

2758/2-80

23/v<sub>1</sub>-80



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P9-80-152

М.С.Хвастунов

МОНОЭНЕРГЕТИЧНОСТЬ ПУЧКА  
ЦИКЛИЧЕСКОГО ИНДУКЦИОННОГО УСКОРИТЕЛЯ

Направлено в ПТЭ

1980

В настоящей работе обсуждается процесс ускорения в циклическом индукционном ускорителе /ЦИУ/ <sup>1,2,3</sup>, который подобен бетатрону с постоянным полем <sup>1,2</sup>, но отличается тем, что ведущее поле в нем переменное во времени. Магнитная система ускорителя подобна системе слабофокусирующего синхротрона - в прямолинейных прожеутках размещаются ускоряющие ферромагнитные сердечники - индукторы и устройства ввода и вывода. Магниты С-образные, вертикальная стойка ядра расположена снаружи и не охватывается орбитой. Индукторы перемагничиваются от источника переменного напряжения низкой частоты, например, 50 Гц. Ускоряющее поле имеет форму полуволны синусоиды, длительность импульса ускоряющего поля равна 10 мс. Ускорение частиц происходит в квазипостоянном ускоряющем поле, поскольку за время одного оборота оно меняется незначительно. Поэтому понятие фазы частицы в ЦИУ теряет смысл, и в этом ускорителе отсутствует фазовое движение и связанные с ним колебания импульса ускоряемых частиц. Однако остается вопрос - как ведут себя в процессе ускорения частицы, введенные в камеру ускорителя с разными импульсами. Назовем равновесной такую частицу, радиус  $\rho_s$  которой в процессе ускорения остается постоянным, а неравновесной - частицу с изменяющимся радиусом  $\rho$ . Начальные импульсы этих частиц разные.

Ускорение частиц в ЦИУ происходит в вихревом электрическом поле индукторов и магнитов. В первых трех пунктах мы не будем учитывать бетатронные колебания, в пункте четвертом обсудим их влияние на монохроматичность пучка.

## 1. УСКОРЕНИЕ В ВИХРЕВОМ ПОЛЕ ИНДУКТОРОВ

Закон роста импульса равновесной и неравновесной частиц описывается известными выражениями:

$$\dot{p}_{s1} = qE_s \quad \dot{p}_1 = qE, \quad /1/$$

где индекс "s" относится к равновесной частице,  $E_s$  и  $E$  - напряженности ускоряющих полей, усредненные по равновесной и неравновесной орбитам:

$$E_s = U_s / L_s \quad E = U/L. \quad /2/$$

Длины орбит  $L_s$  и  $L$  равны

$$L_s = 2\pi\rho_s + N\ell = 2\pi R_s \quad \text{и} \quad L = 2\pi\rho + N\ell, \quad /3/$$

где  $N$  - число элементов периодичности,  $\ell = \text{const}$  - длина прямолинейного промежутка. В вихревом электрическом поле индукторов разность потенциалов при полном обороте не зависит от радиуса:  $U = U_s$ , поэтому отношение скоростей роста импульсов равно

$$\dot{p}_{si} / \dot{p}_i = L / L_s. \quad /4/$$

Пусть  $\rho = \rho_s + \Delta\rho$ , тогда  $L = L_s + 2\pi\Delta\rho$  и с точностью до 1-го члена разложения по  $\Delta\rho/R_s$  выражение /4/ запишется в виде

$$\dot{p}_i / \dot{p}_{si} = 1 - \Delta\rho / R_s. \quad /5/$$

От радиуса  $\rho$  перейдем к импульсу  $p$ , для этого воспользуемся известными соотношениями

$$p_s = 300Z B_s \rho_s \quad p = 300Z B \rho, \quad /6/$$

где  $Z$  - заряд частицы в единицах заряда электрона,  $p_s$  и  $p$  - равновесный и неравновесный импульсы. Учтем также закон изменения ведущего поля

$$B = B_s (\rho_s / \rho)^n, \quad /7/$$

где  $n$  - показатель спада поля. Выражение для неравновесного импульса представляется в виде:

$$p = p_s (\rho / \rho_s)^{1-n}, \quad /8/$$

или, с учетом того, что  $p = p_s + \Delta p$ , с точностью до 1-го члена разложения по  $\Delta p / p_s$  выражение /8/ записывается в виде

$$p_s + \Delta p = p_s [1 + (1-n) \cdot \Delta p / p_s]. \quad /9/$$

Из /9/ получаем

$$\Delta p = \frac{p_s}{1-n} \cdot \frac{\Delta p}{p_s}. \quad /10/$$

Подставляя /10/ в /5/, получим отношение скоростей роста импульсов

$$\dot{p}_i / \dot{p}_{si} = 1 - \frac{1}{1-n} \cdot \frac{p_s}{R_s} \cdot \frac{\Delta p}{p_s}. \quad /11/$$

Из /11/ следует: 1/ чем больше импульс неравновесной частицы превышает равновесный импульс ( $\Delta p > 0$ ), тем меньше скорость роста импульса неравновесной частицы по сравнению с темпом роста импульса равновесной частицы; 2/ чем меньше неравновесный импульс равновесного ( $\Delta p < 0$ ), тем выше скорость его роста по сравнению со скоростью роста равновесного импульса. В обоих случаях импульс неравновесной частицы в процессе ускорения будет приближаться к равновесному импульсу, т.е. импульсный разброс частиц в процессе ускорения будет уменьшаться, а орбита неравновесной частицы - приближаться к равновесной орбите.

## 2. УСКОРЕНИЕ В ВИХРЕВОМ ПОЛЕ МАГНИТОВ

Темп роста импульса равновесной и неравновесной частиц описывается выражениями, подобными /1/:

$$\dot{p}_{sp} = qE_s \quad \dot{p}_p = qE, \quad /12/$$

где усредненные по равновесной и неравновесной орбитам напряженности ускоряющих полей равны

$$E_s = U_s / L_s \quad \text{и} \quad E = U / L, \quad /13/$$

а

$$U_s = -\dot{\phi}_s \quad \text{и} \quad U = -\dot{\phi} \quad /14/$$

и длины орбит  $L_s$  и  $L$  определены выражениями /3/. Магнитные потоки  $\phi_s$  и  $\phi$ , охватываемые равновесной и неравновесной орбитами, описываются выражениями /8/:

$$\phi_s = \phi_{0s} + \phi_{mp} (1 - \cos \omega t) \quad \text{и} \quad \phi = \phi_0 + \phi_m (1 - \cos \omega t). \quad /15/$$

Амплитуды потоков равны:

$$\begin{aligned} \phi_{mp} &= 2\pi\rho_s^n B_{mp} (\rho_s^{2-n} - \rho_0^{2-n}) / (2-n), \\ \phi_m &= 2\pi\rho_s^n B_{mp} (\rho^{2-n} - \rho_0^{2-n}) / (2-n), \end{aligned} \quad /16/$$

где  $\rho_0$  - внутренний радиус магнита, ограничивающий область магнитного поля.

Используя выражения /12 + 16/, находим отношение скоростей роста импульсов с точностью до 1-го члена разложения

$$\dot{p}_p / \dot{p}_{sp} = 1 + \frac{1}{1-n} \left[ \frac{2-n}{1 - (\rho_0/\rho_s)^{2-n}} - \frac{\rho_s}{R_s} \right] \frac{\Delta p}{p_s}. \quad /17/$$

Из /17/ можно заключить, что импульсный разброс  $\Delta p$  частиц в процессе ускорения в вихревом электрическом поле магнитов имеет тенденцию к росту.

### 3. УСКОРЕНИЕ В ЦИУ

Во время ускорения конкурируют два процесса: сжатие импульсного спектра /11/ и уширение спектра /17/. Из /11/ и /17/ получаем

$$dp_i = \alpha_i \cdot dp_{si} \quad \text{и} \quad dp_p = \alpha_p \cdot dp_{sp}, \quad /18/$$

где  $\alpha_i$  и  $\alpha_p$  - правые части /11/ и /17/, индекс "i" относится к индукторам, а "p" - к магнитам. Скорости роста импульса равновесной частицы в ускоряющих полях индукторов и магнитов связаны соотношением

$$\dot{p}_{si} / \dot{p}_{sp} = \phi_{mi} / \phi_{mp} = k, \quad /19/$$

где  $\phi_{mi}$  - амплитуда магнитного потока индукторов. Используя /18/ и /19/, получим

$$dp = \frac{k}{k+1} (\alpha_i + \frac{1}{k} \alpha_p) dp_s, \quad /20/$$

где  $dp = dp_i + dp_p$  и  $dp_s = dp_{si} + dp_{sp}$ . Из /20/ следует

$$\dot{p} / \dot{p}_s = \frac{k}{k+1} (\alpha_i + \frac{1}{k} \alpha_p). \quad /21/$$

Подставляя в /21/ выражения для  $\alpha_i$  и  $\alpha_p$  /11/ и /17/, получаем

$$\dot{p} / \dot{p}_s = 1 + \frac{1}{1-n} \left[ \frac{k}{k+1} f - \frac{\rho_s}{R_s} \right] \frac{\Delta p}{p_s}, \quad /22/$$

где  $f = 2\pi \rho_s^2 B_{mp} / \phi_{mi}$ . Далее используем соотношение

$$p_{ms} = \frac{300Z}{2\pi R_s} \phi_{mi} (1 + 1/k) = 300Z B_{mp} \cdot \rho_s, \quad /23/$$

где  $2\rho_{ms}$  - прирост импульса равновесной частицы в ЦИУ за все время действия ускоряющего поля. Из /23/ следует

$$(k+1)/k = 2\pi \rho_s R_s B_{mp} / \phi_{mi}. \quad /24/$$

Подставляя /24/ в /22/, получим

$$\dot{p} / \dot{p}_s = 1, \quad /25/$$

т.е. импульсный разброс  $\Delta p = p - p_s$  в процессе ускорения в ЦИУ не изменяется. Подобная ситуация имеет место в бетатроне с неподвижной равновесной орбитой <sup>1</sup>.

Относительный импульсный разброс в конце ускорения равен

$$\left( \frac{\Delta p}{p} \right)_0 = \frac{p_0}{p} \cdot \frac{\Delta p_0}{p_0}, \quad /26/$$

где  $\Delta p_0 / p_0$  - импульсный разброс при инжекции.

### 4. БЕТАТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И МОНОХРОМАТИЧНОСТЬ ПУЧКА

Бетатронные колебания вызывают дополнительное к /26/ размытие импульсного спектра ускоряемых частиц. В работе <sup>1</sup> приведена

формула для оценки энергетического разброса электронов, обусловленного колебаниями в бетатроне:

$$\Delta T/T = 1 - \sqrt{1 - A/R}, \quad /27/$$

где A - амплитуда бетатронных колебаний, R - радиус орбиты. Формула /27/ применима в случае, когда показатель спада поля близок к 0,5. При  $A \ll R$  /27/ переходит в

$$\Delta T/T = 1/2 \cdot A/R. \quad /28/$$

Формулы /27/ и /28/ сильно завышают вклад бетатронных колебаний в энергетический разброс пучка. Покажем это. Пусть две частицы, равновесная и неравновесная, с импульсами  $p_s$  и  $p = p_s + \Delta p$  ускоряются в бетатроне; амплитуды бетатронных колебаний обеих частиц равны нулю; радиусы орбит этих частиц  $\rho_s$  и  $\rho = \rho_s + \Delta \rho$ . Тогда справедливо равенство

$$\Delta p / p_s = (1-n) \cdot \Delta \rho / \rho_s \quad /29/$$

- см. /10/. При  $n \approx 0,5$ ,  $\Delta p = p - p_s = A$  и  $\rho_s = R$ , а также на основании того, что для релятивистских электронов  $\Delta p/p = \Delta T/T$ , формула /29/, не имеющая отношения к бетатронным колебаниям, переходит в формулу /28/, якобы учитывающую влияние бетатронных колебаний на энергетический разброс электронов, ускоренных в бетатроне. Ясно, что ни /27/, ни /28/ к делу не относятся.

Рассмотрим далее поведение двух частиц, инжектированных в камеру ЦИУ с одним и тем же импульсом  $p_0$  на один и тот же

радиус  $\rho$ , но имеющих разные амплитуды бетатронных колебаний; одна с амплитудой  $A$ , другая - с нулевой амплитудой. Отношение скоростей роста импульсов этих частиц равно

$$\dot{p}_a / \dot{p} = \frac{U_a}{U} \cdot \frac{L}{L_a}, \quad /30/$$

где индекс "а" относится к частице с амплитудой колебания  $A$ . Приориты энергии за оборот для обеих частиц одинаковы:  $U_a = U$ , т.к. основная часть ускоряющего потока /поток индукторов/ не зависит от радиуса, а следовательно, не зависит от амплитуды бетатронных колебаний, и в линейном приближении поток магнитов, охватываемый орбитой, не зависит от амплитуды бетатронных колебаний.

Длина орбиты неколеблущейся частицы равна:  $L = v_x \cdot \lambda$ , где  $\lambda$  - длина волны бетатронных колебаний,  $v_x$  - число радиальных бетатронных колебаний за оборот. Длина орбиты колеблющейся частицы вычислялась как длина отрезка синусоиды:

$$L_a = v_x \cdot \frac{2\lambda}{\pi} \sqrt{1 + \xi^2} \cdot E(\pi/2, k), \quad /31/$$

где  $\xi = A/(\lambda/2\pi)$ ,  $A$  - амплитуда бетатронных колебаний,  $k = \xi/\sqrt{1 + \xi^2}$  и  $E(\pi/2, k)$  - полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода <sup>15/</sup>. В интересующем нас случае  $\xi \ll 1$  и  $\frac{2}{\pi} E(\pi/2, k) = 1$ , а выражение /30/ принимает вид

$$\dot{p}_a / \dot{p} = 1 - \frac{1}{2} \xi^2. \quad /32/$$

В выражении для  $\xi$  заменим  $\lambda = 2\pi R_s / v_x$  и  $A = A_0 \sqrt{p_0/p}$ , где  $A_0$  - амплитуда радиальных бетатронных колебаний при инжекции,  $p_0$  - импульс инжекции,  $p$  - конечный импульс. Соотношение /32/ преобразуется к виду

$$\dot{p}_a / \dot{p} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{v_x A_0}{R_s} \right)^2 \frac{p_0}{p}. \quad /33/$$

Решая это уравнение, получим формулу для оценки импульсного разброса ускоренных в ЦИУ частиц, обусловленного бетатронными колебаниями:

$$\left( \frac{\Delta p}{p} \right)_a = \frac{1}{2} \left( \frac{v_x A_0}{R_s} \right)^2 \frac{p_0}{p} \cdot \ln(p/p_0). \quad /34/$$

Амплитуду  $A_0$  примем равной:  $A_0 = d/2$ , где  $d$  - диаметр камеры ускорителя.

Суммарный импульсный разброс пучка ускоренных в ЦИУ частиц получим квадратичным суммированием /26/ и /34/:

$$\Delta p/p = (p_0/p) (\Delta p_0/p_0) (1 + \eta^2)^{1/2}, \quad /35/$$

где

$$\eta = \frac{(v_x A_0 / R_s)^2}{2(\Delta p_0/p_0)} \cdot \ln(p/p_0).$$

Легко выполнить условия, при которых  $\eta^2 \ll 1$ , при этом /35/ принимает вид

$$\Delta p/p = (p_0/p) \cdot (\Delta p_0/p_0). \quad /36/$$

В ускорителях с автофазировкой закон затухания для импульса имеет вид <sup>16/</sup>:

$$\Delta p \sim E^{1/4}, \quad /37/$$

где  $E$  - энергия частицы. Используя /37/, можно получить формулы для оценки импульсного разброса пучка ускорителя с автофазировкой:

$$(\Delta p/p)_1 = (p_0/p)^{3/4} (\Delta p_0/p_0) \quad /38/$$

- в релятивистском случае и

$$(\Delta p/p)_2 = (p_0/p)^{1/2} (\Delta p_0/p_0) \quad /39/$$

- в нерелятивистском случае. В /38/ и /39/  $\Delta p_0$  и  $\Delta p$  - начальный и конечный импульсные разбросы, обусловленные фазовым движением. Из сравнения /38/ и /39/ с /36/ следует, что моноэнергетичность пучка ЦИУ выше, чем в ускорителе с автофазировкой.

## 5. ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ И СРАВНЕНИЯ

В работе <sup>18/</sup> описаны варианты циклического индукционного импульсного разброса пучка для электронного и протонного вариантов ЦИУ на энергии 50, 100 и 200 МэВ. Диаметр вакуумной камеры взят равным  $d = 7$  см, начальная амплитуда бетатронных колебаний равна  $A_0 = 3,5$  см. Частота радиальных бетатронных колеба-

Таблица  
Моноэнергетичность пучка ЦИУ

№ п/п	П а р а м е т р	в е л и ч и н а					
		Электроны			протоны		
1.	T, конечная энергия, МэВ	50	100	200	50	100	200
2.	T <sub>0</sub> , энергия инжекции, МэВ	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
3.	R, средний радиус орбиты, м	0,57	1,15	2,30	2,12	2,81	3,82
4.	k, отношение магнитного потока индукторов к потоку магнитов	6,5	14,8	29,0	26,1	34,8	49,3
5.	$\Delta R/R_0$ , импульсный разброс пучка на при инжекции	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-3</sup>
6.	$\xi^2$ , вклад бетатронных колебаний	1,61	0,13	0,01	0,30	0,11	0,06
7.	$\Delta R/R$ , импульсный разброс пучка в конце ускорения	2,04.10 <sup>-4</sup>	0,67.10 <sup>-4</sup>	0,32.10 <sup>-4</sup>	0,86.10 <sup>-4</sup>	0,57.10 <sup>-4</sup>	0,38.10 <sup>-4</sup>
8.	( $\Delta R/R$ ) <sub>c</sub> , импульсный разброс пучка синхрофазотрона	3,76.10 <sup>-4</sup>	2,24.10 <sup>-4</sup>	1,33.10 <sup>-4</sup>	2,74.10 <sup>-4</sup>	2,31.10 <sup>-4</sup>	1,92.10 <sup>-4</sup>

ний равна  $r_x = 1,24$ . Остальные исходные данные и результаты оценок приведены в таблице. Импульсный разброс пучка, оцененный по формуле /35/, составляет  $10^{-4}$ . Для сравнения в восьмой строке таблицы приведены оценки импульсного разброса пучка синхротрона, выполненные при тех же начальных условиях для электронов по формуле /39/ и для протонов по формуле /39/. Из таблицы видно, что моноэнергетичность пучка ЦИУ заметно выше, чем в ускорителе с автофазировкой.

#### КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

Импульсный разброс пучка ЦИУ  $\Delta r$  в процессе ускорения остается примерно постоянным, подобно ситуации в бетатроне с неподвижной равновесной орбитой. Как следствие этого - высокая моноэнергетичность пучка ЦИУ, более высокая, чем в ускорителе с автофазировкой.

Автор благодарен А.Б.Кузнецову, Э.А.Перельштейну и А.Д.Коваленко за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. "Теория циклических ускорителей", Физматгиз, М., 1962.
2. Канунников В.Н., и др., АЭ, 1975, 38, с.234.
3. Хвастунов М.С. ОИЯИ, Р9-12811, Дубна, 1979.
4. Воробьев А.А. и др. "Электронные пучки бетатронов", Атомиздат, М., 1974.
5. Корн Г., Корн Т. "Справочник по математике", "Наука", М., 1977.
6. Брук Г. "Циклические ускорители заряженных частиц", Атомиздат, М., 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел  
25 февраля 1980 года.