

7992

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



7992

Экз. чит. зала

P9 - 7992

Х.О.Абдуллоев, И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

ПЛОСКИХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ СОЛИТОНОВ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

P9 - 7992

Х.О.Абдуллоев, И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

ПЛОСКИХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ СОЛИТОНОВ

Направлено в "Nuclear Fusion"

§1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время, особенно в связи с пучковым и лазерным нагревом плазмы, резко возрос интерес к изучению свойств ленгмюровской (ℓ) турбулентности. Как известно, теория слабой турбулентности оказалась неспособной объяснить ни динамики, ни спектров ленгмюровской турбулентности при не слишком малых плотностях энергии поля $1 > \frac{W}{nT} > k_0^2 d_e^2$, k_0 - характерное волновое число, $d_e = \frac{v_e}{\omega_{pe}}$.

Еще в работе Веденова и Рудакова^{/1/} была обнаружена так называемая модуляционная неустойчивость ленгмюровских волн, приводящая к возникновению сильно модулированных нелинейных волн или солитонов. Эта неустойчивость проявляется, если длина волны возмущения $\lambda = 1/k$ значительно больше длины ленгмюровской волны $\lambda_0 = 1/k_0$. Захаровым^{/2/} была рассмотрена неустойчивость плоской монохроматической ℓ -волны в обратном пределе $\lambda_0 \gg \lambda$, /будем называть ее квазираспадной/. Одним из авторов /В.Г.Маханьковым/ было показано /см. также^{/3/} /, что как модуляционная, так и квазираспадная неустойчивость на начальном этапе их развития хорошо описываются в рамках теории слабой турбулентности^{/4/} и являются предельными случаями одной неустойчивости - неустойчивости ленгмюровского спектра по отношению к слипанию плазмонов /иногда ее называют модифицированным распадом/. Инкремент этой неустойчивости как функция волнового числа приведен

на рис. 1, где введены обозначения $k_{\text{tran}} = \frac{1}{d_e} \left(\frac{2}{27} \mu \frac{W}{nT} \right)^{1/4}$,
 $k_{\text{max}} = \frac{1}{d_e} \sqrt{\frac{W}{6nT}}$, $\mu = \frac{m_e}{m_i}$.

В работе^{/3/} отмечалось, что динамика образования и взаимодействия ленгмюровских солитонов допускает интерпретацию на языке ядерной физики, если рассматривать ℓ -плазмоны как притягивающиеся нерелятивистские квазичастицы, способные излучать звуковые волны.

Действительно, спектральная кривая $\omega^\ell(k_0)$ имеет вид /см./^{3-4/} /

$$\omega^\ell(k_0) = \omega_{pe} + \frac{3}{2} k_0^2 v_e^2 / \omega_{pe} - \frac{1}{8} \omega_{pe} \frac{W}{nT} \quad /1.1/$$

Если рассматривать это соотношение как обычное эйнштейновское определение энергии нерелятивистской частицы /полагая $\hbar = 1/$, можно найти эффективную массу

ленгмюровского плазмона $m_{\text{eff}} = \frac{\omega_{pe}}{3}$ и величину, соот-

ветствующую скорости света $c^2 = 3v_e^2$. Последний член в /1.1/ соответствует потенциальной энергии ℓ -плазмона в поле остальных. Знак минус соответствует силе притяжения между плазмонами*.

Следует отметить, что окончательные результаты развития модуляционной и квазираспадной неустойчивостей различны. Первая может проявляться при $W/nT < k_0^2 d_e^2$, лишь бы было выполнено $W/nT > (\Delta k)^2 d_e^2$ /где Δk характеризует относительную кинетическую энергию слипающихся плазмонов/ и приводит лишь к незначительному изменению квазистационарного спектра, получающегося из теории слабой турбулентности^{/4/}.

* Выражение /1.1/ справедливо в так называемом квазистатическом приближении, в более общем виде /см. ниже/ последний член представляет собой $e_{\text{eff}} \phi$, где потенциал ϕ подчиняется волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = \frac{1}{nm_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{|E|^2}{16\pi}$$

Квазираспадная ветвь возможна лишь при более жестких условиях на энергию турбулентности $W/nT > k_0^2 d_e^2$, но и эффект её значительнее: она может обогащать спектр

в области больших волновых чисел $k = \left(\frac{W}{nT} \right)^{1/2} \frac{1}{d_e} > k_0$,

в результате одного акта квазираспада. С другой стороны, в работах^{/5,6/} была отмечена возможность постепенного, эстафетного обогащения коротковолновой области спектра, что связано с образованием и взаимодействием солитонов.

В результате последовательных слияний солитонов могут возникать сгустки волновой энергии с весьма высокой плотностью, и, следовательно, с малыми длинами волн.

В настоящей работе мы подробно обсудим условия слияния двух солитонов в один, так как этот процесс является определяющим при развитии сильной турбулентности.

§2. Условия слияния солитонов

Уравнения, описывающие динамику образования и взаимодействия солитонов в удобной для нас форме, были получены Захаровым^{/2/}:

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} E = nE \quad /2.1/$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) n = \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2,$$

где $t = \frac{2}{3} q\mu\omega_{pe} t$, $x = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{q\mu}}{d_e} x$, $n = \frac{3}{4} \frac{\delta n}{q\mu n_0}$, $T = T_e + T_i$

$$q = \frac{T}{T_e}, \quad E^2 = \frac{3}{64} \frac{E^2}{q\mu\pi n_0 T}, \quad v_s = \sqrt{\frac{T}{m_i}}, \quad v_g = 3k_0 v_e^2 / \omega_{pe}, \quad M = \frac{v_g}{v_s}$$

Стационарное решение системы /2.1/ в виде бегущего со скоростью $v_g = 3k_0 v_e^2 / \omega_{pe}$ солитона имеет вид:

$$E = E_m \text{ch}^{-1}[(x - Mt) \frac{E_m}{\sqrt{2(1 - M^2)}}] \exp\{i(\frac{M}{2}x - \Omega t)\} \quad /2.2/$$

и

$$\Omega = \frac{M^2}{4} - \frac{E_m^2}{2(1 - M^2)} \quad /2.3/$$

E_m - амплитудное значение электрического поля, k_0 - характерное волновое число, определяющее среднюю кинетическую энергию плазмонов в солитоне.

В работе /6/ было показано, что система /2.1/, кроме закона сохранения числа плазмонов

$$S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |E|^2 dx = \text{const},$$

имеет еще по крайней мере два интеграла движения: закон сохранения импульса и энергии. Нам понадобится последний:

$$S = \int (n|E|^2 + |E'_x|^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{V^2}{2}) dx = \text{const}, \quad /2.4/$$

где

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Формула /2.4/ выражает закон сохранения энергии, складывающейся из потенциальной энергии плазмонов в самосогласованном поле, кинетической энергии движения солитона как целого и относительного движения плазмонов внутри солитона, а также кинетической и потенциальной энергий гидродинамических возмущений, связанных с движением в.ч. поля и генерацией s-волн.

Интеграл S для солитона /2.2/ может быть легко вычислен:

$$S = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{5M^2 - 1}{(1 - M^2)^{3/2}} E_m^3 + M^2 \sqrt{\frac{1 - M^2}{2}} E_m. \quad /2.5/$$

Нулевой уровень энергии $S=0$ соответствует условию

$$E_m(M) = [\frac{3}{2} M^2 \frac{1 - M^2}{1 - 5M^2}]^{1/2}, \quad /2.6/$$

которое выполнимо при*

$$M < M_* = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,45. \quad /2.7/$$

В том случае, когда $S < 0$, естественно рассматривать солитон как сгусток в.ч. энергии, состоящий из слипшихся плазмонов, так как именно энергия их притяжения является определяющей. В случае $S > 0$ основная доля энергии сосредоточена в медленном движении частиц, а солитон можно рассматривать как волну разрежения с захваченным в.ч. полем, уменьшающим скорость ее движения.

Второе уравнение системы /2.1/ без члена $\frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2$ линейно и, следовательно, описывает поведение слабых звуковых волн, не взаимодействующих друг с другом. Если принять во внимание, что для солитонов $|E|^2/n = M^2 - 1$, можно ожидать, что их взаимодействие будет тем более походить на взаимодействие звуковых цугов /при той же величине E_m /, чем ближе их числа Маха к единице, $M \rightarrow 1$. Поэтому можно ожидать, что область слипания двух одинаковых солитонов, движущихся навстречу друг другу, на плоскости E_m, M определится из условия, что их энергия в лабораторной системе координат не положительна, т.е. $S \leq 0$, или $M < 0,45$, при $E_m \gg 1$. Проведенное нами численное исследование несколько расширяет область слипания, а именно: $M < M_{cr} = 0,58$ /при $|E_m|^2 \gg 1$ /, т.е. возникает коэффициент $M_{cr}/M_* = 1,30$; это означает, что даже при $S > 0$, но $M < M_{cr}$ в.ч. поле в солитонах оказывает существенное влияние на их взаимодействие.

Область слипания двух одинаковых солитонов на плоскости E_m, M , определенная с помощью серии численных экспериментов, представлена на рис. 2.

Отметим, что при $E_m \leq 1$ происходит слипание солитонов при $M > M_{cr}$. Дело в том, что в процессе формиро-

*В противном случае E_m становится мнимым.

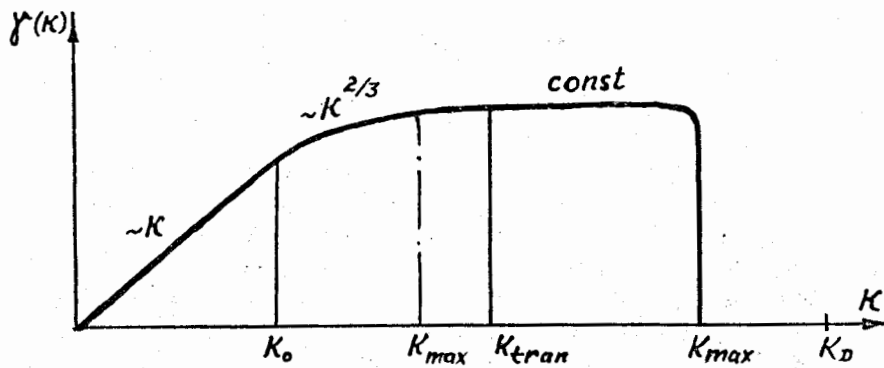


Рис. 1. Инкремент аperiodической неустойчивости γ_{ap} как функция волнового числа k .

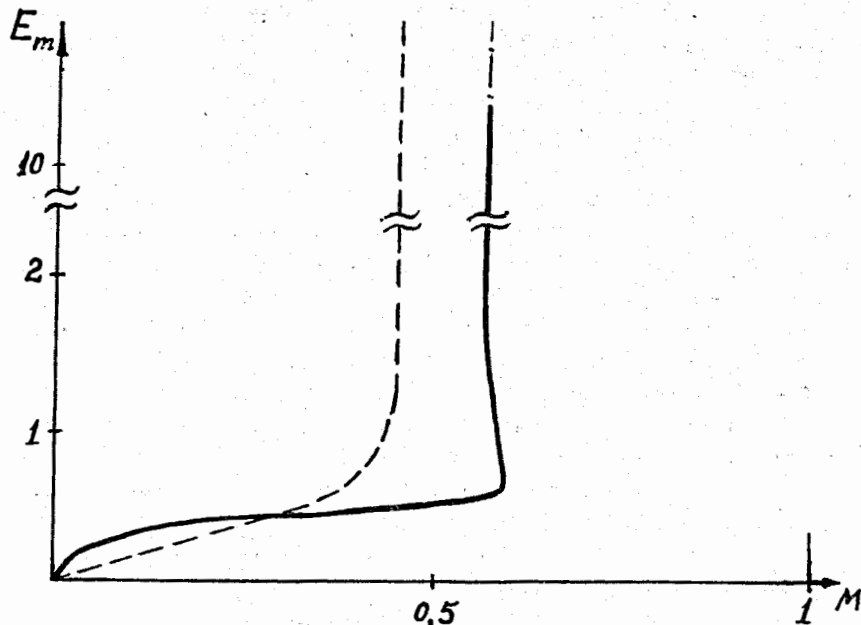


Рис. 2. Область слипания двух одинаковых солитонов на плоскости E_m, M , полученная с помощью серии численных экспериментов. Пунктирная линия соответствует зависимости $S(E_m, M) = 0$.

вания вновь образующегося солитона происходит отщепление от него околосзвуковых солитонов меньшей амплитуды и уносимая при этом дополнительная энергия приводит к расширению области слипания. При $E_m^2 \ll 1$, кривая слипания проходит выше линии $S=0$. Для выяснения зависимости $E_m(M)$ при $E_m^2, M \ll 1$ приведем некоторые оценки. Для слипания двух солитонов должна излучиться в виде s -волн энергия $\Delta S = 2S - S_c$, причем $E_c = 2E_m \sqrt{1-M^2}$. Из формулы /2.5/ получим при $M \ll 1$

$$\Delta S = \frac{6\sqrt{2}}{3} E_m^3 - \sqrt{2} M^2 E_m, \quad /2.8/$$

т.е. с единицы длины должна быть излучена энергия $(\Delta S / \Delta x) \sim \kappa \cdot (E_m^4 - \frac{M^2}{2} E_m^2)$, поскольку $\Delta x \sim (1/E_m)$. Мощность

излучения s -волн можно оценить, используя второе из уравнений /2.1/:

$$\frac{\partial}{\partial t} n^2 \sim E_m^4 t_{dec}^{-1}, \quad /2.9/$$

Время генерации s -волн оценивается из следующих соображений: процесс взаимодействия /неустойчивости/ вначале носит аperiodический характер, а инкремент его /3,7/ есть $\gamma_{ap} \approx \sqrt{W/nT}$, т.е. время развития аperiodической неустойчивости

$$\tau_{ap} \sim \frac{1}{E_m} \quad /2.10/$$

по истечении $t \approx \tau_{ap}$ аperiodическая неустойчивость насыщается /возможно, за счет нелинейного сдвига частот/ и переходит в распадную /что хорошо видно на рис. 3; см. также /7,8/ /, время развития которой есть

$$\tau_{dec} \sim \frac{1}{E_m^2}. \quad /2.11/$$

Кроме этих двух времен, характеризующих взаимодействие солитонов, есть еще обычное кинематическое время прохождения их друг через друга, которое оценивается следующим образом:

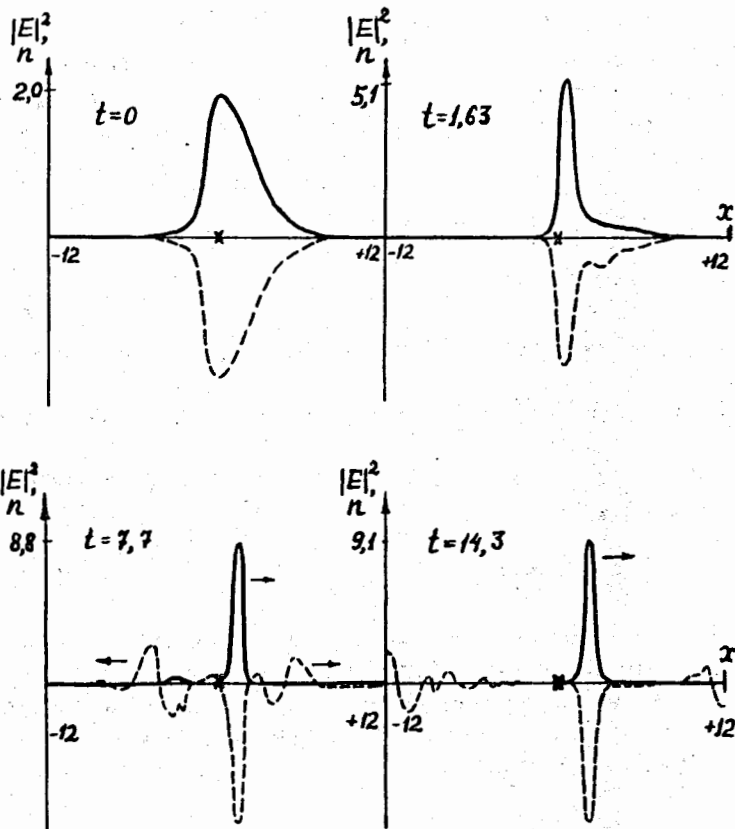


Рис. 3. Формирование самосогласованного пакета при несимметричном начальном распределении $|E(x)|^2$. До момента $t = 2$ неустойчивость носит чисто аперриодический характер, а затем переходит в распадную.

$$\tau_{dr} \approx \frac{\Delta x}{v_g} \approx \frac{1}{E_m M} \quad /2.12/$$

В силу принятого предположения $E_m \ll 1$, имеем

$$\tau_{ap} \ll \tau_{dec} \\ \text{и, поскольку } M < 1/\sqrt{5}, \\ \tau_{ap} \ll \tau_{dr}.$$

Следовательно, основная продолжительность взаимодействия определяется одним из двух времен: τ_{dec} или τ_{dr} . Если $\tau_{dec} < \tau_{dr}$, то неустойчивость успевает развиваться, при $\tau_{dec} > \tau_{dr}$ солитоны проходят друг через друга, практически не излучая. Итак, условие, при котором возможно отщепление s-волн, есть

$$\tau_{dec} < \tau_{dr} \quad /2.13/$$

или

$$/ \kappa - \text{численный коэффициент порядка единицы}/ \\ E_m > \kappa M. \quad /2.14/$$

Время излучения $\tau_{rad} = \min\{\tau_{dr}, \tau_{dec}\}$, поэтому, используя /2.9/ и /2.11/, легко получить, что за время взаимодействия излучится энергия

$$\tau_{rad} \frac{\partial n^2}{\partial t} \approx E_m^4 \tau_{rad} / \tau_{dec}.$$

Эта величина должна быть больше $\Delta S / \Delta x$, что при малых E_m и M совпадает с /2.14/, поэтому область слияния солитонов определяется условием /2.14/.

Из рис. 2 видно, что кривая слияния выходит из начала координат и имеет вид $E_m \approx \kappa M$, подтверждая приведенные выше оценки.

Это означает, что даже при весьма малых амплитудах в.ч. полей и малых скоростях солитонов $M \ll 1$, существенное влияние на их взаимодействие оказывают согласованные низкочастотные движения плазмы. Еще больше последние влияют на формирование солитонов, даже при $E_m \ll 1$ и $M < 1/\sqrt{5}$, так что фактически область применимости адиабатического приближения исчезает. Используя разложение Фурье, легко показать, что выбрасывание члена $(\partial^2 n / \partial t^2)$ во втором уравнении /2.1/ приводит

к неправильному описанию динамики аперриодической /не говоря уже о распадной/ неустойчивости.

В заключение этого раздела остановимся на формировании солитона из несимметричных начальных пакетов ℓ -волн. Динамика этого процесса показана на рис. 3. Первоначально неподвижный ($K_0=0$) несимметричный пакет в результате развития сначала аперриодической, а затем распадной неустойчивости становится симметричным и начинает двигаться. Движение солитона является следствием излучения s -волн, уносящих в противоположные стороны различный импульс и действующих на солитон подобно реактивной струе. Подчеркнем, что этот процесс был бы невозможен в квазистатическом приближении.

§3. Граничные условия в одномерном численном моделировании

В связи с решающей ролью, которую играет взаимодействие солитонов в концепции сильной ленгмюровской турбулентности, представляется целесообразным обсудить влияние граничных условий на это взаимодействие.

Уже в работе^{/6/} было показано, что постановка граничных условий весьма существенна при математическом моделировании взаимодействия солитонов. Так, если поместить взаимодействующие солитоны симметрично в отражающий звуковые волны ящик /условие $n(-L)=n(L)=0$ /, то образовавшийся в результате слияния солитон будет снова разбит на два расходящихся солитона отраженными от стенок s -волнами. Наличие асимметрии значительно усложняет картину.

При проведении одномерного численного моделирования часто используют периодические граничные условия^{/9/}. Встает вопрос, насколько адекватно такие условия могут описывать рассмотренную выше картину развития ленгмюровской турбулентности? Рассмотрим его на простом примере "элементарных" актов образования и взаимодействия солитонов. Постановка периодических граничных условий приводит к тому, что, дойдя до границы, s -волны возвращаются в систему с другой стороны и разваливают образовавшийся в результате неус-

тойчивости или слияния солитон, т.е. взаимодействие становится как бы обратимым через промежуток времени $t_0 = 2L/v_s$, где $2L$ - длина периода. Это означает, что постановка периодических граничных условий превращает рассматриваемую здесь систему, в которой развивается ℓ -турбулентность, в систему с отрицательной обратной связью.

На рис. 4 и 5 представлены, соответственно, картины образования и взаимодействия солитонов, полученные с помощью численного решения уравнений /2.1/ на ЭВМ CDC -6200 при периодических граничных условиях. Рис.4 соответствует развитию квазираспадной неустойчивости с начальным пакетом $E(x,0) = E_0(1 + a \cos \Delta k x) \ell^{ikx}$, ($E_0 = 0,5$, $a = 0,05$, $\Delta k = \frac{\pi}{6}$, $k=0$), а рис. 5 - взаимодействию двух одинаковых солитонов с $E_m = 4$ и $M = 0,5$.

Таким образом, в модельных задачах с периодическими граничными условиями не может произойти установления стационарных нелинейных волн, а их взаимодействие может быть обратимо, если не вводить затухания s -волн.

Последний вывод, по-видимому, носит более общий характер и справедлив при периодической структуре начальных возмущений и в неоднородной геометрии.

Это означает, что либо исследуемая модель должна включать затухание s -волн, либо описываемые процессы должны развиваться за времена, меньшие времени упомянутой обратимости.

Мы считаем, что при моделировании динамики формирования и взаимодействия солитонов необходимо ставить "волновые" граничные условия, описывающие прохождение s -волн и сгустков в.ч. поля через рассматриваемую границу.

Основные результаты

1. Показано, что образование и взаимодействие ленгмюровских солитонов, равно как и динамика аперриодической неустойчивости, не могут изучаться в рамках адиабатического приближения, так как существенную роль в этих процессах играют низкочастотные движения

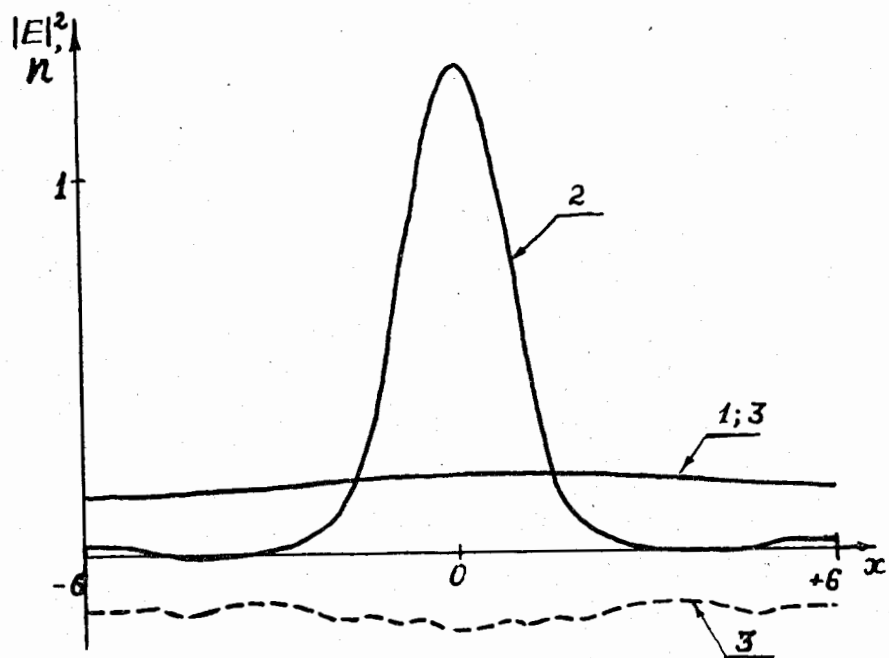


Рис. 4. Развитие квазираспадной неустойчивости при периодических начальных условиях. Сплошные линии соответствуют функции $E^2(x, t) \frac{2L_1}{v_s}$ для трех моментов времени $t_1 = 0$, $t_2 = t_{form}$, $t_3 = t_0 = \frac{2L_1}{v_s}$, пунктирная линия относится к функции $n(x, t_3)$.

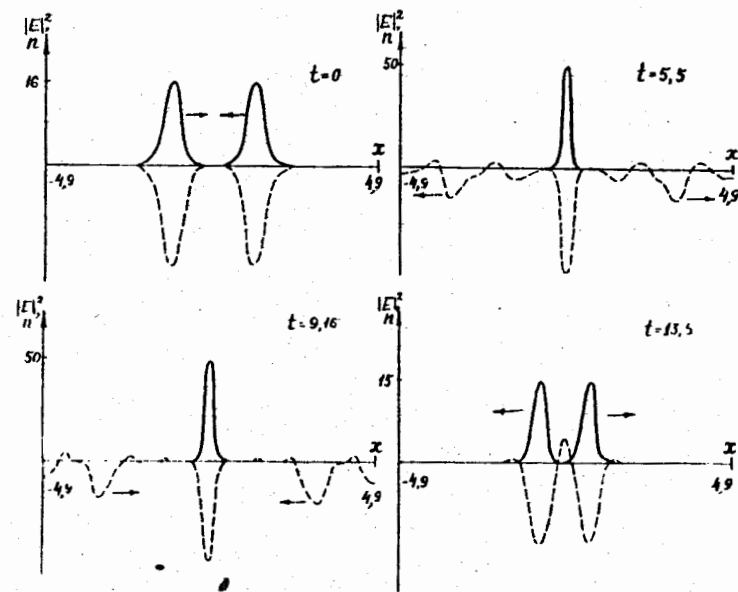


Рис. 5. Взаимодействие двух одинаковых солитонов при периодических граничных условиях.

плазмы.

2. Определена область слияния двух одинаковых движущихся навстречу друг другу ленгмюровских солитонов на плоскости E_m , M . Показано, что при малых $E_m \ll 1$ область слияния представляет собой сектор $E_m > \kappa M$ с центром в начале координат.

При увеличении E_m , начиная с величины $E_m \approx 1$, численное исследование расширяет область слияния, по сравнению с той, которая получается из условия $S < 0$.

Так, при $E_m \geq 1$, имеется обрезание области слияния границей $M \leq M_{cr} = 0,58$, что, возможно, связано с линейным характером описания звуковых импульсов исходной системой. Вместе с тем, при $M > M_* = 1/\sqrt{5}$ основная энергия заключена в низкочастотных колебаниях, поэтому при взаимодействии и формировании быстрых /околозвуковых/ солитонов с амплитудой $E_m \geq 1$ ($M > M_*$) второе уравнение системы /2.1/ должно быть заменено некоторым симметричным аналогом уравнения Кортевега-де-Вриза с правой частью, скажем, неоднородным /нелинейным/ уравнением Буссинеса /10, 11/

$$\Phi_{xx} - \Phi_{tt} + \alpha(\Phi^2)_{xx} + \beta\Phi_{xxxx} = F(|E|^2),$$

где $F(|E|^2)$ - линейный оператор, действующий на $|E|^2$. При таком подходе можно ожидать появления новых интересных решений.

3. Показано на примере формирования и взаимодействия солитонов, что периодические граничные условия при математическом моделировании нужно использовать с определенной осторожностью, так как постановка таких условий может превратить исследуемую систему в систему с отрицательной обратной связью, со всеми вытекающими отсюда последствиями. Предложены близкие к реальности волновые граничные условия.

4. Предлагается наглядная физическая интерпретация образования и взаимодействия ленгмюровских солитонов на языке взаимодействия квазичастиц /плазмонов/. Становятся понятными два этапа, через которые проходит взаимодействие. Первый, - быстрый этап, связан со слиянием двух компаунд-частиц /солитонов/ в одну, находящуюся в возбужденном состоянии; на языке теории плаз-

мы этот этап обычно называют аперiodической неустойчивостью. Второй этап - более медленный - заключается в высвечивании избытка энергии /"дефекта" массы/ в виде звуковых волн /аналогично тому, как это имеет место в ядерной физике, где могут высвечиваться γ -кванты или нейтрино/, при этом конечная компаунд-частица переходит в основное состояние. Этот этап соответствует обычной распадной неустойчивости типа $\ell \rightarrow \ell' + s$ в плазме.

Продолжительность первого этапа есть обратный инкремент аперiodической неустойчивости, в зависимости от параметров пропорциональной либо $|E|_m^{-2/3}$, либо $|E|_m^{-1}$; время второго этапа можно оценить как $\tau_{dec} \sim |E|_m^{-2}$.

Описанная картина соответствует насыщению аперiodической неустойчивости и переходу ее в распадную, обусуждаемому для ℓ -волн в работе /8/ и для t -волн - в работе /12/. Авторы выражают свою признательность Е.П.Жидкову и М.Г.Мещерякову за стимулирующие дискуссии.

Литература

1. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков. ДАН СССР, 159, 767 /1967/.
2. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, 1745 /1972/.
3. Kh.O.Abdulloev, I.L.Bogolubskii, V.G.Makhankov. Preprint JINR, E9-7717, Dubna, Phys.Lett 48A, 161, 1974.
4. В.Н.Цытович. Теория слаботурбулентной плазмы. М., Атомиздат, 1971.
5. A.S.Kingsep, L.I.Rudakov, R.N.Sudan. Phys.Rev.Lett., 31, 1482 (1973).
6. Л.М.Дегтярев, В.Г.Маханьков, Л.И.Рудаков. Препринт ИПМ, 18, 1974.
7. В.Д.Шапиро. ЖЭТФ, 66, 945, 1974.
8. В.Н.Цытович, Л.Ф.Фальк. "Нелинейное описание квазираспадных взаимодействий волн". Препринт ФИАН 188, 1973.
9. Yu.S.Sigov, Yu.V.Khodirev. In Proceedings of 6 EPPC, p. 579, Moscow, 1973.
10. J.Boussinesq, J.Math. Pures, Appl., ser.2, 17, p.55-108, 1872.
11. A.C.Scott, F.Y.Chu, D.W.McLaughlin. Proc. IEEE, 61, 1443, 1973.
12. K.Nishikawa, Y.C.Lee, P.K.Kaw. Phys. Fluids, 16, 1380, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 мая 1974 года.