объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р9-80-235

А.Ш.Иркегулов, Э.И.Уразаков, А.Б.Швачка

ВОЗБУЖДЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ТМ-ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ КОАКСИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Направлено в журнал "Радиотехника и электроника"

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

Волноводные системы с неоднородными проводящими стенками находят широкое применение в технике сверхвысоких частот для создания согласующих элементов, частотных фильтров и преобразователей типов волн, а также для изучения пондеромоторного действия электромагнитного поля [1-3]. Эффективные методы решения класса краевых задач электродинамики, к которому сводится задача о возбуждении сложных волноводных систем, пока не разработаны. К числу известных аналитических методов решения подобного типа задач относятся метод задачи Римана-Гильберта [4], а также метод Винера-Хопфа-Фока /ВХФ/ [5].

В работе [6] методом ВХФ решена задача о возбуждении магнитных волн в полубесконечной коаксиальной системе /круглый волновод с вложенной полубесконечной коаксиальной линией/.

Ниже приведено решение краевой задачи о возбуждении симметричных ТМ-волн в полубесконечных коаксиальных системах /см. рис.1/ методом классической задачи Римана [7]. Полученные результаты сравниваются с решениями аналогичных задач, найденными с помощью метода ВХФ.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача о возбуждении симметричных ТМ-волн в одной из полубесконечных коаксиальных систем * /см. рис.1а/ сводится к следующей системе интегральных уравнений [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{iwz}\, v(\hat{L}\vec{F}+\vec{f}) = 0 \qquad \text{при } z \geq 0, \qquad /1/$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{iwz} \frac{k}{v}\vec{F} = 0 \qquad \text{при } z < 0. \qquad /2/$$

Матричное ядро $\hat{L}$ имеет вид [8]:

$$\hat{L}(w) = \frac{1}{(0,a_2)}\begin{pmatrix} (0,d_1)(d_1,a_2) & (0,d_1)(d_2,a_2) \\ (0,d_1)(d_2,a_2) & (0,d_2)(d_2,a_2) \end{pmatrix},$$

---

*Расчет возбуждения волн в системе, изображенной на рис.1б, проводится аналогично.

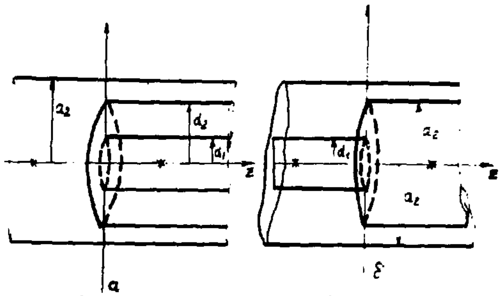

Рис.1. Конфигурация полубесконечной коаксиальной волноводной системы.

где $(0,d_i)=J_0(vd_i)$ - функция Бесселя нулевого порядка, $(d_1,a_2)=J_0(vd_1)H_0^{(1)}(va_2)-J_0(va_2)H_0^{(1)}(vd_1)$. В выражениях /1/, /2/ функция $\vec{F}$ есть фурье-компонента /ФК/ плотности поверхностного тока, наведенного на стенках волноводов радиусов d_1, d_2; $\vec{f}$ - ФК поля, возбуждаемого источником внутри волновода.

Используя преобразование Фурье для функции $\vec{F}_1(w)=\frac{k}{v}\vec{F}(w)$

$$\vec{F}_1(w)=(2\pi)^{-1/2}\int_0^{\infty} dt\, e^{-iwt}\vec{F}_1(t), \qquad w^2=k^2-v^2 \qquad /3/$$

и ядра $\hat{L}(w)$

$$\hat{L}(z-t)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{iw(z-t)}\hat{L}(w) \qquad /4/$$

и подставив выражения /3/, /4/ в уравнение /1/, получим интегро-дифференциальное уравнение для неизвестной функции $\vec{F}_1(t)$:

$$(2\pi)^{-1/2}k^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\int_0^{\infty} dt\,\hat{L}(z-t)\,\vec{F}_1(t)=-\vec{f}_1(z) \quad \text{при} \quad z\geq 0. \qquad /5/$$

Здесь $\vec{f}_1(z)$ - обратное преобразование Фурье функции $\frac{v}{k}\vec{f}(w)$. Уравнение /5/ является односторонним уравнением типа свертки первого рода [7].

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение уравнения /5/ может быть найдено методом краевой задачи Римана. Фурье-образы элементов матрицы $\hat{L}(w)$ и вектора-функции $\vec{f}(z)$ принадлежат классу функций $\mathcal{L}_2(-\infty,\infty)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{L}(w)|^2 dw<\infty. \qquad /6/$$

Кроме того, $\hat{L}(w)$ и $\vec{f}(w)$ удовлетворяют условию Гельдера /7/.

Введем обозначение

$$\vec{f}_{1+}(z) = \begin{cases} \vec{f}_1(z), & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \qquad /7/$$

и доопределим уравнение /5/ на всей действительной оси z, используя функции

$$\vec{F}_{1+}(z) = \begin{cases} \vec{F}_1(z), & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \qquad \vec{F}_{1-}(z) = \begin{cases} 0, & z > 0 \\ -\vec{F}_1(z), & z < 0 \end{cases} . \qquad /8/$$

Подставляя выражения /7/ и /8/ в уравнение /5/, преобразуем его к виду

$$(2\pi)^{-1/2} k^{-2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{L}(z-t) \vec{F}_{1+}(t) = -\vec{f}_{1+}(z) + \vec{F}_{1-}(z) . \qquad /9/$$

Из уравнения /9/ видно, что преобразование Фурье функции $\vec{F}_-(z)$ должно принадлежать классу $\mathfrak{L}_2(-\infty, \infty)$ и удовлетворять условию Гельдера. Проделав преобразование Фурье по z в уравнении /9/ с учетом теоремы о свертке функций, получим задачу Римана

$$\hat{L}(w) \vec{F}_+(w) = -\vec{f}_+(w) + \vec{F}_-(w) . \qquad /10/$$

Преобразуем /10/ к виду

$$\vec{F}_+(w) = \hat{D}(w) \vec{F}_-(w) + \vec{H}(w) , \qquad /11/$$

где $\hat{D}(w) = \hat{L}^{-1}(w)$ - коэффициент задачи Римана, $\vec{H}(w) = -\hat{L}^{-1}(w)\vec{f}_+(w)$ - свободный член уравнения /11/, который соответствует ФК плотности поверхностного тока, наведенного на стенках гладких бесконечных волноводов с радиусами d_1 и d_2.

Таким образом, требуется найти две функции $\vec{F}_\pm(w)$, аналитические соответственно в верхней /ВП/ и нижней /НП/ полуплоскостях комплексной переменной w. $\vec{F}_\pm$ удовлетворяют условию Гельдера и краевому условию /11/. Предельные значения функций $\vec{F}_\pm(w)$ на действительной оси w принадлежат классам функций $\mathfrak{L}_2(0,\infty)$ и $\mathfrak{L}_2(-\infty, 0)$ /7/.

Этими же свойствами обладают элементы $\hat{D}(w)$ и $\vec{H}(w)$. Используя метод вычисления факторизованных двумерных матриц, предложенный в /8/, найдем фактор-множители матрицы $\hat{D}(w)$. Использование проекционных матриц позволяет свести факторизацию матрицы к факторизации ее собственных значений /скаляр-функций/. Эта операция производится путем представления факторизованных функций в виде бесконечных произведений вида $\Phi(w) = w^m \prod_{n=1}^{\infty} (1-\frac{w}{a_n})\exp(P_n(w))$, сомножители в которых имеют не более чем степенной рост при $w \to \infty$ в комплексной плоскости w.

Коэффициент задачи Римана $\hat{D}(w)$ /7/ представим в виде

$$\hat{D}(w) = \hat{L}_{+}^{-1}(w) \cdot \hat{L}_{-}^{-1}(w), \qquad /12/$$

при этом

$$\hat{L}_{\pm}^{-1}(w) = \frac{(0,a_2)_{\pm}^{1}}{\sqrt{h^1}} \hat{P}_{+} + \frac{\sqrt{h^1}}{(0,d_1)_{\pm}^{1} \cdot (d_1,d_2)_{\pm}^{1} \cdot (d_2,d_2)_{\pm}^{1}} \hat{P}_{-}, \qquad /13/$$

$$(0,a_2)^1 \equiv (0,a_2)\, e^{iva_2}, \quad (d_1,d_2)^1 \equiv (d_1,d_2)\, e^{iv(d_2-d_1)}, \quad h^1 = h e^{iva_2},$$

причем $h = a + \ell$, где a, ℓ - скаляр и длина вектора матрицы $\hat{L}(w)$ соответственно.

Проекционные матрицы $\hat{P}_{\pm}$ в общем случае имеют вид:

$$\hat{P}_{\pm} = \begin{pmatrix} \left\{1 \pm \frac{(0,d_1)(d_1,a_2)-(0,d_2)(d_2,a_2)}{2A(0,a_2)}\right\} & \pm \frac{(0,d_1)(d_2,a_2)}{A(0,a_2)} \\ \pm \frac{(0,d_1)(d_2,a_2)}{A(0,a_2)} & \left\{1 \mp \frac{(0,d_1)(d_1,a_2)-(0,d_2)(d_2,a_2)}{2A(0,a_2)}\right\} \end{pmatrix} \qquad /14/$$

где

$$A = \left\{\frac{1}{2}[(0,d_1)(d_1,a_2) - (0,d_2)(d_2,a_2)]^2 + (0,d_1)^2 (d_2,a_2)^2\right\}^{1/2}.$$

Суммарный индекс задачи Римана для рассматриваемой системы уравнений /1-2/ определяется выражением /11/

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{1}{2\pi i} \ln[\det D(w)]_{-\infty}^{\infty} \qquad /15/$$

и равен нулю.

Фактор-множители $\hat{L}_{\pm}^{-1}(w)$ /фм. формулу /13// удовлетворяют условию коммутативной факторизации, в связи с чем правая и левая факторизации $\hat{L}(w)$ /12/ совпадают друг с другом, а частные индексы κ_1 и κ_2 равны нулю. Согласно теореме о разрешимости системы интегральных уравнений с разностным ядром на полуоси /см. [12] стр.10/, условие $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ является необходимым и достаточным для существования и единственности решения краевой задачи Римана. Это означает, что задача поставлена корректно /см. [13] §15 п.3/: она безусловно и однозначно разрешима и ее решения устойчивы по отношению к малому изменению коэффициентов $\hat{D}(w)$ и $\vec{H}(w)$. Действительно, решение задачи выражается в явном виде через интегралы Фурье; преобразование Фурье есть ограниченный оператор и, следовательно, при малых изменениях подынтегральной функции $\vec{F}_+(w)$ получает малые приращения.

Как известно [7], при $\kappa = 0$ однородная задача Римана имеет лишь тривиальное решение. Согласно обобщенной теореме Лиувилля, решение неоднородной задачи имеет вид

$$\vec{F}_+(w) = \hat{L}_+^{-1}(w)\,\vec{\psi}_+(w). \qquad /16/$$

Функции $\vec{\psi}_\pm(w)$ представляют собой краевые значения функций $\vec{\psi}_\pm(w')$, аналитических соответственно в ВП и НП комплексной переменной w' и принадлежат классу функций $\mathcal{L}_2(-\infty,\infty)$, удовлетворяющих условию Гельдера.

Кроме того, имеют место равенства:

$$\vec{\psi}_+(w) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^{\infty}\vec{\psi}(t)\,e^{-iwt}\,dt, \qquad \vec{\psi}_-(w) = -(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{0}\vec{\psi}(t)\,e^{-iwt}\,dt,$$

$$\vec{\psi}(z) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{iwz}\,\hat{L}_+(w)\,\vec{H}(w). \qquad /17/$$

Для определения $\vec{\psi}_+(w)$ воспользуемся свойствами проекционных операторов $\hat{P}_\pm$:

$$\hat{P}_+\vec{F} = \vec{F}_+, \qquad \hat{P}_-\vec{F} = -\vec{F}_-,$$

$$\hat{P}_+^2 = \hat{P}_+, \quad \hat{P}_-^2 = \hat{P}_-, \quad \hat{P}_+\hat{P}_- = \hat{P}_-\hat{P}_+ = 0. \qquad /18/$$

Соотношения /17/ представим в виде:

$$\vec{\psi}_\pm(w) = \hat{P}_\pm\hat{L}_+(w)\,\vec{H}(w). \qquad /19/$$

Функции $\vec{\psi}_\pm(w)$, $\vec{H}(w)$ имеют различный вид в зависимости от положения источника внутри коаксиальной системы. Для вычисления функции $\vec{H}(w)$ в различных областях волноводной системы воспользуемся выражением для ФК поля источника $\vec{f}$ /8/:

$$\vec{f} = \frac{1}{(0,a_2)}\begin{pmatrix}[0|d_1,\underline{b\ni}|a\ \ ]\\ [0|d_2,\underline{b\ni}|a\ \ ]\end{pmatrix},$$

$$(0,\underline{b\ni}) = \frac{2\pi^2 i}{c}\int\limits_{b_{min}}^{b_{max}} bdb\,\frac{iv}{k}(0,b)\,j_z(w)\,; \qquad /20/$$

$$[0|d,b\ni|a_2] = \begin{cases}(0,d)(b\ni,a_2) & \text{при} \quad 0<d<b<a_2\\ (0,b\ni)(d,a_2) & \text{при} \quad 0<b<d<a_2\\ 0 & \text{при} \quad b<a_2<d\\ & \qquad\quad d<a_2<b\end{cases}$$

С учетом соотношения

$$\vec{H}(w) = -\hat{L}^{-1}(w)\,\vec{f}_+(w) \qquad /21/$$

после несложных, но громоздких преобразований получим при $z<0$:

$$\vec{H}(w) = \frac{(0,\underline{b\ni})}{(0,d_1)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad 0<r<a_2; \qquad /22/$$

при $z>0$:

$$\vec{H}(w) = \frac{1}{(d_1,d_2)}\begin{pmatrix}(\underline{b\ni},d_2)\\(d_1,\underline{b\ni})\end{pmatrix}, \qquad d_1<b<d_2; \qquad /22a/$$

$$\vec{H}(w) = \frac{(0,b\ni)}{(0,d_1)}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad b<d_1<d_2;$$

$$\vec{H}(w) = \frac{(b\ni,a_2)}{(d_2,a_2)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad b>d_2>d_1.$$

Вид операторов $\hat{P}_\pm$ зависит от выбора пространственной области коаксиальной системы. Например, в области $0<r<d_1$

$$\hat{P}_+ = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \qquad \hat{P}_- = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Подставив /22/ в /19/ и воспользовавшись соответствующим выражением $\hat{P}_\pm$, получим при $z<0$:

$$\vec{\psi}_+ = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{h^1}\,(0,\underline{b\ni})(0,a_2)^1_-\,v_n}{(w-w_n)w_n\frac{d}{dv}(0,a_2)}\begin{pmatrix}(d_1,a_2)\\(d_2,a_2)\end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_- = 0, \quad 0<b<a_2; \qquad /23/$$

при $z>0$:

$$\vec{\psi}_+=0,\ \vec{\psi}_-=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(0,\underline{b\ni})(0,d_1)_+^1(d_1,d_2)_+^1(d_2,a_2)_+^1\,v_k}{(w+w_k)\sqrt{h^1}\cdot w_k\frac{d}{dv}(0,d_1)}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad b_1<d_1<d_2;$$

/24/

$$\vec{\psi}_+=0,\ \vec{\psi}_-=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d_1,\underline{b\ni})(0,d_1)_+^1(d_1,d_2)_+^1(d_2,a_2)_+^1\,v_k}{(w+w_k)\sqrt{h^1}\,w_k\frac{d}{dv}(d_1,d_2)}\begin{pmatrix}(d_1',d_2)\\(d_1,d_1')\end{pmatrix},\quad d_1<b<d_2; \qquad /25/$$

$$\vec{\psi}_+=0,\ \vec{\psi}_-=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\underline{b\ni},a_2)(0,d_1)_+^1(d_1,d_2)_+^1(d_2,a_2)_+^1\,v_k}{(w+w_k)\sqrt{h^1}\,w_k\frac{d}{dv}(d_2,a_2)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad d_1<d_2<b. \qquad /26/$$

Из выражений /23-26/ видно, что конкретный вид решения /16/ зависит от положения источника относительно разрыва граничных условий системы в точке $z=0$. В случае, когда источник поля расположен слева от точки $z=0$, решение принимает вид:

$$\vec{F}_+(w)=-\hat{L}_+^{-1}(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{h^1}(0,\underline{b\ni})(0,a_2)_-^1\,v_n}{(w-w_n)w_n\frac{d}{dv}(0,a_2)}\begin{pmatrix}(d_1,a_2)\\(d_2,a_2)\end{pmatrix}. \qquad /27/$$

Если источник находится справа от сечения $z=0$, то для вычисления $\vec{F}_+$ необходимо воспользоваться краевым условием /11/:

$$\vec{F}_+(w)=\hat{L}_+^{-1}(w)\vec{\psi}_-(w)+\vec{H}(w). \qquad /28/$$

Функции $\vec{H}(w)$ и $\vec{\psi}_-(w)$ определяются формулами /22/ и /24/ - /26/. В общем случае решение задачи представляет собой суперпозицию выражений /27/ и /28/.

4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Решение задачи о возбуждении полей в полубесконечной коаксиальной линии в открытом пространстве может быть получено с помощью предельного перехода при $a_2\to\infty$ в выражениях /27/ и /28/. При этом суммирование по дискретному спектру волн заменяется на интегрирование по непрерывному спектру. Выражение /27/ преобразуется к виду

$$\vec{F}_+(w)=-\hat{L}_+^{-1}(w)\int_{i\tau_0-\infty}^{i\tau_0+\infty}dw_0\,\frac{\sqrt{h^1}(0,\underline{b\ni})}{w-w_0}\begin{pmatrix}(d_1,\infty)\\(d_2,\infty)\end{pmatrix},\quad \tau_0>0,\quad H_0^{(1)}(vd_1)\equiv(d_1,\infty). \qquad /29/$$

В силу того, что функция Ханкеля первого рода $H_0^{(1)}(x)$ имеет точки ветвления при $w=\pm k$, интеграл вычисляем методом перевала, проведя разрез по точкам $\operatorname{Im} v=0$ в комплексной плоскости w. Разбиение на фактор-множители функции $\vec{F}_L(w)$, задаваемой формулой /28/, производится тем же способом [8]. Задача о возбуждении полей в системе, показанной на рис.1б, имеет также единственное решение, так как суммарный и частный индексы задачи Римана равны нулю.

Задача о дифракции волноводной гармоники на разрыве полубесконечного волновода решена в [5] методом ВХФ; там же указано на возможность решения этой задачи путем сведения ее к краевой задаче Римана. Решение, полученное в [5], является частным случаем формулы /28/ и соответствует учету лишь одной падающей парциальной волны. В работе [8] найдено решение системы парных интегральных уравнений ВХФ, к которой сводится задача о возбуждении электромагнитного поля в полубесконечной волноводной системе. Решение получено путем исследования аналитических свойств подынтегральных функций и выделения их особых точек /модифицированный метод ВХФ/ с учетом требований, накладываемых на поведение ФК полей и токов в комплексной плоскости w. Система парных интегральных уравнений ВХФ, рассмотренная в /8/, сводится к неоднородной краевой задаче Римана. В силу обратимости преобразования Фурье краевая задача Римана эквивалентна исходной системе уравнений ВХФ. Нетрудно показать, что решение, полученное в /8/, является частным случаем решения, задаваемого формулами /27/, /28/: расчет фактор-множителей и функций $\vec{\psi}_{\pm}(w)$, связанных с различной пространственной локализацией излучателей в случае одного полубесконечного волновода приводит к решению, совпадающему с результатами работ [8,14]. В статье /6/ с помощью модифицированного метода ВХФ решена задача о возбуждении TE-волн в полубесконечной коаксиальной системе движущимся источником с переменным азимутальным током. Выражения для поверхностного тока, рассчитанные по формулам /27/ и /28/, совпадают с аналогичными формулами работы /6/.

Отметим, что возбуждение симметричных волн движущимися зарядами и диполями в волноводных системах с одним разрывом граничных условий рассматривалось в работах [9,10]. Приведенные в /9,10/ решения совпадают лишь с одним из решений, полученных методом краевой задачи Римана /см. формулу /27//. Они соответствуют полям, возбуждаемым в системе движущимся источником до пролета им разрыва волновода. Поля, возбуждаемые в волноводной системе после пролета источником разрыва границ, задаются формулой /28/. Произведем расчет излучения кольцевого модулированного сгустка зарядов, движущегося вдоль оси z со скоростью $\beta c(\beta \gtrless 0)$, в области $z<0$ /см. рис.1а/. В этом случае выражение для стороннего поля $\vec{f}(w,k)$ преобразуется к виду

$$\vec{f}(w,k) = \frac{2\pi^2 i}{c}\,\frac{\exp\{-iz_0(k-\gamma k_0) - [(k-\gamma k_0)^2(2\gamma\beta a)^{-2}]\}}{\{[i\gamma(k-\beta w) - k_0] - \epsilon\}}\,\frac{(b_0,a_2)}{(0,a_2)}\begin{pmatrix}(0,d_1)\\(0,d_2)\end{pmatrix},$$

где $a = \frac{2\ln 2}{\ell}$, ℓ - длина сгустка в собственной системе, $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$ релятивистский фактор, $\omega_0=k_0c$ - частота модуляции сгустка в собственной системе координат; $k=\gamma(k_0+\beta w_0)$, $w=\gamma(w_0-\beta k_0)$, $w_0^2=k_0^2-v^2$.

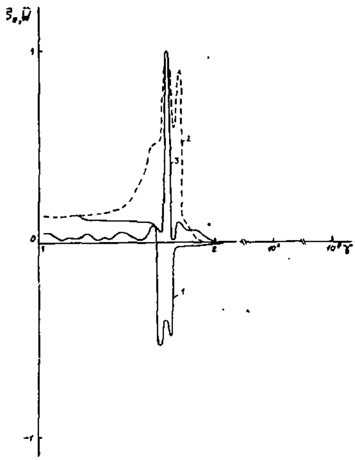

Рис.2. Зависимость плотности энергии и плотности потока энергии излучения от скорости движения сгустка. Кривая 1 - обратный поток энергии $\vec{S}_z \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, 2 - прямой поток энергии $\vec{S}_z \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, 3 - плотность энергии поля в волновой зоне.

Численные расчеты средних по времени величин плотности потока энергии $\bar{S}_z$ и плотности энергии рассеянного поля $\bar{W}$ показывают /см. рис.2/, что имеет место инверсия прямого потока $S_z(\beta>0)$ при $\gamma \simeq 1,5$. При $\gamma \gg 2$ излучение в область $z<0$ практически отсутствует /$|\bar{S}_z|$ с ростом γ уменьшается по закону γ^{-2}/. Расчеты проводились на ЭВМ CDC-6500 с использованием пакета программ /15/, написанных на языке ФОРТРАН.

Авторы выражают благодарность профессорам Е.П.Жидкову и В.Г.Маханькову за постоянный интерес к работе и стимулирующие дискуссии, Б.А.Хоромскому - за полезное замечание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейнке Х., Гундлах Ф. Радиотехнической справочник, т.1, Госэнергоиздат, М-Л., 1960.
2. Валитов Р.А. и др. Пондеромоторное действие электромагнитного поля. "Советское радио", М., 1975.
3. Павлов В.С., Уразаков Э.И., Лобанов В.П. ЖТФ, 1978, т.48, с.334.

4. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Изд-во ХГУ, Харьков, 1971.
5. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. "Советское радио", М., 1966.
6. Иркегулов А.Ш., Уразаков Э.И., Швачка А.Б. ОИЯИ, Р9-12614, Дубна, 1979.
7. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. "Наука", М., 1978.
8. Игушкин Л.П., Уразаков Э.И. Цилиндрические электромагнитные поля и плазменные сгустки. Изд-во НИИЯФ МГУ, М., 1969, ч.1-3.
9. Колпаков О.А. ОИЯИ, 2168, Дубна, 1965.
10. Галстьян Е.А., Воскресенский Г.В. ЖТФ, 1978, т.48, №2, с.210.
11. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. "Наука", М., 1968.
12. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. УМН, 1958, т.13, вып.2, с.3.
13. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. "Наука", М., 1977.
14. Игушкин Л.П. ОИЯИ, 9-5128, Дубна, 1970.
15. Иркегулов А.Ш., Швачка А.Б. ОИЯИ, Р11-12661, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 марта 1980 года.