

С 353а
Б-742

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



19/8-

3252/2-74

Р9 - 7970

И.Л.Боголюбский

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОРМОЖЕНИЯ
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА
В ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЕ

1974

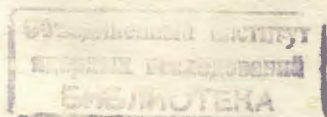
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

Р9 - 7970

И.Л.Боголюбский

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОРМОЖЕНИЯ
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА
В ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЕ**

Направлено в ЖТФ



Боголюбский И.Л.

P9 - 7970

Моделирование торможения релятивистского электронного пучка
в плотной плазме

Аналитически и численно, методом укрупненных частиц, моделируется торможение релятивистского электронного пучка в плотной плазме. Изучены автомодельные решения. Показано, что при эволюции сгустков возникают многоскоростные движения.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1974

Bogolubskii I.L.

P9 - 7970

Modeling of Deceleration of Relativistic
Electron Beam in Dense Plasma

Deceleration of relativistic electron beam in dense plasma is studied analytically and via computer simulations. The self-similarity solutions are obtained and examined. The factors are pointed out which can lead to multispeed longitudinal motions in short duration beams.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

© 1974 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

ВВЕДЕНИЕ

В связи с предложенными в последнее время многочисленными применениями релятивистских электронных пучков возникает необходимость изучения их инжекции и транспортировки.

Для сильноточных релятивистских электронных пучков с величиной тока больше критического, $I_{кр} = \frac{m_0 c^3}{e} \beta \gamma = 1.7 \cdot 10^4 \beta \gamma$ [а], ларморовский радиус электронов пучка в собственном магнитном поле меньше радиуса пучка, что может привести к невозможности транспортировки таких пучков в вакууме.

Указанной проблемы не возникает, если пучок проходит через плотную плазму /или газ, ионизируемый при прохождении пучка/ ^{1,2}. Изучение динамики торможения сильноточных пучков в плотной плазме важно для выяснения возможности их транспортировки на большие расстояния /например, при замкнутом движении в коллективных ускорителях/.

Эта задача весьма актуальна также в связи с идеей использования сгустков релятивистских электронов для зажигания реакции УТС ^{3,4}. При этом наибольший интерес представляют вопросы инжекции и транспортировки в плотной плазме на короткие расстояния наносекундных сгустков релятивистских электронов.

Как известно ^{1,2}, при инжекции в плотную плазму релятивистского пучка электронов с характерным временем нарастания тока τ , меньшим, чем скинновое $4\pi\sigma\tau^2/c^2$ / r_0 - радиус пучка, σ - проводимость плазмы/, вследствие закона индукции Фарадея в плазме возникает об-

ратный ток $j' = -j$. Из-за диссипации этого тока возникает результирующее магнитное поле H_ϕ , фокусирующее пучок и приводящее к существованию равновесных в радиальном направлении его состояний. Диссипация обратного тока в плазме с конечной проводимостью σ /которая может быть обусловлена как парными столкновениями σ_{ei} , так и коллективными эффектами^{/3/} /, приводит к появлению поля $E_z = n'e_s/\sigma$, тормозящего инжектируемые электроны пучка / n' - концентрация электронов в пучке/.

Изучению этого механизма торможения электронов пучка в плотной плазме / $n'/n \ll 1$, n - концентрация электронов плазмы/ для случая $\sigma = \sigma_{ei} = \sigma_0 (T/T_0)^{3/2}$ посвящена данная работа /торможением электронов пучка вследствие их парных столкновений с ионами плазмы будем пренебрегать/.

§1. Аналитическое исследование динамики торможения пучка

Рассмотрим одномерную задачу, когда все величины зависят от координаты x вдоль направления инжекции и не зависят от радиуса r . Такая безграничная по r задача имеет реальный смысл, если $\int_0^r e_s H_\phi dr/c$ изменяется, в основном, вблизи радиальной границы пучка, и внутри магнитного канала, где поле H_ϕ мало, все параметры постоянны по радиусу.

При прохождении пучка по плазме диссипация возникающего обратного тока приводит к джоулеву нагреву плазмы и изменению ее проводимости по закону

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{5}{2} \int_0^t \frac{j'^2 dt'}{\sigma_0 n_0 T_0} \right)^{3/5} \quad /1/$$

σ_0 , n_0 , T_0 - проводимость, концентрация и температура плазмы до вхождения в нее пучка.

Для получения простых аналитических решений будем считать массу электронов пучка m_e постоянной. Токовую скорость электронов пучка примем равной c . Рассмотрим сначала задачу в рамках "холодной" гидро-

динамики, пренебрегая начальным разбросом скоростей электронов и предполагая, что он не возникает в дальнейшем. Условия, при которых это предположение справедливо, будут получены ниже.

При сделанных предположениях торможение инжектируемого сгустка описывается уравнениями движения и неразрывности:

$$m \frac{dv}{dt} = m \left(\frac{dv}{dt} + v \frac{dv}{dx} \right) = -eE = -ne^2 c / \sigma$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} = 0. \quad /2/$$

Здесь и в дальнейшем n - концентрация электронов сгустка, v - скорость электронов в системе координат, где неподвижен "хвост" сгустка /"хвост" сгустка не испытывает действия тормозящего электрического поля, т.к. $E_z \sim n$ /.

Перейдем в уравнениях /2/ к лагранжевым переменным: $dz = n dx$, так что $z_{\max} = \int_0^L n dx = N$ - полное число электронов сгустка длины L на единицу площади. Введем безразмерные переменные:

$$\bar{t} = t/\tau, \quad \bar{v} = v/c, \quad \bar{n} = \frac{L}{N} n, \quad \bar{z} = z/N, \quad (L = c\tau).$$

Уравнения переписутся в виде /черта в дальнейшем опускается/:

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \bar{t}} + \bar{n}^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = -A \bar{n} \left(1 + B \int_{\bar{z}}^1 \bar{n} d\bar{z} \right)^{-3/5} \quad /3/$$

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + B \int_{\bar{z}}^1 \bar{n} d\bar{z} \right)^{3/5}.$$

Здесь введены обозначения безразмерных параметров:

$$A = \frac{e^2 N}{m \sigma_0 c}, \quad B = \frac{5}{2} \frac{e^2 N^2}{\sigma_0 n_0 T_0 \tau}.$$

В общем случае картина течения определяется значениями A, B , формой сгустка $n(x)$ и тепловым разбросом в момент инжекции.

Исследуем сначала случай $B=0$, когда прогресса плазмы не происходит. Будем искать решение в разделяющихся переменных:

$$v = V(z) \nu(t), \quad n = N(z) \eta(t).$$

Тогда из системы /3/ получим:

$$N \frac{dV}{dz} = - \frac{1}{\eta^2 \nu} \frac{d\eta}{dt} = a_1$$

$$\frac{N}{V} = - \frac{1}{A\eta} \frac{d\nu}{dt} = a_2, \quad /4/$$

где a_1 и a_2 - константы.

Решение /3/ при малых t в этом случае примет вид:

$$n = 2(1 + \text{sign}(dn/dz) At^2) \sqrt{|z|}$$

$$v = -2 \sqrt{|z|} t. \quad /5/$$

Такая картина течения реализуется, например, когда начальный сгусток имеет форму треугольника $n(t=0) =$

$$= \frac{2N}{L} \cdot \frac{x}{L}, \quad \text{т.е. ток пучка растет или падает по линей-$$

ному закону.

Решение /5/ справедливо, пока $At^2 \ll 1$; но при этом концентрация меняется мало и смещение частицы, имеющей в начальный момент координату x_0 , равно

$$s = \int_0^t v dt = -At^2 \sqrt{z} \ll \frac{x_0}{L}, \text{ т.е. деформация сгустка только}$$

началась. Очевидно, ее характерное время $t \sim 1/\sqrt{A}$.

Если форма сгустка $n(x)$ такова, что пересечения траекторий не происходит, то деформацию сгустка в про-

цессе его торможения можно проследить, приближенно разбив его на участки с постоянной производной dn/dx . Для каждого такого участка справедливо автомодельное решение системы /4/.

В качестве примера рассмотрим сгусток в форме равнобедренного треугольника, "склеенного" из двух прямоугольных треугольников.

В процессе торможения передний треугольник будет растягиваться, а задний - сжиматься; оба они будут оставаться треугольниками. Поскольку плотность в переднем треугольнике уменьшается по сравнению с начальной, а в заднем - увеличивается, то очевидно, что торможение заднего треугольника будет сильнее и, таким образом, по линии "склейки" произойдет разрыв.

Для реальных сгустков это означает, что существует тенденция к понижению плотности в тех местах начального сгустка, где резко уменьшается dn/dx . В описанном выше примере тепловое движение будет, очевидно, "замазывать" образующуюся щель и, таким образом, разрыва сгустка на два в действительности не происходит даже в случае сгустка, имеющего излом $n(x)$.

Легко понять, что при $B=0$ необходимое и достаточное условие пересечения траекторий, которое нужно для применимости "холодной" гидродинамики, может быть сформулировано как требование невозрастания dn/dx .

Рассмотрим хвостовой треугольник сгустка ($\frac{dn}{dx} > 0$). Введем величину $y = \eta(0)/\eta(t)$ /обратное уплотнение/.

Из системы /4/ получим

$$y \frac{d^2 y}{dt^2} = -2A \quad /6/$$

и

$$v = \sqrt{z} \frac{dy}{dt} = \frac{x_0}{L} \frac{dy}{dt}. \quad /7/$$

"Решение" уравнения /6/ $\frac{dy}{dt} = -\sqrt{-4A \ln y}$ показывает,

что при произвольно малом заданном y скорость v пу-

тем выбора достаточно малого значения параметра A может быть сделана сколь угодно малой.

Понятно, что

$$s = \sqrt{z} (y(t) - y(0)) = \frac{x_0}{L} (y(t) - 1) \rightarrow -\frac{x_0}{L} \quad \text{при } y(t) \rightarrow 0$$

Условие $|v| \ll 1$, очевидно, эквивалентно условию $\sqrt{-4A \ln y} \ll 1$, которое при $\sqrt{\ln y} \sim 1$ дает $\sqrt{A} \ll 1$ /т.е. время стягивания до заданной плотности $t \sim 1/\sqrt{A}$ много больше времени инжекции/.

Стягивание сгустка к его концу с потерей энергии порядка начальной возможно и за время порядка времени инжекции ($t \sim 1$), но оно не описывается полученным решением, поскольку токовая скорость была принята равной скорости сгустка.

Если относительная скорость не мала, уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -A n (1 + v)$$

и переменные не разделяются. Поэтому даже в идеализированной постановке /треугольный профиль сгустка, отсутствие теплового разброса/ стягивания в плоскость не происходит /т.к. решение выходит за рамки применимости $|v| \ll 1$ /.

Отметим, что при торможении участка сгустка постоянной плотности он не испытывает деформации /поскольку все частицы тормозятся одинаково/.

Рассмотрим кратко случай $B \neq 0$. При мощном нагреве ($B \gg 1$) можно пренебречь единицей в формуле /1/ /такое пренебрежение неправомерно для "головы" сгустка/ и пытаться искать решение в разделяющихся переменных. Из условия разделения получим

$$N \frac{d}{dz} \left(N \left(\int_z^1 N dz \right)^{-3/5} \right) = a_1 a_2$$

$$V(z) = \frac{1}{a_2} N \left(\int_z^1 N dz \right)^{-3/5}$$

и для временных сомножителей

$$v = -\frac{1}{a_1} \frac{dy}{dt}, \quad y^{2/5} \frac{d^2 y}{dt^2} = -A B a_1 a_2. \quad /9/$$

Прогрев плазмы проходящим по ней пучком приводит к ослаблению торможения "задних" электронов, по сравнению с "передними", что может привести к пересечению траекторий электронов тех сгустков, у которых при $B = 0$ теплового разброса не возникало.

Остановимся кратко на случае $\gamma \neq 1$. Из формулы

$$\frac{d(\gamma v)}{dv} = \gamma^3 \quad \text{при условии } \frac{\gamma - \gamma_c}{\gamma_c} \ll 1 \quad \text{получим}$$

$\gamma v - \gamma_c v_c = \gamma_c^3 (v - v_c)$ ($\gamma_c, v_c = c$ - релятивистский фактор и скорость частиц конца сгустка/.

Переходя от переменных x, t к переменным $x' = x - v_c t$, $t' = t$, вводим $v_{\text{отн.}} = v - v_c$ и получаем для $v_{\text{отн.}}$ систему, отличающуюся от исследованной выше /2/ лишь множителем γ_c^{-3} в правой части уравнения движения.

При $\gamma \gg 1$ поддается аналитическому исследованию только режим медленного стягивания /когда $\Delta\gamma/\gamma$ мало/, т.к.

$$v - v_c = \frac{\gamma v - \gamma_c v_c}{\gamma_c^3} = \frac{\gamma - \gamma_c}{\gamma_c} \cdot \frac{1}{\gamma_c^2} \ll \frac{c}{\gamma_c^2}.$$

Такое адиабатическое торможение приводит к малой относительной потере энергии ($\Delta\gamma/\gamma \ll 1$); деформация сгустка происходит при этом за времена $t \sim c/v_{\text{отн.}} \gg \gamma_c$.

Условие $t \sim \frac{1}{\sqrt{A(\gamma_c)}} \gg \gamma_c^2$ можно переписать в виде

$$(A(\gamma_c) = A/\gamma_c^3) : \sqrt{A} \ll 1/\sqrt{\gamma_c}.$$

§2. Численное моделирование на ЭВМ

Аналитически удается исследовать лишь частные, хотя и важные, случаи торможения сгустков. Для изучения динамики торможения сгустка в общем случае был применен метод моделирования с помощью укрупненных частиц.

При этом отрезок, занимаемый сгустком, делился на m отрезков $/m=100$ в большинстве расчетов/ и в каждом отрезке в начальный момент помещалось k/m частиц ($k \gg m$, $k=10^3 \div 4 \cdot 10^4$). Изменение $n(x)$ моделировалось изменением "заряда" укрупненных частиц - "палок". В "палки" были естественным образом объединены частицы, имеющие в начальный момент одинаковые координаты и скорости /такие "палки" оказываются весьма удобными для графического изображения деформации сгустка/. Для каждой "палки" решалось уравнение движения; плотность, входящая в правую часть уравнения движения, вычислялась суммированием в отрезке разбиения.

При формальном ведении счета могут возникать нефизические эффекты, связанные с неправильным подсчетом плотности в областях больших градиентов и разрывов плотности; в конкретных задачах эти трудности необходимо обходить, используя, в частности, аналитические решения.

С помощью численного моделирования исследована динамика сгустков при $A=0,01$, $B=1; 10$ /рассчитывался участок сгустка с линейно убывающей концентрацией - хвостовой треугольник/. На рис. 1 изображены траектории частиц; видно, что с некоторого момента начинается пересечение траекторий, хотя в случае $B=0$ оно не возникает.

На ЭВМ моделировались также сгустки с начальным тепловым разбросом, имеющие форму равностороннего треугольника /для этого в начальный момент совмещались два одинаковых сгустка/ с "мечеными частицами", имеющие относительную скорость $\Delta v = 0.01$.

Проведенные расчеты подтверждают аналитические выводы, сделанные для этого случая в §1. Тепловой разброс оставался порядка начального ($\Delta v = 0.01 \div 0.03$).

Была рассмотрена динамика "холодного" сгустка гауссовской формы. Эволюция такого сгустка изображена на рис. 2. Как легко понять из рассуждений §1, в том месте сгустка, где при $t=0$ был перегиб $n(x)$

$(\frac{d^2 n}{dx^2}(t=0)=0)$, начинается сначала сгущение частиц,

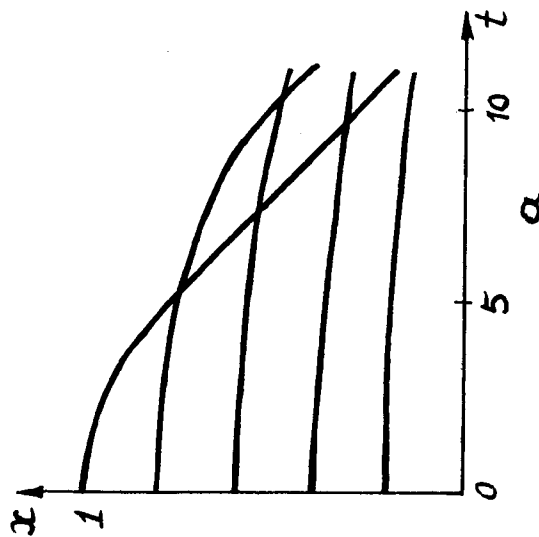
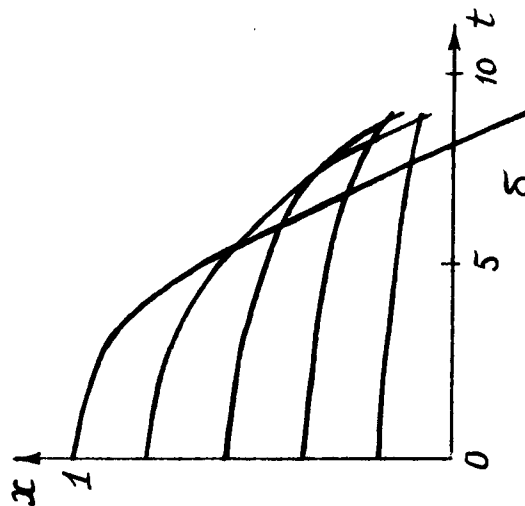


Рис. 1. Траектории частиц "хвостового" треугольника при $A=0,01$. а/ $B=10$; б/ $B=1$.

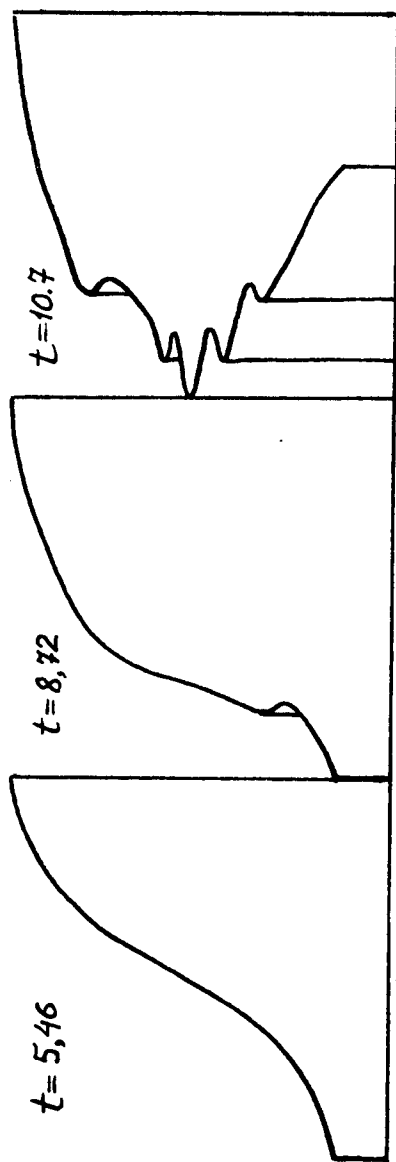


Рис. 2. Деформация хвостовой части сгустка гауссовской формы при $A = 0.01$, $B = 0$.

а затем пересечение траекторий. Вперед вырывается "язык", в свою очередь, имеющий "язычковую" структуру, - происходит "прощелкивание" сгустка.

Следует отметить, что возникающее пересечение траекторий приведет к возбуждению двухпотоковой пучковой неустойчивости.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Л.И.Рудакову за руководство выполнением данной работой, Е.П.Жидкову и В.Г.Маханькову за обсуждение результатов.

Литература

1. W.H.Bennett, T.G.Roberts. *Plasma Physics*, 10, 381 (1968).
2. А.А.Иванов, Л.И.Рудаков. *ЖЭТФ*, 58, 1332 /1970/.
3. Л.И.Рудаков. *ЖЭТФ*, 59, 2091 /1970/.
4. F.Winterberg. *Phys.Rev.*, 179, 212 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
22 мая 1974 года.