сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р9-80-179

А.Ш.Иркегулов

ВОЗБУЖДЕНИЕ МАГНИТНЫХ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ КОАКСИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи о возбуждении сторонними источниками волноводных систем с неоднородными границами представляют интерес при решении практических проблем радиофизики и ускорителей [1-3]. Дифракция волноводной гармоники на открытом конце полубесконечного волновода исследована в [4]. В работе [5] методом задачи Римана-Гильберта исследованы проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн в сложных направляющих структурах. Следует отметить, что решения системы уравнений из [4], а также уравнений Винера-Хопфа-Фока /ВХФ/, используемых в этой работе /см. формулы /1/ и /2//, зависят от изменений правой части $\vec{f}$ /локализация стороннего источника/. Для решения подобных краевых задач следует решать совместно систему /1/-/2/ и систему уравнений, получаемую из граничных условий для случая правой локализации источника, как это сделано в [6,7].

В работе [7] методом ВХФ решена задача о возбуждении магнитных волн в полубесконечной коаксиальной системе /круглый волновод с вложенной полубесконечной коаксиальной линией/. Рассмотрены две совместные системы уравнений для двух положений источника. Ниже приводится решение краевой задачи о возбуждении TE-волн * в полубесконечных коаксиальных системах /см. рис.1/, полученное методом классической задачи Римана [8]. Проведены расчеты плотности и потока энергии рассеянного поля, возникающего при движении модулированного источника TE-волн в системе /см. рис.1а/.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача о возбуждении симметричных TE-волн в одной из полубесконечных коаксиальных систем ** /см. рис.1а/ сводится к следующей системе уравнений [8]:

---

* TE-волны - TRANSVERSAL ELECTRIC /поперечные электрические/ волны.

** В системе, представленной на рис.1б, расчет возбуждения проводится аналогично.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{iwz} (\hat{L}\vec{F} + \vec{f}) = 0 \quad \text{при} \quad z \geq 0, \qquad /1/$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{iwz} \vec{F} = 0 \quad \text{при} \quad z < 0. \qquad /2/$$

Матричное ядро $\hat{L}$ имеет вид [8]:

$$\hat{L} = \frac{1}{(0, a_2')} \begin{pmatrix} (0, d_1')(d_1', a_2') & (0, d_1')(d_2', a_2') \\ (0, d_1')(d_2', a_2') & (0, d_2')(d_2', a_2') \end{pmatrix},$$

где $(0, d_1') = J_0'(vd_1)$ - производная функция Бесселя нулевого порядка; $(d_1', a_2') = J_0'(vd_1) H_0^{(1)\prime}(va_2) - J_0'(va_2) H_0^{(1)\prime}(vd_1)$ и т.д. Здесь $\vec{F}$ - искомый вектор, фурье-компонента /ф.к./ плотности поверхностного тока, наведенного на стенках волноводов радиусов d_1 и d_2; $\vec{f}$ - ф.к. вектора поля, возбужденного источником внутри волновода, вычисленная на тех же радиусах. Используя преобразования Фурье для функции $\vec{F}(w)$,

$$\vec{F}(w) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} dt\, e^{-iwt} \vec{F}(t), \qquad /3/$$

и ядра $\hat{L}(w)$,

$$\hat{L}(z-t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{iw(z-t)} \hat{L}(w), \qquad /4/$$

и подставив /3/, /4/ в уравнение /1/, получим уравнение для неизвестной функции $\vec{F}(t)$:

$$(2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} dt\, \hat{L}(z-t)\, \vec{F}(t) = -\vec{f}(z) \quad \text{при} \quad z \geq 0. \qquad /5/$$

Уравнение /5/ является односторонним уравнением типа свертки первого рода [8].

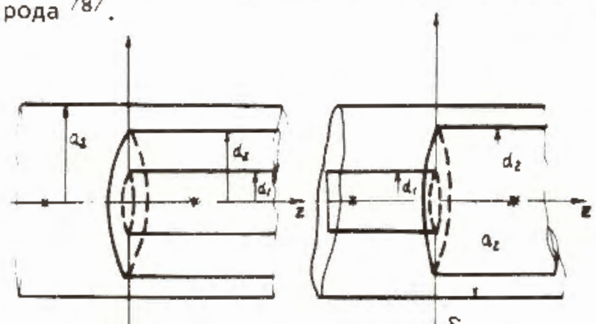

Рис. 1

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение уравнения /5/ может быть найдено методом краевой задачи Римана. Преобразование Фурье $\hat{L}(w)$ матрицы $\hat{L}(z)$ и функции $\vec{f}(z)$ принадлежит классу функций $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$, для которых выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{L}(w)|^2 dw < \infty. \qquad /6/$$

$\hat{L}(w)$ и $\vec{f}(w)$ удовлетворяют условию Гельдера [8]. Обозначим

$$\vec{f}_+(z) = \begin{cases} \vec{f}(z) & \text{при} \quad z > 0, \\ 0 & \text{при} \quad z < 0 \end{cases} \qquad /7/$$

и доопределим уравнение /5/ на всей действительной оси z, введя функции

$$\vec{F}_+(z) = \begin{cases} \vec{F}(z) & \text{при} \quad z > 0, \\ 0 & \text{при} \quad z < 0, \end{cases}$$

$$\vec{F}_-(z) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad z > 0, \\ \text{неизвестна} & \text{при} \quad z < 0. \end{cases} \qquad /8/$$

Подставляя выражения /7/ и /8/ в уравнение /5/, преобразуем его к виду

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \hat{L}(z-t)\, \vec{F}_+(t) = -\vec{f}_+(z) + \vec{F}_-(z), \quad -\infty < z < \infty. \qquad /9/$$

Из уравнения /9/ видно, что преобразование Фурье функции $\vec{F}_-(z)$ должно принадлежать классу $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ и удовлетворять условию Гельдера. Проделав преобразование Фурье по w в уравнении /9/ с учетом теоремы о свертке функций, получим задачу Римана

$$\hat{L}(w)\, \vec{F}_+(w) = -\vec{f}_+(w) + \vec{F}_-(w). \qquad /10/$$

Преобразуем /10/ к виду

$$\vec{F}_+(w) = \hat{D}(w)\, \vec{F}_-(w) + \vec{H}(w), \qquad /11/$$

где $\hat{D}(w) = \hat{L}^{-1}(w)$ - коэффициент задачи Римана, $\vec{H}(w) = -\hat{L}^{-1}(w)\vec{f}_{+}(w)$ - свободный член выражения /11/, являющийся ф.к. плотности поверхностного тока, наведенного на стенках $(r = d_1, d_2)$ гладких бесконечных волноводов.

Требуется найти две функции $\vec{F}_{\pm}(w')$, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной w' соответственно, предельные значения которых на вещественной оси принадлежат классам функций $\mathfrak{L}_2(0, \infty)$ и $\mathfrak{L}_2(-\infty, 0)$ и удовлетворяют условию Гельдера, а также краевому условию /11/.

Вычислим фактор-множители матрицы $\hat{D}(w)$. Для этого разложим ее в ряд по проекторам $\hat{P}_{\pm}$, которые строим с помощью матриц Паули. Аналитическое продолжение элементов матрицы $\hat{D}(w)$ в верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексного переменного w сводится к аналитическому продолжению собственных скаляр-функций $\lambda(w)$ разложения $\hat{D}(w)$ по проекторам. $\lambda(w)$ представляется в виде $\lambda(w) = w^m \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{w}{a_n})\exp\{P_n(w)\}$ с добавлением множителей, обеспечивающих не более чем степенной рост при $w \to \infty$ в комплексной плоскости w. Коэффициент задачи Римана $\hat{D}(w)$ выражается через фактор-множители $\hat{L}_{\pm}^{-1}(w)$:

$$\hat{D}(w) = \hat{L}_{+}^{-1}(w)\hat{L}_{-}^{-1}(w), \qquad /12/$$

где

$$\hat{L}_{\pm}^{-1}(w) = \frac{(0, a_2')_{\pm}^{1}}{\sqrt{h^1}}\hat{P}_{+} + \frac{\sqrt{h^1}}{(0, d_1')_{\pm}^{1}(d_1', d_2')_{\pm}^{1}(d_2', a_2')_{\pm}^{1}}\hat{P}_{-}, \qquad /13/$$

$$(0, a_2')^1 = (0, a_2')\exp\{iva_2\}, \; (d_1', d_2')^1 = (d_1', d_2')\exp\{iv(d_2 - d_1)\} \text{ и т.д.} \qquad /14/$$

$h^1 = h\exp\{iva_2\}$, $h = a + \ell$; a, ℓ - скаляр и длина вектора матрицы $\hat{L}(w)$ соответственно.

Выражение для свободного члена $\vec{H}(w)$ находим далее с помощью $\hat{P}_{\pm}$.

Суммарный индекс задачи Римана для рассматриваемой системы уравнений /1-2/ определяется выражением [9]

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{1}{2\pi i}\ln[\det\hat{D}(w)]_{-\infty}^{\infty} \qquad /15/$$

и равен нулю.

Фактор-множители $\hat{L}_{+}^{-1}(w)$ /см. формулу /13// удовлетворяют условию коммутативной факторизации, поэтому правая и левая факторизации $\hat{L}(w)$ [10] совпадают друг с другом, а частные индексы κ_1 и κ_2 оба равны нулю.

По теореме о разрешимости системы интегральных уравнений с разностными ядрами на полуоси [10] условие $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ является необходимым и достаточным для существования и единственности решения краевой задачи Римана. Это означает, что задача поставлена корректно [11]: она безусловно и однозначно разрешима и ее решение устойчиво по отношению к малому изменению коэффициентов $\hat{D}(w)$ и $\vec{H}(w)$. Это следует из того, что: 1/ решение задачи дается в явном виде через интегралы Фурье; 2/ преобразование Фурье есть ограниченный оператор и, следовательно, при малых изменениях подынтегральной функции $\vec{F}_{+}(w)$ получает малые приращения.

Решение неоднородной задачи Римана с нулевым индексом согласно теореме Лиувилля имеет вид

$$\vec{F}_{+}(w) = \hat{L}_{+}^{-1}(w)\vec{\Psi}_{+}(w). \qquad /16/$$

Произвольные векторные полиномы, аддитивно дополняющие решение /16/, равны нулю; однородная краевая задача Римана имеет лишь тривиальное решение. Функции $\vec{\Psi}_{+}$ и $\vec{\Psi}_{-}$ есть краевые значения функций $\vec{\Psi}_{\pm}(w')$, аналитических в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной w' соответственно, и принадлежат классу функций $\mathfrak{L}_2(-\infty, \infty)$, удовлетворяющих условию Гельдера.

$$\vec{\Psi}_{+}(w) = (2\pi)^{-1/2}\int_{0}^{\infty} dz\, e^{iwz}\vec{\Psi}(z), \quad \vec{\Psi}_{-}(w) = -(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{0} dz\, e^{iwz}\vec{\Psi}(z),$$

$$\vec{\Psi}(z) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dw\, e^{-iwz}\hat{L}_{+}(w)\vec{H}(w). \qquad /17/$$

Используя двумерные проекционные операторы $\hat{P}_{\pm}$ и соотношения

$$(\hat{P}_{\pm})^n = \hat{P}_{\pm} \text{ (n-целое число)}, \; \hat{P}_{+}\hat{P}_{-} = \hat{P}_{-}\hat{P}_{+} = 0,$$

$$\hat{P}_{+}\vec{F}(w) = \vec{F}_{+}(w), \quad \hat{P}_{-}\vec{F}(w) = -\vec{F}_{-}(w), \qquad /18/$$

преобразуем выражения /17/ к виду

$$\vec{\Psi}_{\pm}(w) = \hat{P}_{\pm}\hat{L}_{+}(w)\vec{H}(w). \qquad /19/$$

Функции $\vec{H}(w)$ и, следовательно, $\vec{\Psi}_{\pm}(w)$ имеют разный вид в зависимости от местоположения излучателя в системе.

Вычислим выражения $H(w)$ в различных областях коаксиальной системы, используя формулу $\vec{H}(w) = -\hat{L}^{-1}\vec{f}$. Ф.к. поля источника $\vec{f}$ имеет вид [6]:

$$\vec{f} = \frac{1}{(0,a_2')}\begin{pmatrix}[0|d_1',\underline{bM}|a_2'] \\ [0|d_2',\underline{bM}|a_2']\end{pmatrix}, \quad (0,\underline{bM}) = \frac{2\pi^2 i}{c}\int_{b_{min}}^{b_{max}} b\,db\,(0,b')\, j_{\phi}(b,w), \qquad /20/$$

$$[0|d_1',\underline{bM}|a_2'] = \begin{cases} (0,d_1')(\underline{bM},a_2') & \text{при} \quad 0<d_1<b<a_2, \\ (0,\underline{bM})(d_1',a_2') & \text{при} \quad 0<b<d_1<a_2, \\ 0 & \text{при} \quad d_1<a_2<b, \\ & \phantom{\text{при}} \quad b<a_2<d_1. \end{cases}$$

При $0<r<a$, $0<b<a$

$$\vec{H}(w) = \frac{(0,\underline{bM})}{(0,d_1')}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \qquad /21/$$

В правой области при $d_1<r<a_2$, $d_1<b<a_2$

$$\vec{H}(w) = \frac{1}{(d_1',d_2')}\begin{pmatrix}(\underline{bM},d_2') \\ (d_1',\underline{bM})\end{pmatrix},$$

при $b<d_1<d_2$

$$\vec{H}(w) = \frac{(0,\underline{bM})}{(0,d_1')}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad /22/$$

при $d_1<d_2<b$

$$\vec{H}(w) = \frac{(\underline{bM},a_2')}{(d_2',a_2')}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Выпишем выражения $\vec{\Psi}_{\pm}(w)$ во всех пространственных областях, учитывая различный вид $\hat{P}_{\pm}$. При $0<r<a_2$, $0<b<a_2$

$$\vec{\Psi}_+(w) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\overline{h^1}}\,(0,\underline{bM})(0,a_2')^1_-\, v_n}{\frac{d}{dv}(0,a_2')(w-w_n)\,w_n}\begin{pmatrix}(d_1',a_2')\\(d_2',a_2')\end{pmatrix}; \quad \vec{\Psi}_-(w) = 0. \qquad /23/$$

При $b<d_1<d_2$

$$\vec{\Psi}_+(w) = 0; \quad \vec{\Psi}_-(w) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(0,d_1')^1_+(d_1',d_2')^1_+(d_2',a_2')^1_+(0,\underline{bM})\,v_k}{\sqrt{\overline{h^1}}\,\frac{d}{dv}(0,d_1')(w+w_k)\,w_k}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \qquad /24/$$

При $d_1<b<d_2$

$$\vec{\Psi}_+(w) = 0; \quad \vec{\Psi}_-(w) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(0,d_1')^1_+(d_1',d_2')^1_+(d_2',a_2')^1_+(d_1',\underline{bM})\,v_k}{(d_1',d_1)\frac{d}{dv}(d_1',d_2')(w+w_k)\,w_k}\begin{pmatrix}(d_1,d_2')\\(d_1',d_1)\end{pmatrix} \qquad /25/$$

При $d_2<b<a_2$

$$\vec{\Psi}_+(w) = 0; \quad \vec{\Psi}_-(w) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(0,d_1')^1_+(d_1',d_2')^1_+(d_2',a_2')^1_+(\underline{bM},a_2')\,v_k}{\frac{d}{dv}(d_2',a_2')(w+w_k)\,w_k}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \qquad /26/$$

Из выражений /23/-/26/ следует, что эта задача имеет два вида решения в зависимости от положения излучателя относительно разрыва граничных условий в точке $z=0$.

Когда источник поля находится слева от точки $z=0$, решение имеет вид

$$\vec{F}_+(w) = -\hat{L}_+^{-1}(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\overline{h^1}}\,(0,\underline{bM})(0,a')^1_-\, v_n}{\frac{d}{dv}(0,a_2')(w-w_n)w_n}\begin{pmatrix}(d_1',a_2')\\(d_2',a_2')\end{pmatrix}, \quad \vec{F}_-(w) = 0. \qquad /27/$$

Для источника, расположенного в правой области $(z>0)$, используя краевое условие /11/, $\vec{F}_+(w)$ определим из формулы

$$\vec{F}_+(w) = \hat{L}_+^{-1}(w)\,\vec{\Psi}_-(w) + \vec{H}(w), \qquad /28/$$

где $\vec{H}(w)$, $\vec{\Psi}_-(w)$ выражаются формулами /22/ и /24/-/26/.

В общем случае решение задачи определяется формулами /27/ и /28/.

4. РАСЧЕТ ПЛОТНОСТИ И ПОТОКА ЭНЕРГИИ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА

Результаты численного анализа средних /по времени/ величин плотности потока энергии $\bar{S}_z$ и плотности энергии $\bar{W}$ рассеянного поля в системе /см. рис.1а/, область $z<z_1$, показаны на рис.2 /расчет проведен на ЭВМ CDC-6500 с использованием пакета программ [12], написанных на языке ФОРТРАН/.

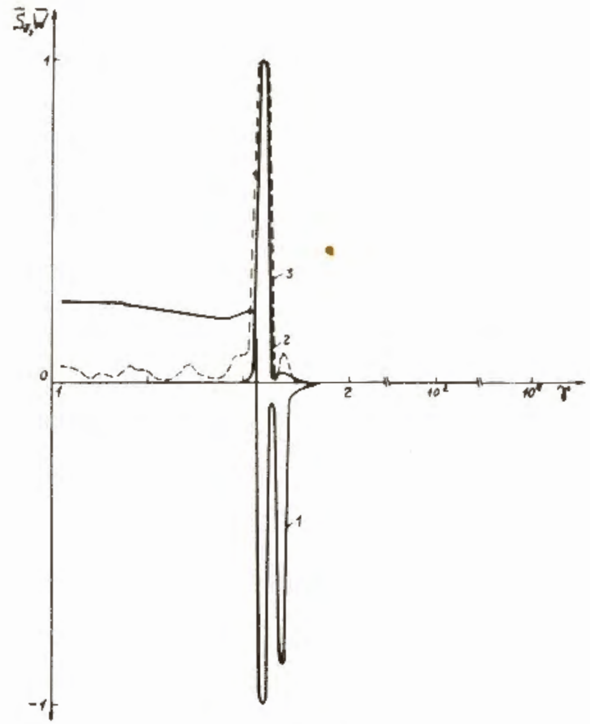

Рис.2

Напряженность поля распределенного модулированного источника в системе задается выражением

$$\vec{f}(w,k) = \frac{2\pi^2 i}{c} I \frac{(b_0', a_2')}{(0, a_2')} \frac{\exp\{-iz_0(k-\gamma k_0) - [(k-\gamma k_0)^2(\gamma\beta a2)^{-2}] - iz_1(\gamma k - k_0)(\gamma\beta)^{-1}\}}{\{[\gamma(k-\beta w) - k_0] - \epsilon\}} \begin{pmatrix} (0, d_1') \\ (0, d_2') \end{pmatrix}$$

где $\epsilon > 0$, $a = \frac{2\ln 2}{\ell}$, ℓ – длина сгустка в собственной системе,

$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $k = \gamma(k_0 + \beta w_0)$, $w_0^2 = k_0^2 - v^2$, $k_0 = \omega_0 c^{-1}$,

ω_0 - частота колебаний тока излучателя в собственной системе координат.

Из рис.2 видно, что $\bar{S}_z$ и $\bar{W}$ убывают немонотонно с ростом скорости движения излучателя. Обратный поток энергии, возникающий при пролете источника с $\beta > 0$, меняет знак при $\gamma = 1{,}03$ и имеет два максимума: при $\gamma = 1{,}03$ и $\gamma = 1{,}07$. Абсолютный максимум излучения движущегося источника ($\beta < 0$) соответствует $\gamma = 1{,}03$. При релятивистских скоростях движения источника

значения $\bar{S}_z$, $\bar{W}$ убывают с ростом γ, как γ^{-2}. Отметим, что решение задачи возбуждения в системе /см. рис.1б/ приведенным методом проводится аналогично, т.к. краевая неоднородная задача Римана имеет единственное решение /индекс задачи равен нулю/.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить проф. Е.П.Жидкова, Э.И.Уразакова, А.Б.Швачку за стимулирующие дискуссии и постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейнке Х., Гундлах Ф. Радиотехнический справочник, т.1, М.-Л., Госэнергоиздат, 1960.
2. Валитов Р.А. и др. Пондеромоторное действие электромагнитного поля. "Советское Радио", М., 1975.
3. Павлов В.С., Уразаков Э.И., Лобанова В.П. ЖТФ, 1978, 48, 2, с.334.
4. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации, "Советское Радио", М., 1966.
5. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Изд-во ХГУ, Харьков, 1971.
6. Игушкин Л.П., Уразаков Э.И. Цилиндрические электромагнитные поля и плазменные сгустки. Изд-во НИИЯФ МГУ, ч.I,II,III, М., 1969.
7. Иркегулов А.Ш., Уразаков Э.И., Швачка А.Б. ОИЯИ, Р9-12614, Дубна, 1979.
8. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. "Наука", М., 1978.
9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. "Наука", М., 1968.
10. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. УМН, 1958, т.13, вып.2, с.3.
11. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. "Наука", М., 1977.
12. Иркегулов А.Ш., Швачка А.Б. ОИЯИ, Р11-12661, Дубна, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 марта 1980 года.