ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р9 - 7786

Ю.И.Алексахин, Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн

ЭКРАНИРОВАНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ТОНКИМИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ ПЛАСТИНАМИ

1974

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

P9 - 7786

Ю.И.Алексахин, Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн

ЭКРАНИРОВАНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ТОНКИМИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ ПЛАСТИНАМИ

Направлено в ЖТФ

В последних экспериментах по коллективному методу ускорения [1] электронные кольца формируются внутри камер с тонкими проводящими стенками [2,3].

Переменные во времени и пространственно неоднородные магнитные поля, сжимающие кольца, создаются токовыми витками, расположенными снаружи камер. Толщина стенок выбирается много меньшей скиновой. Тем не менее эффекты экранирования могут существенно влиять на сжатие колец. Кроме экранированных внешних магнитных полей, для расчетов по сжатию колец требуется вычислить квазистационарные собственные поля, а также решить задачу о релаксации токов в стенках, возникающих при инжекции электронов в камеру.

О круге задач в физике плазмы и ускорителей, где необходим учет экранировки квазистационарных магнитных полей тонкими металлическими камерами, можно судить по литературе, приведенной в [4].

Известные решения задач об экранировании ограничиваются простыми геометриями экранов и магнитных полей /проникновение однородного периодического поля в полупространство, внутрь шара и цилиндра [5,6], через бесконечную тонкую плоскую пластинку; экранирование однородного поля тонким диском [6].

Проникновение однородных магнитных полей через две плоскопараллельные пластинки в полый цилиндр и тороидальную камеру рассматривалось в работе [4].

В случае малости отношения рассеянного магнитного потока к падающему задача об экранировании решается методом последовательных приближений [6,7,8]. Ниже будет показано, что оценочные результаты, полученные таким образом, пригодны лишь для установившихся гармонических колебаний поля, и будут найдены границы применимости метода.

В данной работе выясняются основные особенности проникновения магнитного поля через тонкие экраны и строится алгоритм, позволяющий с использованием ЭВМ достаточно быстро находить значение экранированного поля в произвольной точке пространства и времени, зная магнитное поле в свободном пространстве. Развитый метод пригоден для решения задачи о релаксации токов в экранах и легко обобщается на случай экранирования электрических полей.

1. Постановка задачи и метод решения

Ограничимся случаем азимутально-симметричных полей и азимутально-симметричных экранов с проводимостью σ и толщиной h. В отсутствие экранов в цилиндрической системе координат поля задаются одним компонентом вектор-потенциала $A_{\theta\,\text{вн}}(r,z,t)$.

Пренебрегая толщиной экранов, их можно представить в азимутальном сечении в виде системы произвольных /возможно несвязных/ контуров $L_1, L_2 ..., L_N$, как показано на рис. 1. Если A_θ - значение потенциала с уче-

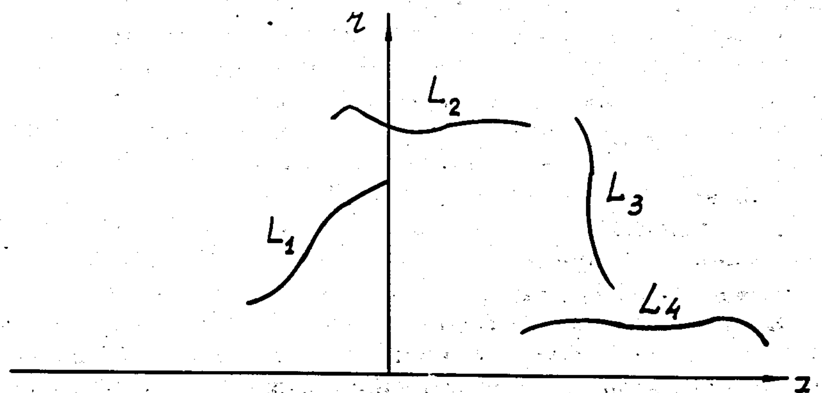

Рис. 1. Азимутальное сечение экранов.

том экранированных полей в области, занимаемой экранами, то плотность тока в экранах

$$j_\theta = -\frac{\sigma}{c}\frac{\partial A_\theta}{\partial t}, \qquad /1/$$

где c - скорость света.

Положим, что выполняется условие квазистационарности

$$(cT)^2 \gg L_0^2, \qquad /2/$$

где T - характерное время изменения A_θ, а L_0 - суммарная длина контуров L_i. Тогда для нахождения потенциала, связанного с токами /1/, можно пользоваться стационарной функцией Грина * и для значений $A_\theta^{(i)}$ в области i -го экрана ($1 \le i \le N$) получаем систему интегро-дифференциальных уравнений

$$A_\theta^{(i)} = A_{\theta\,\text{вн}}^{(i)} - \frac{\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{N}\int_{S_j} A_\theta^{(j)} K_{ij}(r_i, z_i, r_j', z_j') r_j' dr_j' dz_j', \qquad /3/$$

где K_{ij} - функция Грина для азимутального компонента векторного уравнения Лапласа, проинтегрированная по углу. Используя малость изменения $A\theta$ по толщине пластины /толщина много меньше скиновой/ и переходя к безразмерным переменным $u_j = \frac{r_j}{L_0}$, $v_j = \frac{z_j}{L_0}$, преобразуем уравнение /3/ к виду

* При этом мы не учитываем переходных процессов, возникающих при включении магнитного поля в свободном пространстве, хотя в дальнейшем будем считать

$$A_{\theta\,\text{вн}} = \begin{cases} 0, & t < 0. \\ A_{\theta\,\text{вн}}(t) & t > 0 \end{cases}$$

$$A_\theta^{(i)} = A_{\theta_{BH}}^{(i)} - \frac{\sigma h L_0}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{N} \int_{L_j} A_\theta^{(j)}(u_j', v_j') \times$$

$$\times K_{ij}(u_i, u_j', v_i, v_j') \, u_j' \, d\ell_j' \quad . \qquad /4/$$

Здесь $A_\theta^{(i)}$ - среднее значение A_θ по толщине h, интегрирование проводится по контурам L_j с элементом длины $d\ell_j = \sqrt{du_j^2 + dv_j^2}$, а функция K_{ij} есть

$$K_{ij} = \frac{4}{\sqrt{u_i u_j'}} \left\{ \frac{1}{k_1} \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{2}\right) K(k_1) - E(k_1) \right] \right\}, \qquad /5/$$

где K(k) и E(k) - полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

$$k_1^2 = \frac{4u_i u_j'}{(u_i + u_j')^2 + (v_i - v_j')^2} . \qquad /6/$$

Если перейти от потенциалов A_θ и $A_{\theta_{BH}}$ к функциям, определенным соотношениями

$$\phi_i = A_\theta^{(i)} \sqrt{u_i} ,$$

$$\phi_{BH}^{(i)} = A_{\theta_{BH}}^{(i)} \sqrt{u_i} , \qquad /7/$$

то для волновых функций ядра интегро-дифференциальных уравнений, соответствующих /4/, будут симметричными и равными

$$G_{ij} = \frac{4}{k_1} \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{2}\right) K(k_1) - E(k_1) \right]. \qquad /8/$$

Перейдем от системы уравнений к одному, вводя функции

$$\Phi(\ell) = \begin{cases} \phi_1(u_1, v_1) & \ell \in L_1 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ \phi_N(u_N, u_N) & \ell \in L_N ; \end{cases}$$

$$F(\ell) = \begin{cases} \phi^{(i)}(u_1, v_1) & \ell \in L_1 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ \phi^{(N)}(u_N, v_N) & \ell \in L_N \end{cases} \qquad /9/$$

и

$$G(\ell, \ell') = G_{ij}(u_i, u_j', v_i, v_j') \qquad \ell \in L_i , \ \ell' \in L_j .$$

В результате получим:

$$\Phi(\ell) = F(\ell) - \frac{\sigma h L_0}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_L \Phi \, G(\ell, \ell') \, d\ell'. \qquad /10/$$

Интегрирование в этом уравнении проводится по суммарному контуру $L = L_1 + L_2 + .. + L_N$. Для решения уравнения /10/ удобно перейти к его лапласовскому образу:

$$\Phi_p = F_p - \frac{\sigma h L_0}{c^2} p \int_L \Phi_p G(\ell, \ell') \, d\ell' +$$

$$+ \frac{\sigma h L_0}{c^2} \int_L \Phi(t=0) \, G(\ell, \ell') \, d\ell' , \qquad /11/$$

и воспользоваться методом разложения по собственным функциям граничной задачи, соответствующей однородному уравнению /11/ /5/ *.

Предположим, что нам известны собственные функции Φ_i и собственные значения λ_i ядра G:

* Метод разложения по собственным функциям, которые определяются на заданной системе поверхностей, использовался также для решения задач электродинамики в /10/.

$$\Phi_i = \lambda_i \int_L \Phi_i G(\ell, \ell')\, d\ell' . \qquad /12/$$

Заметим, что ядро $G(\ell, \ell')$ симметрично и принадлежит классу функций, интегрируемых с квадратом, поэтому все значения λ_i вещественны [9]. Из физических соображений ясно, что значения λ_i - положительные. Кроме того, функции $\{\Phi_i\}$ образуют полную ортогональную систему на L. Используя эти свойства λ_i и $\{\Phi_i\}$, легко получить решение уравнения /11/ в виде разложения по $\{\Phi_i\}$ и провести затем обратное преобразование Лапласа.

В результате будем иметь:

$$\Phi = \sum_i \Phi_i D_i(t) , \qquad /13/$$

где

$$D_i(t) = \frac{1}{\tau_i} \int_0^t B_i(t')\, e^{-\frac{(t-t')}{\tau_i}} dt' + C_i e^{-\frac{t}{\tau_i}},$$

$$B_i(t) = \int_L F(\ell, t)\, \Phi_i(\ell)\, d\ell, \qquad /14/$$

$$C_i = \int_L \Phi(t=0)\, \Phi_i(\ell)\, d\ell ,$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{\lambda_i} , \quad \tau = \frac{\sigma h L_0}{c^2} .$$

В соответствии с формулами /14/ часть суммы в /13/, содержащая B_i, дает выражение для экранированных магнитных полей, оставшаяся часть, включающая C_i, есть решение задачи о релаксации токов в экранах.

Зная функцию Φ, по формулам /1/, /7/, /9/ находим токи в экранах:

$$j_\theta(\ell, t) = \frac{c}{h L_0} \frac{\Psi(\ell, t)}{\sqrt{u(\ell)}} , \quad \Psi(\ell, t) = \sum_i \Phi_i(\ell) \lambda_i [D_i(t) - B_i(t)] , \qquad /15/$$

а затем магнитное поле во всем пространстве.

Рассмотрим простой пример, когда зависимость полей без учета экранов от времени имеет вид полубесконечного синусоидального сигнала с частотой ω. В этом случае

$$F(\ell, t) = \begin{cases} F(\ell) \sin \omega t , & t \geq 0, \\ 0 & t < 0 ; \end{cases}$$

$$\Phi = \sum_i \frac{\Phi_i B_i'}{\sqrt{1+\omega^2 \tau_i^2}} \sin(\omega t - \phi_i) + \sum_i \Phi_i \frac{\omega \tau_i}{1+\omega^2 \tau_i^2} B_i' e^{-\frac{t}{\tau_i}} ; \qquad /16/$$

$$B_i' = \int_L F(\ell)\, \Phi_i(\ell)\, d\ell \ ;$$

а сдвиг фазы колебаний

$$\phi_i = \arcsin \frac{\omega \tau_i}{\sqrt{1+\omega^2 \tau_i^2}} . \qquad /17/$$

Как видно из формул /13/ и /16/, переходные процессы в экранах определяются временами τ_i, а длительность их - максимальным значением τ_1.

Изменение амплитуды магнитного поля за счет экранов пропорционально величине $\frac{\omega^2 \tau \bar{\tau}}{1+(\omega \bar{\tau})^2}$, изменение фазы определяется величиной $\frac{\omega \tau}{1+(\omega \bar{\tau})^2}$, где $\bar{\tau}$ - характерное время затухания в экранах. Таким образом, сдвиг фазы может быть существенным даже при малом изменении амплитуды поля.

Сравнивая /16/ с решением уравнения /4/ по методу последовательных приближений [7] при одном и том же $A_{\theta\,\text{вн}}^{(i)}$, можно увидеть, что метод [7] не дает второй суммы в /16/, т.е. пригоден для описания установившихся колебаний. Поскольку решение в [7] получается в виде степенного ряда по ω, то оно применимо лишь в области

$$\omega^2 \tau_1^2 < 1 . \qquad /18/$$

Предлагаемый алгоритм позволяет находить решение и для идеально проводящих экранов ($\omega\tau_1 \to \infty$). Действительно, в этом случае задача сводится к уравнению для поверхностных токов

$$i_\theta = \frac{c}{L_0} \frac{\Psi(\ell, t)}{\sqrt{u(\ell)}} ,$$

$$F(\ell, t) + \int_L G(\ell, \ell')\Psi(\ell', t)\,d\ell' = 0, \qquad /19/$$

решение которого

$$\Psi = -\sum_i \Phi_i B_i(t) \qquad /20/$$

может быть получено предельным переходом ($\tau_i \to \infty$) из /15/.

2. *Случай симметричного расположения экранов*

Выберем плоскость симметрии экранов в качестве плоскости z=0. Тогда решение уравнения /10/ можно искать в виде суперпозиции симметричного $\Phi^{(1)}$ и антисимметричного $\Phi^{(2)}$ полей:

$$\Phi(\ell) = \Phi^{(1)}(\ell) + \Phi^{(2)}(\ell) . \qquad /21/$$

Для этого находятся две системы собственных функций:

$$\Phi_i^{(1,2)} = \lambda_i^{(1,2)} \int_{L'} \Phi_i^{(1,2)} G^{(1,2)}(\ell, \ell')\, d\ell' , \qquad /22/$$

где

$$G^{(1,2)}(\ell, \ell') = \frac{4}{k_1}\left[\left(1 - \frac{k_1^2}{2}\right)K(k_1) - E(k_1)\right] \pm \frac{4}{k_2}\left[\left(1 - \frac{k_2^2}{2}\right)K(k_2) - E(k_2)\right],$$

$$k_{1,2}^2 = \frac{4u(\ell)u(\ell')}{[u(\ell) + u(\ell')]^2 + [v(\ell) \mp v(\ell')]^2} \qquad /23/$$

и функции $u(\ell)$ и $v(\ell)$ определены следующим образом:

$$u(\ell) = \begin{cases} u_1 & \ell \in L_1 , \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \\ u_N & \ell \in L_N ; \end{cases}$$

$$v(\ell) = \begin{cases} v_1 & \ell \in L_1 , \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \\ v_N & \ell \in L_N . \end{cases}$$

В формуле /23/ индексу 1 соответствует верхний знак, индексу 2 - нижний, а интегрирование в /22/ проводится при $v(\ell) > 0$ /контур L'/.

Очевидно, что функции $\Phi_i^{(1,2)}$, доопределенные на весь контур L согласно

$$\Phi_i^{(1)}(-\ell) = \Phi_i^{(1)}(\ell), \quad \Phi_i^{(2)}(-\ell) = -\Phi_i^{(2)}(\ell), \qquad /24/$$

где под $(-\ell)$ подразумевается точка, симметричная точке (ℓ) относительно плоскости z=0, дают решение задачи /12/ в рассматриваемом случае, причем функции $\Phi_i^{(1)}$ и $\Phi_j^{(2)}$ ортогональны на L и

$$\lim_{\ell\to\ell'}\left[G(\ell,\ell') - G_0(\ell,\ell')\right] < \infty, \qquad /30/$$

и интеграл по контуру от $G_0(\ell,\ell')$ берется аналитически.

Собственные значения λ_i и функции $\{\Phi_i\}$ для экранов с различными геометриями искались численно на ЭВМ БЭСМ-6.

На рис. 3 показаны для примера графики первых четырех собственных функций для двух дуг окружностей, симметрично расположенных относительно плоскости z=0 /см. рис. 2/.

Число собственных функций, необходимых для достаточно точной аппроксимации решений, зависит от конкрет-

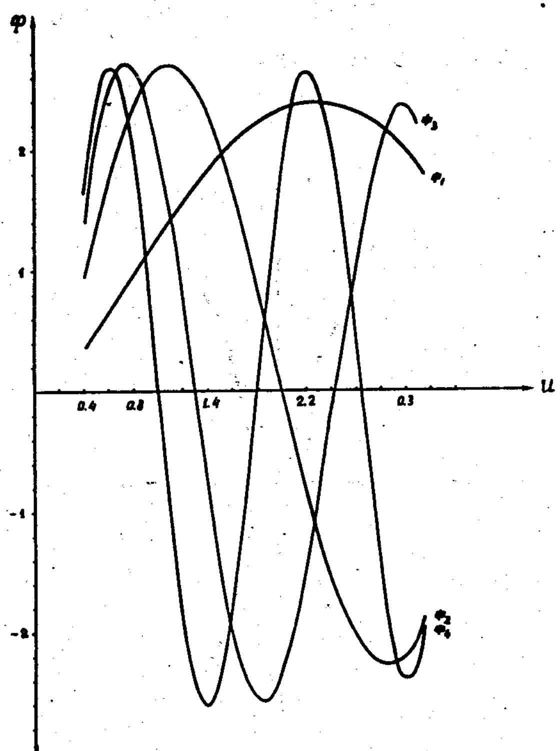

Рис. 3. Графики первых четырех симметричных собственных функций для контуров, изображенных на рис. 2.

ной геометрии экранов и источников внешних полей, а также от расстояния точки, в которой ищется магнитное поле, от экранов. Оценить необходимое число собственных функций можно следующим образом. Точность вычисления полей определяется точностью вычисления коэффициентов B_i и числом оставленных членов ряда в /13/. Точность вычисления B_i оценивается с помощью формулы /14/. Пусть r_1 - минимальное расстояние от источника до экрана. Эта величина дает характерный размер изменения функции F на L. Для того, чтобы коэффициенты разложения B_i достаточно хорошо представляли функцию $F(\ell)$, нужно знать собственные функции Φ_i, меняющиеся существенно на расстояниях $\sim r_1$. Число нулей i-ой собственной функции равно $i-1$, и расстояние между нулями $\sim \frac{L_0}{i-1}$. Таким образом, необходимое число собственных функций для правильного задания внешнего поля на контуре L должно выбираться из условия $i > \frac{L_0}{r_1}$.

Точно так же, если r_2 - характерное расстояние от точки наблюдения до экрана, можно получить $i > \frac{L_0}{r_2}$.

Окончательно следует выбирать более сильное из этих двух неравенств.

4. *Нахождение магнитных полей в камере адгезатора-3*

Метод, изложенный выше, применялся для нахождения магнитных полей в медианной плоскости (z=0) камеры адгезатора-3 /2/, схематически изображенной на рис. 4.

Магнитное поле создается системой токовых витков, расположенных вне камеры, симметрично относительно плоскости z=0. В каждом из них ток изменяется во времени по закону /без учета индуктивной связи витков друг с другом и с камерой/:

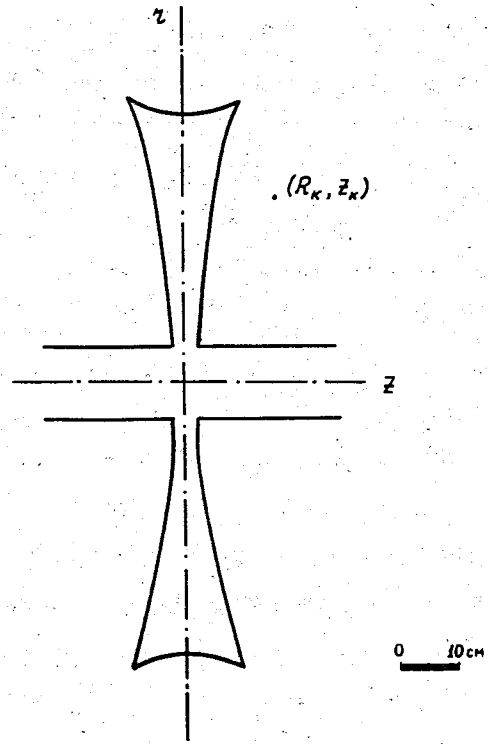

Рис. 4. Схематическое изображение камеры адгезатора-3.

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t < t_k; \\ I_k \sin\omega(t - t_k), & t_k \le t \le T + t_k; \\ 0, & t > t_k + T; \end{cases} \qquad /31/$$

где t_k - время включения тока, $T = \frac{\pi}{\omega}$, k - номер ступени сжатия.

В силу симметрии системы относительно плоскости $z=0$ для нахождения полей можно пользоваться симметричными собственными функциями $\{\Phi_i^{(1)}\}$ /22/. Выражение для магнитного поля от одной пары витков в медианной плоскости имеет вид ($t_k = 0$):

$$B_z(u_0,t) = \begin{cases} \omega\tau \sum\limits_i \dfrac{B_i' \Psi_i(u_0)}{1+\omega^2\tau_i^2} e^{-\frac{t}{\tau_i}} + \tilde{B}_z(u_0)\sin(\omega t - \phi_B(u_0)) & 0 \le t \le T; \\ \omega\tau \sum\limits_i \dfrac{B_i' \Psi_i(u_0)}{1+\omega^2\tau_i^2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_i}} + e^{-\frac{t-T}{\tau_i}}\right) & t > T. \end{cases} \qquad /32/$$

Здесь использованы следующие обозначения: u_0 - координата точки наблюдения, отнесенная к L_0; B_i' - коэффициенты разложения, имеющие тот же смысл, что и в /16/; функции $\Psi_i(u_0)$ даются формулами:

$$\Psi_i(u_0) = \frac{1}{L_0} \int_{L'} G_B(u_0, \ell)\, \Phi_i^{(1)}(\ell)\, d\ell,$$

$$G_B(u_0, \ell) = \frac{2}{u_0} \frac{\partial}{\partial u_0} \sqrt{u_0}\, G^{(1)}(u_0, 0, \ell). \qquad /33/$$

В момент времени t, при котором выполняется условие $\exp(-t/\tau_1) \ll 1$,* влияние экранов сводится к изменению амплитуды и фазы внешнего магнитного поля:

$$\tilde{B}_z(u_0) = \left[\left(B_z^{вн}(u_0) - \omega\tau \sum_i \frac{B_i' \omega\tau_i \Psi_i(u_0)}{1+\omega^2\tau_i^2}\right)^2 + \left(\omega\tau \sum_i \frac{B_i' \Psi_i(u_0)}{1+\omega^2\tau_i^2}\right)^2\right]^{1/2}, \quad \sin\phi_B(u_0) = \frac{\omega\tau \sum\limits_i \dfrac{B_i' \Psi_i(u_0)}{1+\omega^2\tau_i^2}}{\tilde{B}_z(u_0)}, \qquad /34/$$

* Для остальных τ_i это условие тогда автоматически выполняется в силу $\lambda_{i+1} > \lambda_i$.

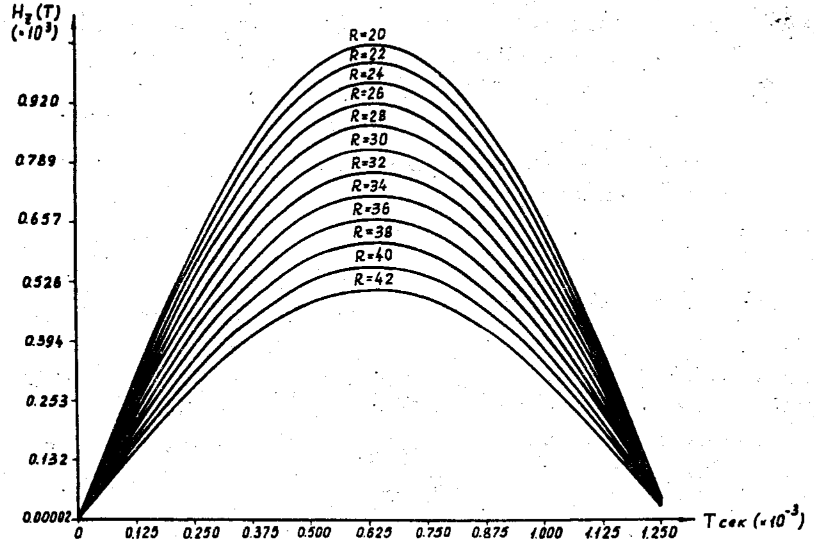

Рис. 5. Изменение магнитного поля во времени в свободном пространстве на разных радиусах.

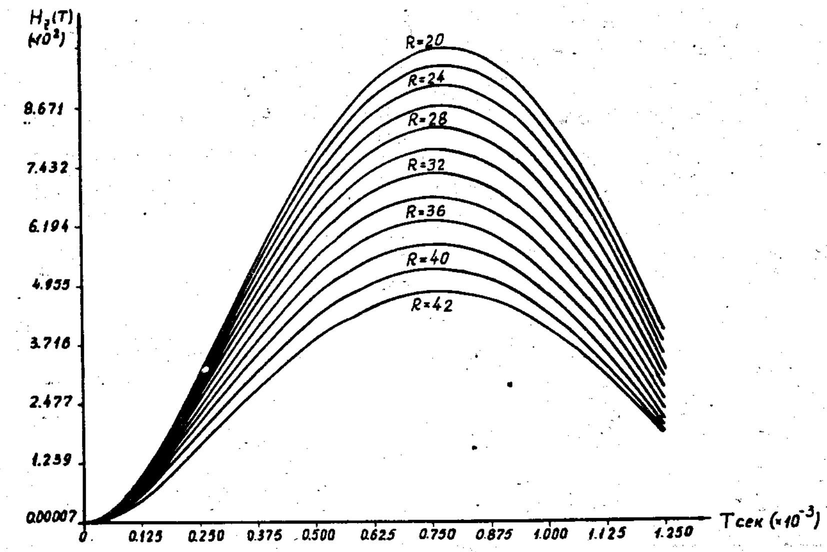

Рис. 6. Изменение магнитного поля во времени с учетом экранов.

$B_z^{ВН}(u_0)$ - амплитуда магнитного поля в отсутствие экранов.

На рис. 5,6 показано изменение магнитного поля во времени на разных радиусах в свободном пространстве и с учетом экранов /при $\omega\tau$ = 0,125/. Из графиков видно, что несмотря на небольшое изменение амплитуды поля /~ 3%/, его временная зависимость существенно изменилась.

Основной характеристикой внешнего магнитного поля, определяющей устойчивость движения электронов в кольце, является показатель спада $n = -\frac{u_0}{B_z}\frac{\partial B_z}{\partial u_0}$, который для экранированных полей при $\exp(-\frac{t}{\tau_1}) \ll 1$ может быть записан как

$$n(r,t) = \tilde{n}(u_0)[\cos(\phi_B - \phi_{B'}) + \mathrm{ctg}(\omega t - \phi_B)\sin(\phi_B - \phi_{B'})], \qquad /35/$$

где под $\phi_{B'}$ обозначена фаза производной $\frac{\partial B_z}{\partial u_0}$.

Появившаяся зависимость n от времени связана с различием фаз поля ϕ_B и производной поля $\phi_{B'}$, или, точнее, с зависимостью ϕ_B от координаты точки наблюдения.

Графики, иллюстрирующие зависимость $n(t)$ на различных радиусах, представлены на рис. 7.

Если выполнено условие $(\omega\tau_1)^2 \ll 1$, то $\tilde{n}(u_0) \simeq n^{ВН}(u_0)$, где $n^{ВН}(u_0)$ - показатель спада в отсутствие экрана, и для того, чтобы суммарное значение n мало отличалось от $n^{ВН}$, необходимо:

$$\phi_B \approx \phi_{B'} . \qquad /36/$$

На рис. 8 показаны зависимости фаз ϕ_B и $\phi_{B'}$ от радиуса точки наблюдения. Сравнивая графики для $n(t)$, можно увидеть, что $n(r,t)$ сильно отличаются от $n^{ВН}(r)$ в момент включения тока на радиусах, где ϕ_B не совпадает с $\phi_{B'}$. Поэтому при формировании магнитного поля в адгезаторе координаты витков R и Z следует выбирать

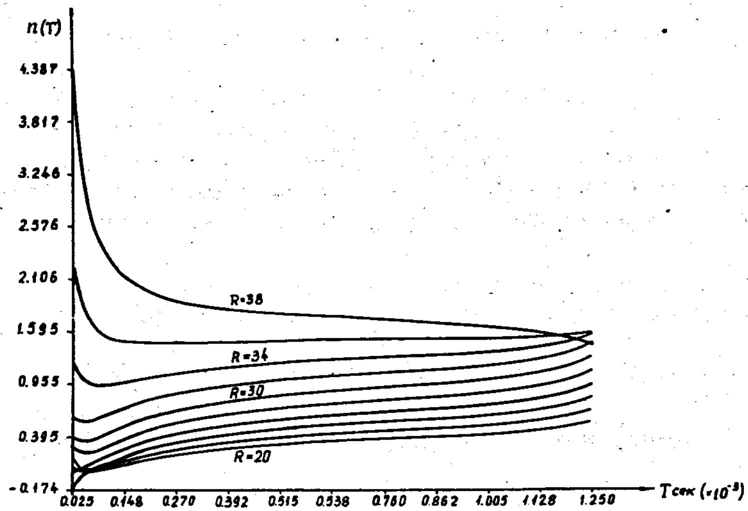

Рис. 7. Зависимость показателя спада магнитного поля от времени.

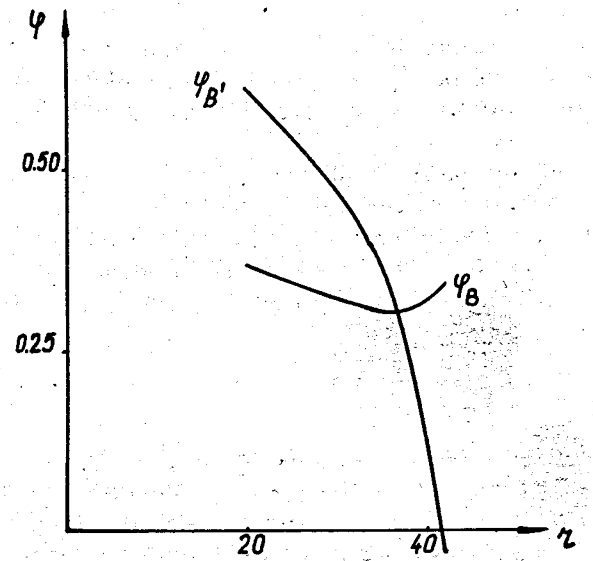

Рис. 8. Зависимости фаз поля и его производной от радиуса точки наблюдения.

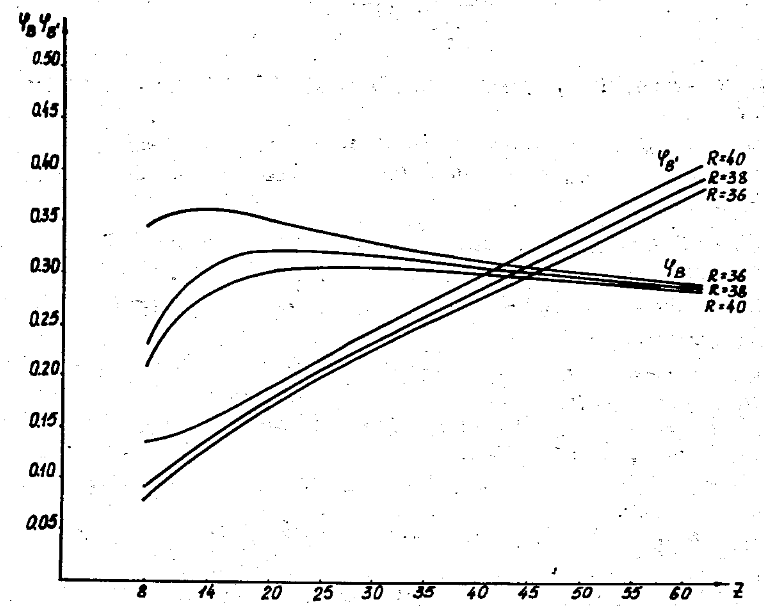

Рис. 9. Зависимости фаз поля и его производной от расстояния между витком и медианной плоскостью камеры.

так, чтобы на радиусах перехвата /радиус перехвата - равновесный радиус кольца в момент включения соответствующей ступени сжатия/ выполнялось условие /36/.

На рис. 9 показаны зависимости фаз поля и его производной на радиусе r =36 см от Z витка для нескольких значений R.

Для расчетов полей было взято 25 собственных функций, что обеспечивало нахождение полей внутри камеры с точностью $\leq$ 0,1%.

В заключение отметим, что данный метод позволяет достаточно быстро решать задачу о формировании магнитных полей в проводящих камерах с заданной геометрией, т.к. основное время счета идет на вычисление собственных функций.

Литература

1. В.И.Векслер и др. Препринт ОИЯИ, Р9-3440-2, Дубна, 1968;
   V.I.Veksler et al. Collective Linear Acceleration of Ions.Proc. of Sixth Internat. Conf. on High Energy Accelerators, Cambridge, 1967, p. 289.
2. В.С.Александров и др. Симпозиум по коллективным методам ускорения, ОИЯИ, Д9-6707,Дубна,1972,стр.12.
3. D.Keefe. Proc. of VIII-th Internat. Conf. on High Energy Accelerators, Geneva, 1971, p. 397.
4. В.Ф.Алексин, С.С.Романов. ЖТФ, т. 43, вып. 6, стр. 1153 /1973/.
5. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1957.
6. В.Смайт. Электростатика и электродинамика. ИЛ, Москва, 1954.
7. И.Ламмеранер, М.Штафль. Вихревые токи. Энергия, М.-Л., 1967.
8. А.Г.Бонч-Осмоловский. Депонированное сообщение ОИЯИ, Б2-9-67-85, Дубна, 1972.
9. Ф.Трикоми. Интегральные уравнения, ИЛ, М., 1960.
10. Я.Н.Фельд. Радиотехника и электроника. т. IV , в.12, 1959, стр. 2004.
11. С.Г.Михлин и Х.Л.Смолицкий. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Наука, М., 1965.
12. Л.В.Канторович, В.И.Крылов. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, М., 1952.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 марта 1974 года.