуте неизменными форму сечения /эллипс с полуосями a, b / и распределение плотности. Зависимость плотности от ϕ при этом будет учтена в выражении сдвига в виде медленно меняющегося множителя, вид которого ясен из /4/. Итак, имеем для потенциала

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 4\pi\rho_\phi e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}}, \quad \rho_\phi = \rho_0(1-\phi^2/\phi_0^2)^{3/2}. \qquad /6/$$

Уравнение Пуассона вида /6/ решалось неоднократно /8,9/. Ниже мы изложим метод, приводящий к результатам в компактной форме, позволяющей произвести несложный качественный и количественный анализ. Легко проверить, что решение /6/ можно представить в виде разложения в интегралы Фурье по x и z:

$$\Phi(x,\phi,z) = -ab\rho_\phi \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\ell \exp(ikz + i\ell x)\, \frac{\exp\left(-\frac{a^2\ell^2}{4} - \frac{b^2k^2}{4}\right)}{\ell^2 + k^2}. \qquad /7/$$

Действительно, если к обеим частям этого равенства применить оператор Лапласа Δ, то мы получим формулу /6/, поскольку /10/:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p^2x^2 \pm qx)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\frac{q^2}{4p^2}.$$

Теперь градиенты поля можно представить в виде следующих интегралов*:

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = ab\rho_\phi \iint_{-\infty}^{\infty} dk\, d\ell\, \frac{\ell^2}{\ell^2 + k^2} \exp\left(i\ell x + ikz - \frac{a^2\ell^2}{4} - \frac{b^2k^2}{4}\right) \qquad /8/$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = ab\rho_\phi \iint_{-\infty}^{\infty} dk\, d\ell\, \frac{k^2}{\ell^2 + k^2} \exp\left(i\ell x + ikz - \frac{a^2\ell^2}{4} - \frac{b^2k^2}{4}\right). \qquad /9/$$

В дальнейшем нас будут интересовать значения градиентов в медианной плоскости, т.е. при $z = 0$:

---

* Наличие границ учитывается введением ϵ_1 и ϵ_2 в формулу /1/.

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x}\Big|_{z=0} = 4ab\rho_\phi \int_0^\infty dk \int_0^\infty \frac{\ell^2 d\ell}{\ell^2+k^2}\, e^{-\frac{a^2\ell^2}{4}-\frac{b^2k^2}{4}} \cos \ell x, \qquad /10/$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial z}\Big|_{z=0} = 4ab\rho_\phi \int_0^\infty \cos \ell x\, d\ell \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\ell^2+k^2}\, e^{-\frac{a^2\ell^2}{4}-\frac{b^2k^2}{4}} . \qquad /11/$$

Введем интеграл вероятностей - функцию Φ /10/:

$$\Phi(qy) = \frac{2q}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-q^2t^2} dt, \qquad q>0. \qquad /12/$$

Тогда, используя формулу

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu^2x^2}}{x^2+\beta^2}\, dx = \frac{\pi}{2\beta}\, e^{\mu^2\beta^2} [\, 1-\Phi(\beta\mu)], \qquad \beta>0,$$

нетрудно привести /10/ и /11/ к виду:

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x}\Big|_{z=0} = 2\pi ab\rho_\phi \int_0^\infty \ell\, d\ell \cos \ell x\, e^{-\frac{\ell^2}{4}(a^2-b^2)} [\, 1-\Phi(\frac{\ell b}{2})] = 2\pi ab\rho_\phi J_q(p,x) \qquad /13/$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial z}\Big|_{z=0} =$$

$$= 2\pi ab\rho_\phi \{ \frac{2}{ab} e^{-\frac{x^2}{a^2}} - \int_0^\infty \ell\, d\ell \cos \ell x\, e^{-\frac{\ell^2}{4}(a^2-b^2)} [1-\Phi(\frac{\ell b}{2})] = 2\pi ab\rho_\phi [\frac{2}{ab} e^{-\frac{x^2}{a^2}} - J_q(p,x)].$$

/14/

Здесь введена функция J_q:

$$J_q(p,x) = \int_0^\infty \ell\, d\ell \cos \ell x\, e^{-q\ell^2} [\, 1-\Phi(p\,\ell)\,], \qquad q=a^2-b^2>0, \quad p=b/2. \qquad /15/$$

Интеграл J через элементарные функции не выражается, однако его можно упростить до вида, удобного для численных и качественных расчетов. Вычислим

$$\frac{\partial J_q(p,x)}{\partial p} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \ell^2 d\ell \cos \ell x\, e^{-\ell^2 q^2 - q\ell^2} .$$

Этот интеграл вычисляется /10/:

$$\frac{\partial J_q(p,x)}{\partial p} = -\frac{2(p^2+q)-x^2}{4(p^2+q)^{5/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4(p^2+q)}} . \qquad /16/$$

Следовательно, для $J_q(p,x)$ можно получить

$$J_q(p,x) = \frac{1}{4}\int_p^\infty e^{-\frac{x^2 q}{4(p^2+q)}} [\frac{2}{(p^2+q)^{3/2}} - \frac{x^2}{(p^2+q)^{5/2}}]\, dp.$$

После серии замен переменных приведем J к форме, удобной для исследований:

$$J_q\left(\frac{b}{2},x\right)=\frac{1}{a^2}\int_0^1\frac{\left(1-2\frac{x^2}{a^2}t\right)e^{-\frac{x^2}{a^2}t}}{\sqrt{1-qt/a^2}}\,dt. \qquad /17/$$

Вблизи центра сгустка ($x=0,\ z=0,\ \phi=0$) из /13/, /14/ или /15/ и /17/ получаем ($J_q(b/2,0)=2/a(a+b)$):

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\ \phi=0\\ z=0}}\simeq\frac{4\pi b\rho_0}{a+b};\ -\frac{\partial E_z}{\partial z}\Big|_0\simeq\frac{4\pi a\rho_0}{a+b}.$$

Следовательно, кулоновский сдвиг частот для частиц в центре сгустка равен /как обычно, линеаризованные уравнения движения около равновесной орбиты $r=r_0$, $z=0$ запишем в виде

$$\ddot{x}+\omega_H^2(\nu_x^2+\Delta\nu_x^2)\,x=0;\ \ddot{z}+\omega_H^2(\nu_z^2+\Delta\nu_z^2)\,z=0/:$$

$$\Delta\nu_x^2\Big|_0=\frac{4\pi b\bar{R}^2 r_p Z^2 n_0}{\beta^2\gamma^3(a+b)\,A},\qquad n_0=\frac{\rho_0}{eZ}, \qquad /18/$$

$$\Delta\nu_z^2\Big|_0=\frac{4\pi a\bar{R}^2 r_p Z^2 n_0}{\beta^2\gamma^3(a+b)\,A}. \qquad /19/$$

n_0 можно связать с полным числом частиц в пучке:

$$N=8n_0\bar{R}\int_0^L\int_0^h e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}}\,dx\,dz\int_0^{\phi_0}(1-\phi^2/\phi_0^2)^{3/2}d\phi.$$

Теперь

$$N=n_0\frac{\pi^2 ab}{8}\bar{R}\,\Phi\left(\frac{L}{a}\right)\cdot\Phi\left(\frac{h}{b}\right). \qquad /20/$$

Так как $L>a$, $h>b$ ($\frac{L}{a},\frac{h}{b}\gtrsim 1,5$), то можно использовать асимптотические разложения для функции Φ /10/:

$$\Phi(x)=\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\,x}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{4x^4}-\ldots\right). \qquad /21/$$

Ограничимся с хорошей точностью /<4%/ первым членом. Тогда

$$n_0\simeq\frac{8N}{3\pi^2\bar{R}\,ab\,\phi_0}. \qquad /22/$$

Для однородно-заряженного /вдоль азимута/ пучка, очевидно:

$$n_0 = \frac{N}{2\pi^2 \bar{R} a b B},$$

и сравнение с /22/ позволяет написать для фактора группировки, который мы сохраним для удобства записи:

$$B = \frac{3\phi_0}{16}. \qquad /23/$$

Окончательно сдвиг в центре сгустка /за счет собственного поля сгустка/ оказывается равным

$$\Delta\nu_x^2|_0 = \frac{2 r_p \bar{R} N Z^2}{\pi a(a+b)\beta^2\gamma^3 BA}, \qquad /24/$$

$$\Delta\nu_z^2|_0 = \frac{2 r_p \bar{R} N Z^2}{\pi b(a+b)\beta^2\gamma^3 BA}. \qquad /25/$$

Выражения /24,25/ совпадают с главными членами в формулах Ласлетта для равномерно-заряженного пучка /3/, при этом B дается формулой /23/. Тот же результат получается и для круглого пучка с произвольным распределением плотности заряда по малому радиусу. Сдвиг в центре сгустка есть некоторая универсальная величина, равная сдвигу для равномерно заряженного пучка. Существенно иное получается для частиц, равновесные орбиты которых /в медианной плоскости/ не совпадают с осью симметрии пучка, где поле пространственного заряда равно нулю, а градиент максимален, в данном случае $x = 0$, $r = \bar{R}$ и $z = 0$. Очевидно, речь идет об орбитах, распределенных по радиусу около $r = \bar{R}$ в связи с энергетическим разбросом в пучке.

Формулы для главных членов кулоновского сдвига частот имеют вид:

$$\Delta\nu_x^2 = -\frac{\partial E_x}{\partial x}\Big|_{\substack{r_0 \\ z=0}} \cdot \frac{e Z^2 \bar{R}^2}{M_p A \beta^2\gamma^3 c^2} = \frac{r_p \bar{R} N Z^2}{\pi\beta^2\gamma^3 BA} \cdot J_q\left(\frac{b}{2}, x\right)\left(1 - \frac{\phi^2}{\phi_0^2}\right)^{3/2}, \qquad /26/$$

$$\Delta\nu_z^2 = \frac{r_p \bar{R} N Z^2}{\pi\beta^2\gamma^3 BA}\left[\frac{2}{ab} e^{-x^2/a^2} - J_q\left(\frac{b}{2}, x\right)\right] \cdot \left(1 - \phi^2/\phi_0^2\right)^{3/2}. \qquad /27/$$

Под x здесь надо понимать смещение равновесной орбиты от среднего радиуса ускорителя $\bar{R}$, $x = r_0 - \bar{R}$, а под ϕ - отклонение азимута данной частицы от центра сгустка /равновесной фазы $\phi = \phi_s$ /. Очевидно, сдвиг для произвольных частиц с учетом этих результатов является функцией x и ϕ и уменьшается с ростом отклонений частиц от центра сгустка: при $x > a$ сдвиг ν_x^2 и $\nu_z^2 \sim 1/x^2$ /асимптотика функции $J(x)$ / и при $x \approx a$ на порядок величины меньше, чем при $x = 0$. Приведем явный вид функции $J_q(b/2, x)$ при $q = 0$ / $a = b$, круглый пучок/. В этом случае интеграл в /4.20/ легко вычисляется, и получаем:

$$J_0\left(\frac{b}{2}, x\right) = -\frac{1}{x^2}\left(1 - e^{-x^2/a^2} - \frac{2x^2}{a^2} e^{-x^2/a^2}\right) \simeq \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{3x^2}{2a^2} + \frac{5x^4}{6a^4}\right). \qquad /28/$$

Любопытно, что функция J /а также сдвиг $\Delta\nu_x^2$ / может изменить знак при $x > a$, но эта область мало интересна - она относится к "гало" вокруг сгустка, частицы в котором дают малый вклад в интенсивность пучка и большей частью теряются на первом этапе ускорения.

Нам понадобится еще приближенное выражение для функции J при малых x/a и произвольной эллиптичности /произвольном $q \neq 0$ /. Разлагая экспоненту в формуле /17/ по степени x/a и вычисляя интегралы, получаем вначале точное выражение J через гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$[10]:

$$J_q\left(\frac{b}{2}, x\right) = \frac{1}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{a}\right)^{2k} \left[\frac{F(\frac{1}{2}, k+1, k+2, q)}{k+1} - 2\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{F(\frac{1}{2}, k+2, k+3, q)}{k+2} \right]. \qquad /29/$$

Формула /29/ при наличии таблиц гипергеометрической функции может служить для приближенного вычисления функции J. Два первых члена /29/ можно представить в более простом виде:

$$J_q\left(\frac{b}{2}, x\right) \simeq \frac{2}{a(a+b)} - 6\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{(a^2-b^2)^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3} - \frac{b}{a}\right). \qquad /30/$$

Уменьшение сдвига при максимальных фазовых /азимутальных/ отклонениях ясно из формул /26,27/. Функция $J_q(b/2, x)$ может быть табулирована; некоторые результаты численного расчета сведены в таблицу.

ИЗМЕНЕНИЕ СДВИГА ЧАСТОТ В ПРОЦЕССЕ УСКОРЕНИЯ. ДОЛЯ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТИЦ

Как ясно из предыдущего, частицы сгустка вследствие неоднородности плотности заряда в нем распределены по величине сдвига в пределах от ν_x^o, ν_z^o до ν_x^p, ν_z^p в зависимости от амплитуд радиально-синхротронных колебаний. Но и при колебаниях каждой частицы величина сдвигов изменяется, поскольку функциональные зависимости от x и ϕ в /26,27/ различаются.

Таблица

$a^2 J_q(\frac{b}{2}, x)$

x/a \ q	0,00	0,25	0,50	0,75	0,95
0	1,0	1,072	1,172	1,333	1,635
0,1	0,985	1,055	1,153	1,311	1,605
0,2	0,941	1,007	1,099	1,247	1,519
0,3	0,872	0,931	1,013	1,144	1,382
0,4	0,780	0,831	0,900	1,009	1,204
0,5	0,673	0,713	0,768	0,853	0,997
0,6	0,556	0,585	0,624	0,683	0,775
0,7	0,435	0,453	0,477	0,509	0,551
0,8	0,316	0,324	0,333	0,341	0,335
0,9	0,204	0,203	0,199	0,185	0,139
1,0	0,104	0,095	0,079	0,047	-0,030

Анализ изменений сдвига для колебаний при произвольных величинах отклонений x и ϕ весьма сложен, мы приведем его ниже лишь для малых /линейных/ радиально-фазовых колебаний, в которых, однако, участвует значительное количество частиц сгустка. Итак, будем считать, что

$$\frac{x}{a} \simeq \frac{\bar{a}}{a} \ll 1, \quad \psi = \phi - \phi_s \ll 1. \qquad /31/$$

Эти требования допускают условие $\psi < 1$; ϕ_s - синхронная фаза. Запишем радиально-синхротронные колебания при условии /31/ в виде:

$$\frac{x}{\bar{a}} = \sqrt{1 - (\frac{\psi}{\bar{\psi}_0})^2}. \qquad /32/$$

Здесь $\bar{a}$ - амплитуда колебания данной частицы,

$$\bar{\psi}_0 = 2\frac{\bar{a}}{a}\sqrt{1 - \phi_s \operatorname{ctg} \phi_s}. \qquad /33/$$

При получении /33/ приближенно положено, что радиальный размер сепаратрисы равен a. Теперь подставим /32/ в формулу для J /30/:

$$J_c(\frac{b}{2}, x) = \frac{2}{a(a+b)}[1 - C(\bar{\psi}_0^2 - \psi^2)], \qquad C = \frac{2a+b}{4(a+b)(1-\phi_s \operatorname{ctg}\phi_s)}. \qquad /34/$$

Согласно /26,27/ и с учетом /31/ можно получить следующие зависимости сдвигов за счет собственного поля сгустка от $\psi=\phi-\phi_s$ фазы частицы при радиально-фазовых колебаниях:

$$\Delta\nu_x^2=\Delta\nu_x^2\big|_0\cdot\left(1-\frac{3}{2}\frac{\psi^2}{\phi_0^2}\right)\left[1-C(\bar\psi_0^2-\psi^2)\right], \qquad /35/$$

$$\Delta\nu_z^2=\Delta\nu_z^2\big|_0\cdot\left(1-\frac{3}{2}\frac{\psi^2}{\phi_0^2}\right)\left[1-K(\bar\psi_0^2-\psi^2)\right],\quad K=\frac{a}{4(a+b)(1-\phi_s\operatorname{ctg}\phi_s)}. \qquad /36/$$

Здесь $\Delta\nu_x^2|_0, \Delta\nu_z^2|_0$ даются выражениями /24,25/. Далее имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta\nu_x^2}{\Delta\nu_x^2|_0}&\simeq1-C\bar\psi_0^2-\left(\frac{3}{2\phi_0^2}-C\right)\psi^2,\\ \frac{\Delta\nu_z^2}{\Delta\nu_z^2|_0}&=1-K\bar\psi_0^2-\left(\frac{3}{2\phi_0^2}-K\right)\psi^2.\end{aligned}\right\} \qquad /37/$$

В зависимости от конкретных значений параметров $\Delta\nu_x^2$, $\Delta\nu_z^2$ максимальны либо при $\psi=0$, либо при $\psi=\bar\psi_0$. Для сильно вытянутого эллипса ($a\gg b$) $C\simeq1$ и $K=1/2$; при $\phi_0^2\simeq3$, как в нашем случае, $\Delta\nu_z^2\simeq\mathrm{const}\simeq1-\frac{1}{2}\bar\psi_0^2$, $\Delta\nu_x^2$ максимален при $\bar\psi_0$ и равен при этом $1-\frac{1}{2}\bar\psi_0^2$. Грубо ориентировочно можно пользоваться приближением:

$$\left.\frac{\Delta\nu_x^2}{\Delta\nu_x^2|_0}\right|_{\text{макс.}}\simeq\left.\frac{\Delta\nu_z^2}{\Delta\nu_z^2|_0}\right|_{\text{макс.}}\simeq1-\frac{1}{2}\bar\psi_0^2. \qquad /38/$$

Важным следствием этих результатов являются приближенные вычисления доли частиц сгустка, кулоновские сдвиги которых превосходят определенные заданные значения $\overline{\Delta\nu_x}$, $\overline{\Delta\nu_z}$. Этим последним значениям сдвига соответствует, согласно /35,36/ и /38/, определенная величина максимального фазового отклонения $\bar\psi_0$ или радиального отклонения $\bar a$ /см. /33//. Ясно, что искомая доля частиц, сдвиги которых удовлетворяют условию

$$\begin{aligned}\Delta\nu_x&>\Delta\bar\nu_x=\Delta\nu_x\big|_{\text{макс.}},\\ \Delta\nu_z&>\Delta\bar\nu_z=\Delta\nu_z\big|_{\text{макс.}},\end{aligned} \qquad /39/$$

равна числу частиц, расположенных в фазовом пространстве внутри фазовой траектории частицы, для которой $\psi=\bar\psi_0$ и $a=\bar a$. Строгое определение этой величины требует применения последовательного самосогласованного подхода, когда фазовая плотность частиц в 6-мерном фазовом пространстве согласована с движением частиц в полях, которые определяются внешними условиями, а также плотностью заряда вида /3/. Мы определим дальше $N_{\Delta\nu}$ двумя методами, которые, оказывается, дают близкие результаты. Один из них можно считать упрощенной формой самосогласованного подхода, другой исходит из приближения "заданного тока" и интегрирования в геометрическом пространстве. Итак,

Первый способ. Разделим задачи в поперечном фазовом пространстве и продольном 2-мерном*. В последнем зададимся моделью Нильсена-Сесслера [12], т.е. положим, что фазовая плотность постоянна внутри сепаратрисы:

$$n=\bar{n}_0\sigma(H-H_c), \quad \sigma(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ 0, & x>0.\end{cases} \qquad /40/$$

H - гамильтониан частицы /см. [13]/. Тогда легко показать, что плотность заряда изменяется вдоль оси сгустка по закону

$$en=e\bar{n}_0\frac{\beta^2\nu_z^2W_s}{\bar{R}}\,x_c(\psi), \qquad /41/$$

$x_c(\psi)$ - значение радиального отклонения на сепаратрисе. /41/ определяет вид $\rho_\phi(\psi)$ в формуле /3/, симметризованный ее вариант - /4/. Искомая доля частиц теперь определится как отношение площадей фазовой траектории $(\bar{a},\bar{\psi}_0)$ к площади сепаратрисы S_a:

$$\frac{N_{\Delta\nu}}{N}=\frac{S_{\bar{a}}}{S_a}. \qquad /42/$$

Для вычисления площади сепаратрисы можно применить аппроксимацию, предложенную Капчинским [13]:

$$x=\frac{a}{2}\left(2-\frac{\psi}{|\phi_s|}\right)\sqrt{\frac{\psi}{|\phi_s|}+1}. \qquad /43/$$

Легко вычисляем S_a:

$$S_a=a|\phi_s|\int_{-1}^{2}(2-t)\sqrt{1+t}\,dt=|\phi_s|\frac{12a\sqrt{3}}{5}.$$

---

* Заметим, что согласование в поперечном пространстве провести несложно. Такая операция для кольцевого сгустка была проделана в работе Давидсона и Лоджана [11] при задании фазовой плотности в виде распределения Гиббса с "поперечной" температурой.

и долю частиц

$$\frac{N_{\Delta\nu}}{N} = \frac{5\pi\bar{a}\bar{\psi}_0}{12\sqrt{3}\,a\phi_s} = \frac{5\pi}{24\sqrt{3}}\cdot\frac{\bar{\psi}_0}{\phi_s}\cdot\frac{\bar{\psi}_0}{\sqrt{1-\phi_s\operatorname{ctg}\phi_s}}. \qquad /44/$$

Напомним, что в этой формуле $\bar{\psi}_0$ – максимальное фазовое отклонение частицы, у которой кулоновский сдвиг частот по /35,36/, /38/ равен заданной величине

$$\overline{\Delta\nu} = \{\,\overline{\Delta\nu_x}, \overline{\Delta\nu_z}\,\}. \qquad /45/$$

<u>Второй способ</u>. Сдвигом, равным /45/ или больше обладают частицы, находящиеся внутри части сгустка, геометрические размеры которого подобны основному сгустку и равны $\bar{a}$, $\bar{\psi}_0$. По крайней мере при условии /31/ /это значит, что $N_{\Delta\nu}/N \ll 1$ /, а также при исключении предельно малых $N_{\Delta\nu}$ это число может быть определено следующим образом:

$$N_{\Delta\nu} = n_0 R \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} e^{-x^2/a^2}dx \int_{-h}^{h} e^{-z^2/b^2}dz \int_{-\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}_0}\left(1-\frac{\psi^2}{\phi_0^2}\right)^{3/2}d\psi. \qquad /46/$$

Вычисляя интегралы, получим ($h \gg b$):

$$\frac{N_{\Delta\nu}}{N} \simeq \frac{10}{3\pi}\Phi\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)\left(1-\frac{3}{4}\frac{\bar{\psi}_0^2}{\phi_0^2}\right) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\bar{a}}{a}\cdot\frac{\bar{\psi}_0}{\phi_0}$$

или, с учетом /33/:

$$\frac{N_{\Delta\nu}}{N} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\bar{\psi}_0}{\phi_0}\,\frac{\bar{\psi}_0}{\sqrt{1-\phi_s\operatorname{ctg}\phi_s}} \simeq \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\bar{\psi}_0}{\phi_s}\cdot\frac{\bar{\psi}_0}{\sqrt{1-\phi_s\operatorname{ctg}\phi_s}}. \qquad /47/$$

Формула /47/ дает ту же качественную зависимость доли частиц от $\bar{\psi}_0$ ($\sim\bar{\psi}_0^2$), что и формула /44/, численные же значения совпадают с точностью до величины $\frac{15\pi^{3/2}}{48\sqrt{3}}$, т.е. $\simeq 0,5\%$.

Сдвиг частот некогерентных колебаний, вычисленный выше, не является постоянной величиной в процессе ускорения даже для центра сгустка, но меняется по мере роста скорости/энергии/частиц и изменения размеров пучка. В этом смысле часто встречающееся определение сдвига частот как статического коллективного эффекта, является неточным. Следует скорее говорить об эффекте динамического кулоновского сдвига частот, поскольку изменение его во времени является фундаментальным фактом, определяющим всю картину динамики пучка в ускорителях при большой интенсивности.

Доля резонансных частиц, вычисленная выше, растет при увеличении числа ускоряемых частиц, и при переходе частоты за счет кулоновского сдвига через полосу сильного резонанса могут появиться интенсивные потери ускоряемого пучка. В связи с этим сделаем следующие замечания.

Процесс резонансных потерь может быть на самом деле ослаблен благодаря тому, что при раскачке колебаний частиц в центральной части сгустка и уходе их из режима ускорения одновременно ослабевают собственные поля сгустка, а с ними и градиенты и величины самого кулоновского сдвига. Следовательно, происходит, наряду с потерей резонансных частиц, уменьшение кулоновского сдвига, что способствует быстрому смещению рабочей точки через полосу данного резонанса и прекращению самого процесса потерь частиц. Оценка скорости смещения рабочей точки по порядку величины приводит к результату /с учетом данных по искажениям поля без коррекций и формул /25/ и /47/:

$$\dot{\nu}_z \simeq \frac{r_p \bar{R} Z^2}{\pi \nu_z b(a+b)\beta^2 \gamma^3 BA} \alpha N_{\Lambda\nu} \cdot \mu \leq 2\cdot 10^2 \ 1/c \qquad /48/$$

$\alpha < 1$ / μ - ср. инкремент в полосе резонанса/, что почти на два порядка превосходит значение $\dot{\nu}_z^{ac}$, вычисленное с учетом только изменений β, γ, a, b при ускорении. Это показывает эффективность подавления резонансных потерь за счет перераспределения плотности в сгустке. Последнее обстоятельство может наблюдаться экспериментально: при работе ускорителя в режиме большой интенсивности ($N > N_{макс.}$) должно происходить выравнивание или даже провал плотности в поперечном сечении сгустка после прохождения полосы параметрического резонанса.

Известно также /14-16/, что за счет нелинейности собственного поля сгустка рост амплитуды при параметрическом резонансе может быть сильно ограничен. Это также способствует успешному прохождению резонансов типа параметрического и достижению интенсивности в ускорителях свыше /1/.

Проиллюстрируем развитые соображения о кулоновском сдвиге некогерентных частот на примере такого ускорителя, как синхрофазотрон ОИЯИ. Недавно на этом ускорителе были проведены эксперименты с пучком протонов очень большой интенсивности /число захваченных в режим ускорения частиц превышало 10^{13} /6,17/ /.

Параметры, нужные для расчета, таковы:

$2L = 100$ см, $\bar{R} = 2800$ см, $2\phi_0 = 200°(B \simeq 0{,}34)$,
$2h = 40$ см, $a_0 = 30$ см,
$\beta_0 = 0{,}2$ /$E_0^p = 20$ мэВ/, $b_0 = 10$ см, $\frac{\Delta p}{p}\Big|_0 = \pm 0{,}7\%$.
$n = 0{,}65$.

При $N_{захв}=1,1\cdot10^{13}$ значения частот, соответствующих рабочей точке ускорителя, будут:

$$\left.\begin{aligned}\nu_x^p &= 0{,}55,\\ \nu_z^p &= 0{,}44.\end{aligned}\right\} \qquad /49/$$

Следовательно, рабочая точка в начальный момент оказывается ниже полосы параметрического резонанса $\nu_z = 1/2$, которому, как легко установить из простого построения /см. [6] /, соответствуют значения

$$\left.\begin{aligned}\bar{\nu}_x &= \nu_x^{рез.} = 0{,}57,\\ \bar{\nu}_z &= \nu_z^{рез.} = 0{,}5.\end{aligned}\right\} \qquad /50/$$

Величины $\overline{\Delta\nu_x}$ и $\overline{\Delta\nu_z}$ /см. /39// равны

$\overline{\Delta\nu_x} = 0{,}64-0{,}57 = 0{,}07$, $\overline{\Delta\nu_z} = 0{,}88-0{,}5 = 0{,}38$.

Тогда получаем для $\Delta\nu_x^2$

$\Delta\nu_x^2 = /0{,}57/^2 - \nu_x^{o2} = 0{,}32-0{,}41 = -0{,}09$.

Так как $\Delta\nu_x^2|_0 = /0{,}55/^2 - 0{,}41 = -0{,}11$, то из /38/ находим, что $\psi_0 \simeq 0{,}6$. Подставляя в формулу /47/, получаем

$$\frac{N_{\Delta\nu}}{N} \simeq 0{,}18. \qquad /51/$$

Итак, в возбуждении резонанса $\nu_z = 1/2$ участвует $\simeq 18\%$ частиц, находящихся в центральной части сгустка.

Общее время действия параметрического резонанса $T = \dfrac{\nu_z - \nu_z^{рез.}}{\dot{\nu}_z^{ac}}$ составляет / $\dot{\nu}_z^{ac} = 3{,}0$ 1/с/ около 20 мс, при этом число резонансных частиц в данный момент времени уменьшается по мере приближения рабочей точки к полосе резонанса.

Помимо параметрического резонанса, при $N_з = 1{,}1\cdot10^{13}$ в формировании баланса потерь участвуют и другие, достаточно сильные резонансы: $\nu_r - \nu_z = 0$, $2\nu_r + \nu_z = 2$; $\nu_r + 2\nu_z = 2$ и $3\nu_z = 2$. Применение формулы /47/ показывает, что в возбуждении резонанса $\nu_r + 2\nu_z = 2$ участвует более половины частиц сгустка, так что без соответствующих коррекций 2-й гармоники Фурье возмущения поля этот резонанс весьма опасен.

Эксперименты показали [6], что основные потери действительно сосредоточены на первых 20 мс после формирования сгустка в сепаратрисе и практически исчезают при уменьшении числа захваченных частиц в 2 раза, когда кулоновский сдвиг сравнительно мал и перечисленные резонансы не затрагиваются. В этих экспериментах была получена максимальная интенсивность при $t = 100$ мс до $N = 4{,}5 \cdot 10^{12}$ Р/имп., что еще меньше $N_{\text{макс.}}$, вычисленного для указанных выше параметров по формуле /1/:

$$N_{\text{макс.}} \approx 9 \cdot 10^{12} \text{ Р/имп.} \qquad /52/$$

Можно сделать предположение, исходя из сформулированных теоретических соображений, а также экспериментальных данных, что значение /52/ для синхрофазотрона ОИЯИ может быть превзойдено при той же энергии инжекции $E_0 = 20$ мэВ и $N_{\text{макс.}}$ может составлять:

$$N_{\text{макс.}} = 1 \div 2 \cdot 10^{13} \text{ Р/имп.} \qquad /52'/$$

Этот результат достижим при следующих условиях:

а/ более полном и равномерном заполнении апертуры камеры,

б/ при некотором увеличении ускоряющего напряжения,

в/ при достаточно точной коррекции искажений поля, особенно нулевой и 2-й гармоник Фурье.

Отметим, что на серпуховском ускорителе критерий /1/ в серии замечательных экспериментов был превзойден почти в 2 раза - интенсивность ускорителя достигла $5 \cdot 10^{12}$ Р/имп. /18,19/.

Автор глубоко благодарен Ю.Д.Безногих за многочисленные обсуждения и В.В.Пальчику за помощь в численных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kerst D. Phys.Rev., 1941, 60, p.47.
2. Blewett J. Phys.Rev., 1946, 69, p.87.
3. Laslett L. Proc. 1963 Summer Study Stor.Rings.Accel.,... 7534 BNL, Upton, N.Y., 1963.
4. Безногих Ю.Д. и др. ОИЯИ, Р9-9115, Дубна, 1975.
5. Безногих Ю.Д. и др. ОИЯИ, Р9-9120, Дубна, 1975.
6. Безногих Ю.Д. и др. ОИЯИ, Р9-11903, Дубна, 1978; Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1979, т.2, с.136.
7. Воеводин М.А., Коваленко А.Д., Романов Ю.И. ОИЯИ, 9-10000, Дубна, 1976, ч.II; Казанский Г.С. Автореферат диссертации, ОИЯИ, 1640, Дубна, 1963.
8. Houssais B. Univ.Rennes, Dec. 1966.
9. Montague B. CERN Rep. 68-38, Geneva, 1968.
10. Градштейн И.С., Рыжик М.М. Таблицы интегралов, сумм и произведений. Физматгиз, М., 1963.

11. Davidson R., Manajan S. Part.Accel., 1972, 4, p.53.
12. Nielsen C., Sessler A. Rev.Sci.Instr., 1959, 30, p.80.
13. Капчинский И.М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. Атомиздат, М., 1966.
14. Смит Л. Труды Международной конференции по ускорителям. Атомиздат, М., 1964, с.897.
15. Коломенский А.А., Полухин А.Т. Вестн.МГУ, сер. физ.-астр., 1968, №5, с.81.
16. Балбеков В.И., Шукейло И.А. ЖТФ, 1969, 39, с.1863.
17. Безногих Ю.Д. и др. ОИЯИ, 9-11765, Дубна, 1978.
18. Адо Ю.М. и др. Труды II Всесоюзного совещания по ускорителям. "Наука", М., т.2, с.17, М., 1972.
19. Адо Ю.М. и др. Труды V Всесоюзного совещания по ускорителям. "Наука", М., 1978, т.2, с.202.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 октября 1980 года.