

8  
СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



896/2-74

P9 - 7580

Е.П.Жидков Л.Л.Зиновьева, Н.Б.Рубин

РЕШЕНИЕ

ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ  
МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

**1973**

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

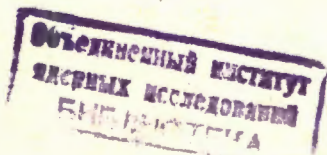
Томасова

P9 - 7580

Е.П.Жидков\* Л.Л.Зиновьева, Н.Б.Рубин

РЕШЕНИЕ

ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ  
МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ



---

\* Лаборатория вычислительной техники  
и автоматизации ОИЯИ.

Жидков Е.П., Зиновьева Л.Л., Рубин Н.Б.

P9 - 7580

Решение линейной обратной задачи магнитостатики методом регуляризации

Рассматривается линейная обратная задача магнитостатики, т.е. определения по заданному полю плотностей токов в магнитной системе, геометрия которой известна. Математически задача сводится к линейному интегральному уравнению Фредгольма 1 рода, которое решается методом регуляризации нулевого порядка гладкости.

Приводится пример решения задачи на ЭВМ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований  
Дубна, 1973

Zhidkov E.P., Zinovieva L.L., Rubin N.B., P9 - 7580

Solution of a Linear Inverse Problem of  
Magnetostatics by the Regularization Method

There was considered a linear inverse problem of magnetostatics, i.e. the determination of the current densities over the given field of a magnetic system with the known geometry. Mathematically the problem is reduced to the linear integral Fredholm equation of the first type which is solved by the regularization method of the zeroth smoothness order. An example is given of solving the problem using the computer.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.  
Dubna, 1973

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

В последнее время на практике все чаще возникает необходимость решения обратной задачи магнитостатики, т.е. определения по заданному полю параметров источников. Будем полагать, что поле задается какой-либо из своих компонент, что зависит от конкретного случая, поэтому в дальнейшем индекс компоненты поля опускается.

Сформулируем задачу. Пусть в некоторой области  $z(c \leq z \leq d)$  известно поле  $H$ , которое создается магнитной системой, расположенной в некоторой области  $s(a \leq s \leq b)$ . Известно, что поле в любой точке пространства в этом случае определяется уравнением типа

$$H(z) = \int_a^b I(s)G(z, s)ds, \quad c \leq z \leq d, \quad /1/$$

где  $I(s)$  - функция распределения плотности тока в системе;  $G(z, s)$  - функция Грина, аналитический вид которой обычно известен и зависит от геометрии источников и компоненты поля.

Рассмотрим самый простой случай обратной задачи магнитостатики, а именно: определить по заданному полю распределение плотностей токов в магнитной системе, геометрия которой известна. Нетрудно заметить, что математически задача сводится к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма 1 рода.

Известно <sup>/1,3/</sup>, что такие уравнения относятся к некорректно поставленным задачам, т.к. малым изменениям входных данных ( $H(z)$ ) могут соответствовать сколь

угодно большие изменения в решении  $(I(s))$ . Для получения устойчивого решения некорректных задач А.Н.Тихоновым разработаны регуляризующие алгоритмы /1,2/.

Рассмотрим решение задачи методом регуляризации нулевого порядка гладкости /1,3/. Строим сглаживающий параметрический функционал

$$M^{\alpha} [I(s), H(z)] = \Phi [I(s), H(z)] + \alpha \Omega [I(s)], \quad /2/$$

где

$$\Phi [I(s), H(z)] = \int_c^d [H(z) - \int_a^b I(s) G(z, s) ds]^2 dz \quad /3/$$

квадратическое уклонение оператора  $\int_a^b I(s) G(z, s) ds$  от заданной функции  $H(z)$ ,

$$\Omega [I(s)] = \int_a^b I^2(s) ds \quad /4/$$

регуляризующий функционал, или стабилизатор,  $\alpha$  - числовой параметр регуляризации ( $\alpha > 0$ ).

А.Н.Тихоновым было показано, что при точном задании входных данных решение  $I(s)$ , доставляющее минимум функционалу  $M^{\alpha}$ , является единственным и устойчивым, причем при  $\alpha \rightarrow 0$  функции  $I^{\alpha}(s)$  сходятся к точному решению уравнения /1/.

При практическом использовании метода регуляризации выбор параметра  $\alpha$  является одним из основных вопросов. Трудность состоит в том, что не всегда при найденном гладком решении выполняется принцип невязки, т.е. неравенство

$$\| \bar{H}_{\delta} - \bar{H} \| \leq \delta, \quad /5/$$

где  $\delta$  - точность входных данных  $\bar{H}_{\delta}$ ,  $\bar{H}$  - точное значение входных данных.

В действительности при решении некорректных задач, так же как при решении корректных, часто необходимо найти решение, которое бы удовлетворяло требуемой точности. В связи с этим В.А.Морозовым было предложено /4/ в качестве основного критерия выбора параметра

регуляризации использовать принцип невязки. Им было показано, что выбираемое по этому принципу значение параметра регуляризации определяется однозначно.

Может оказаться, что найденное по принципу невязки регуляризованное решение может и не быть гладким.

## II. ПОДГОТОВКА ЗАДАЧИ К ЧИСЛЕННОМУ СЧЕТУ

Представим интегралы в выражение /2/ в виде суммы

$$M^{\alpha} = \sum_{j=1}^N [H_j(z_j) - \sum_{i=1}^M I_i(s_i) k_{ij}(z_j, s_i)]^2 \Delta z_j + \alpha \sum_{i=1}^M I_i^2(s_i) \Delta s_i \quad /6/$$

где  $N$  - число точек в интервале  $c \leq z \leq d$ ,  $M$  - число точек в интервале  $a \leq s \leq b$ ,  $M \leq N$ ,

$$\Delta s_i = \Delta s = \text{const},$$

$$\Delta z_j = \Delta z = \text{const},$$

$$k_{ij} = \int_{\Delta s_i} G(z_j, s) ds.$$

Запишем условие минимума для  $M^{\alpha}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial M^{\alpha}}{\partial I_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial M^{\alpha}}{\partial I_M} = 0. \end{cases} \quad /7/$$

Принимая во внимание /6/, получим

$$\frac{\partial M^{\alpha}}{\partial I_{\ell}} = - \sum_{i=1}^N H_i K_{\ell j} \Delta z + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M I_i k_{\ell j} k_{ij} \Delta z + \alpha I_{\ell} \Delta s = 0. \quad /8/$$

Таким образом, дифференцируя  $M^{\alpha}$  по  $I_{\ell}$  и приравнявая  $\frac{\partial M^{\alpha}}{\partial I_{\ell}}$  к нулю, получим систему  $M$  линейных алгебраических уравнений с  $M$  неизвестными  $I_{\ell}$ :

$$\sum_{i=1}^M I_i \sum_{j=1}^N k_{ij} \Delta z + a I_\ell \Delta s = \sum_{j=1}^N H_j k_{\ell j} \Delta z, \quad \ell=1 \div M. \quad /9/$$

Полагая  $a \Delta s = a' \Delta z$ , получим

$$\sum_{i=1}^M I_i \sum_{j=1}^N k_{ij} + a' I_\ell = \sum_{j=1}^N H_j k_{\ell j}, \quad \ell=1 \div M. \quad /9a/$$

Очевидно, что  $a'$  сохраняет смысл произвольного коэффициента  $a$ , поэтому систему, по которой находится распределение плотностей токов в магнитной системе, окончательно можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^M I_i \sum_{j=1}^N k_{ij} + a' I_\ell = \sum_{j=1}^N H_j k_{\ell j}, \quad \ell=1 \div M. \quad /10/$$

В случае, если магнитная система представляет собой дискретный набор катушек, поле в любой точке пространства определяется следующим образом:

$$H(z) = \sum_{i=1}^M I_i \int_{\Delta s_i} G(z, s) ds, \quad /11/$$

где  $M$  - число катушек,  $I_i$  - плотность тока в  $i$ -ой катушке,  $\Delta s_i$  - сечение  $i$ -ой катушки.

Очевидно, что в сущности постановка задачи остается той же самой. В этом случае ее решение также сведется к решению системы /10/.

### III. ПРИМЕР РАСЧЕТА ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ

В настоящее время в отделе новых методов ускорения создается один из возможных вариантов коллективного ускорителя - кольцетрон, у которого ускоряющая секция

представляет собой систему высокочастотных сфазированных резонаторов /5/.

Для обеспечения равномерности ускорения кольца электронов и удержания ионов в нем, а также для сохранения среднего уровня продольного поля /тогда остаются неизменными радиальные размеры кольца/ на длине ускоряющей секции \* необходимо создать так называемое "градиентное" радиальное поле, которое имеет следующий аналитический вид /6/:

$$H_r(z) = -E_{рез} f(z) + E_{доп} \quad /12/$$

Здесь  $E_{рез} = \frac{E_{доп} T_z}{0 \int_{T_z} f(z) dz}$  - амплитуда электрического

поля в резонаторе;  $E_{доп}$  - внешнее электрическое поле, в котором еще не происходит отрыв ионов от электронного кольца,  $E_{доп}$  зависит от параметров кольца /6/,  $T_z$  - геометрический период системы,  $f(z)$  - функция, отображающая конфигурацию  $z$ -компоненты электрического поля в резонаторе.

По условиям ускорения частиц магнитная система ускоряющей секции является аксиально-симметричной. Магнитная система, которая должна обеспечить градиентное поле, состоит из 80 одинаковых катушек, сгруппированных по 16 штук /рис. 1/. Все катушки имеют автономное питание. Градиентное поле необходимо сформировать в рабочем интервале  $-65 \text{ см} \leq z \leq 65 \text{ см}$  на радиусе 5 см, равном радиусу кольца, при  $E_{доп} = 35,5 \text{ кВ/см}$ ,  $T_z = 40 \text{ см}$ . В качестве функции  $f(z)$  была взята экспериментальная кривая распределения продольной составляющей электрического поля в резонаторе на радиусе 5 см, построенная в относительных единицах /рис. 2/. Интеграл  $\int_0^{T_z} f(z) dz$  был вычислен численным методом. Его значение равно 7,2 см.

Подставляя известные значения  $E_{рез}$ ,  $E_{доп}$  и  $f(z)$  в соотношение /12/, получим значения радиальной состав-

\* При слаборелятивистском продольном движении кольца.

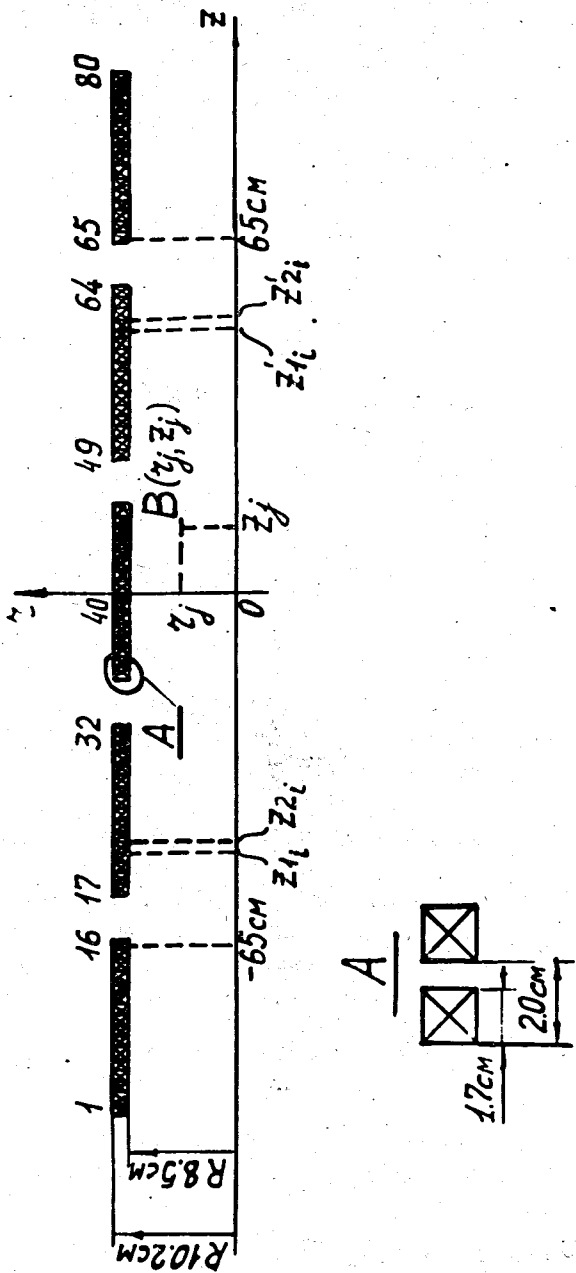


Рис. 1. Магнитная система для создания градиентного поля.

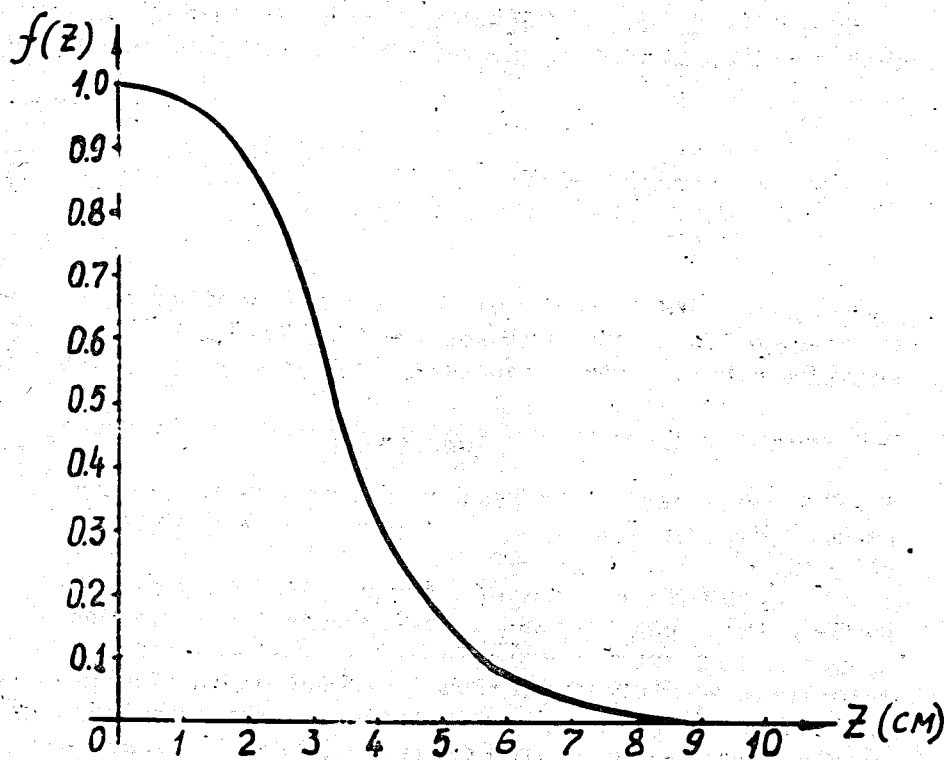


Рис. 2. Функция распределения z-составляющей электрического поля в резонаторе.

ляющей градиентного поля в рабочем интервале. Ее график представлен на рис. 3. Допустимое отклонение от заданной радиальной составляющей градиентного поля не должно превышать  $50 \text{ э.}^{15/}$

Требовалось определить плотности токов в катушках, которые бы обеспечили рабочее градиентное поле при условии, чтобы их значения не превысили допустимой величины  $2 \times 10^4 \text{ А/см}^2$  /магнитная система градиентных катушек предполагается сверхпроводящей/.

Расчет плотностей токов проводился методом регуляризации на ЭВМ БЭСМ-6.

Функция Грина для радиальной компоненты поля аксиально-симметричной системы имеет следующий вид <sup>/7/</sup>

$$G(r, r', z, z') = \frac{k(z-z')}{r\sqrt{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \left[ -K + \frac{r'^2 + r^2 (z-z')^2}{(r-r')^2 + (z-z')^2} E \right], /13/$$

где  $r, r', z, z'$  - радиальные и продольные координаты соответственно расчетной и токонесущей точек;  $K$  и  $E$  - соответственно полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода от аргумента  $x^2 = \frac{4rr'}{(r+r')^2 + (z-z')^2}$ ;  $k$  - коэффициент, зависящий от системы координат; если размеры взяты в см, поле - в Э, плотность тока - в А/см<sup>2</sup>, то  $k = 0,2$ .

Принимая во внимание /11/ и /13/, нетрудно заметить, что радиальной составляющей поля, которая представляет собой четную функцию относительно оси симметрии магнитной системы /что имеет место в рассматриваемом случае/, соответствует нечетная функция распределения токов в этой системе. Этот факт позволяет сократить число неизвестных в два раза, а поле задавать только на одной половине рабочей области, что уменьшает время счета.

Учитывая условия симметрии, запишем выражение для коэффициентов  $k_{ij}$  в системе /10/:

$$k_{ij} = \int_{R_{1i}}^{R_{2i}} \int_{Z_{1i}}^{Z_{2i}} G(r', z', r_j, z_j) dr' dz' - \int_{R_{1i}}^{R_{2i}} \int_{Z_{1i}}^{Z_{2i}} G(r', z', r_j, z_j) dr' dz', /14/$$

где  $Z'_{1i} = |Z_{2i}|$ ,  $Z'_{2i} = |Z_{1i}|$  /см. рис. 1/.

Эллиптические интегралы  $K$  и  $E$  рассчитывались по стандартным программам. Интегралы, входящие в выражение коэффициентов  $k_{ij}$ , считались численным методом. Система /10/ решалась с помощью стандартной подпрограммы решения алгебраических линейных систем.

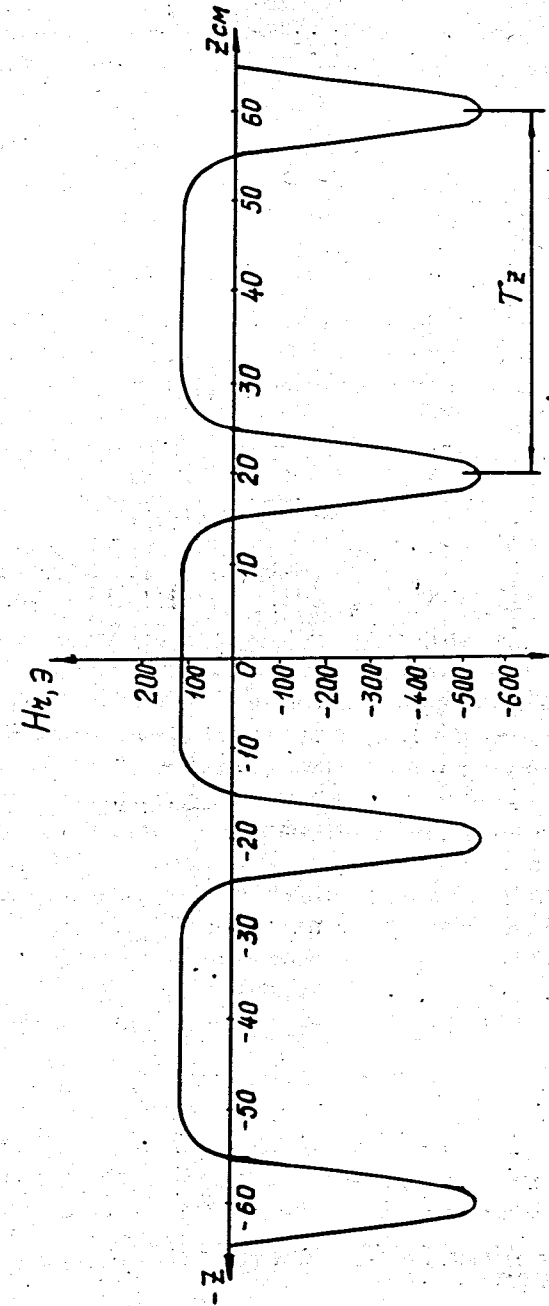


Рис. 3.  $H_r(z)$  градиентного поля.

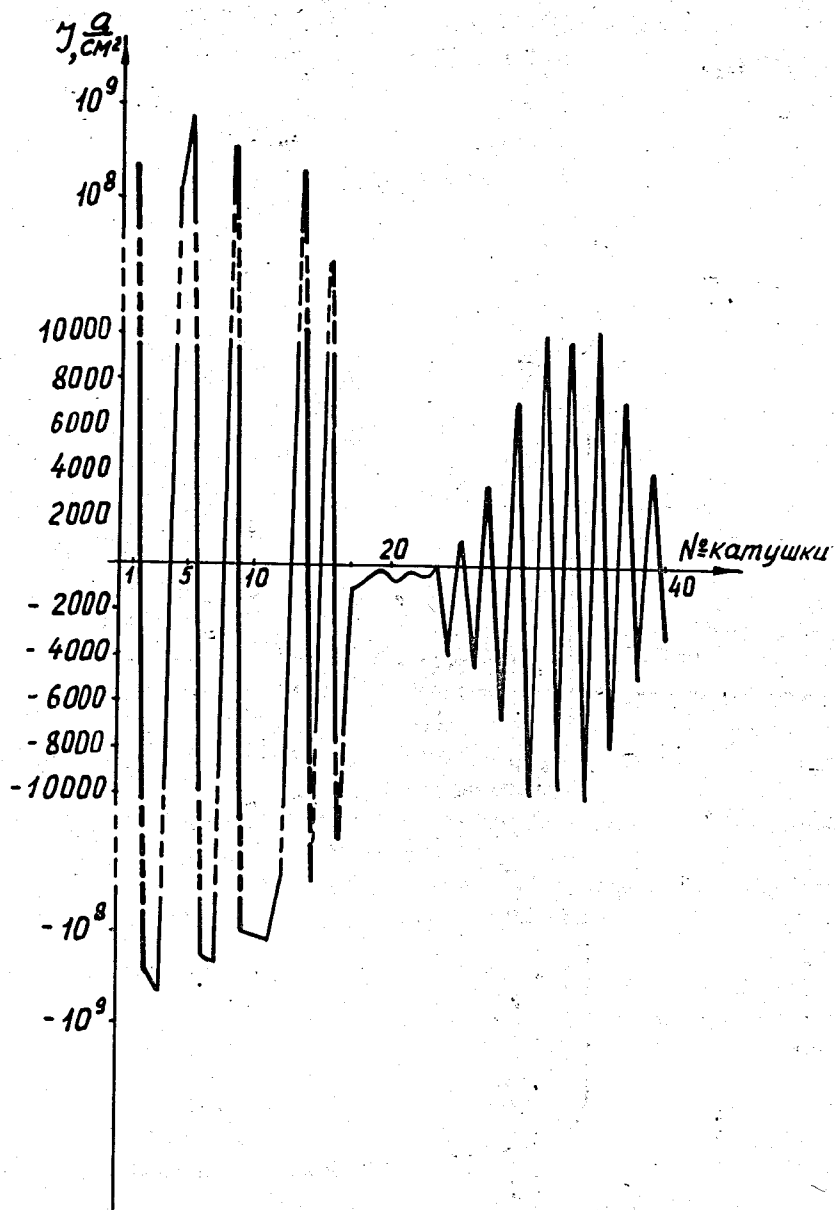


Рис. 4. Распределение плотностей токов в магнитной системе при  $\alpha=0$ .

При  $\alpha=0$ , т.е. при отсутствии регуляризации, наблюдалась явная неустойчивость решения, что выражалось в огромных значениях плотностей токов и их знакопеременности по катушкам, рис. 4 /номера катушек идут слева направо - см. рис. 1/.

В результате варьирования коэффициента  $\alpha$  при  $\alpha=0,1$  было найдено кусочно-гладкое решение /рис. 5/. Однако при этом величина невязки составила 350 Э, что значительно превышает допустимое значение.

При  $\alpha < 0,1$  невязка уменьшалась, но решения уже были негладкими, что выражалось в увеличении как плотностей токов, так и их знакопеременности. Наилучшее решение, удовлетворяющее допустимым значениям плотностей токов и невязке, было получено при  $\alpha=10^{-5}$ . Распределение плотностей токов по катушкам в этом случае представлено в табл. 1 и на рис. 6. Отклонение поля от требуемого в основном не превысило допустимой величины 50 Э, за исключением нескольких точек /вблизи стенок резонаторов/, где максимальное отклонение от заданного поля составило 71 Э/см. табл. 2/. Для уменьшения погрешности в этих точках вблизи резонаторов можно добавить ампер-витки или уточнить допустимые отклонения градиентного поля в локальных точках.

Из полученного решения видно, что выбранная магнитная система неоптимальна, так как плотности токов, необходимые для создания относительно небольшого градиентного поля, все же довольно велики. Хотя магнитная система кольцетрона допускает такие токи, однако представляется возможным найти такую геометрию системы, в которой бы токи были с меньшими значениями плотностей. Выбор оптимальной геометрии относится к нелинейной обратной задаче магнитостатики, которая в данной работе не рассматривается.



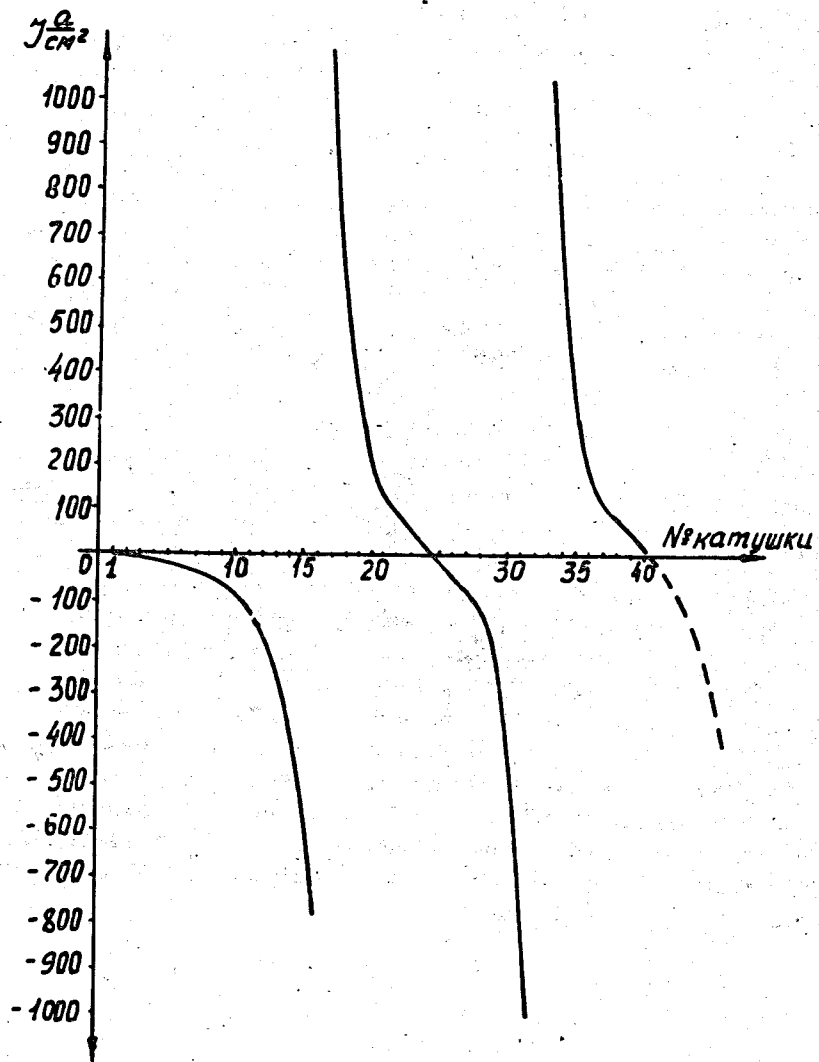


Рис. 5. Распределение плотностей токов в магнитной системе при  $\alpha=0,1$ .

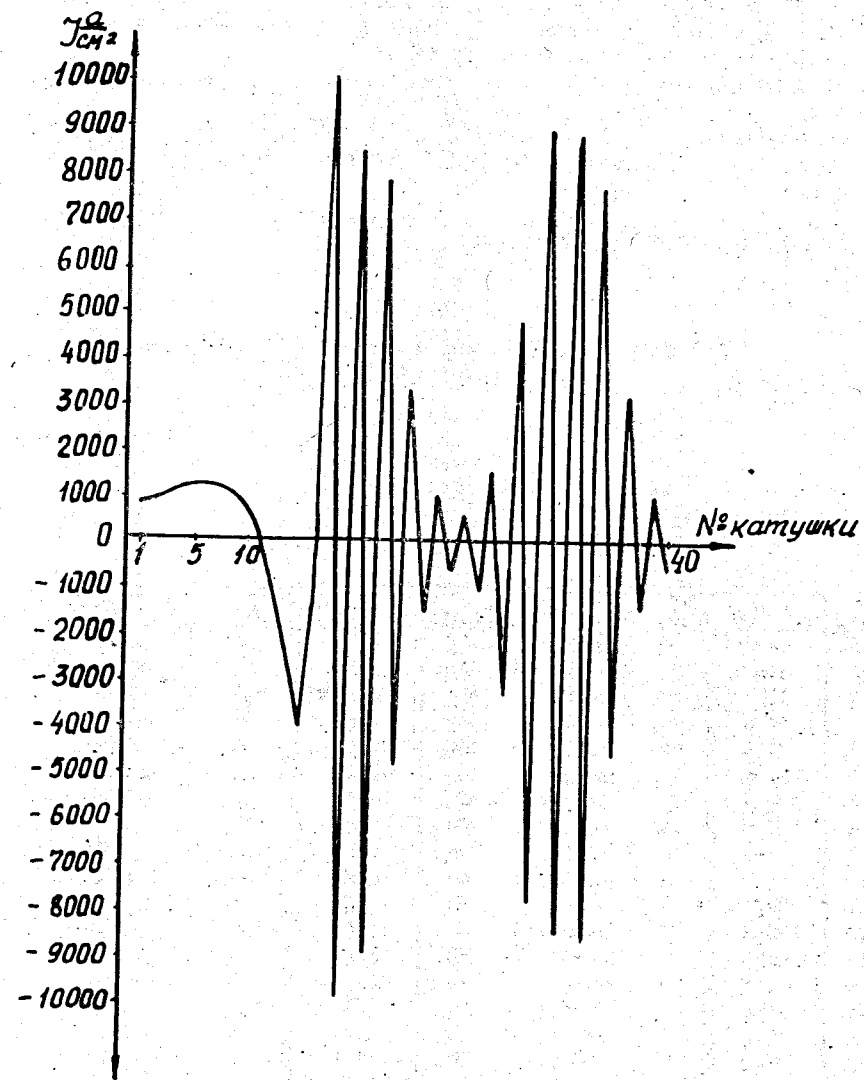


Рис. 6. Распределение плотностей токов в магнитной системе при  $\alpha=10^{-5}$ .

Литература

1. А.Н.Тихонов. ДАН СССР, т. 153, №1, 49-52 /1963/.
2. А.Н.Тихонов. ДАН СССР, т. 151, №3, 501-504 /1963/.
3. В.Я.Арсенин. О методах решения некорректно поставленных задач. Изд. МИФИ, 1973.
4. В.А.Морозов. В сб. Вычислительные методы и программирование. Вып. 8, Изд. МГУ, 1967, 63-95.
5. Н.Г.Анищенко и др. ОИЯИ, Р9-4722, Дубна, 1969.
6. А.Г.Бонч-Осмоловский и др. ОИЯИ, Р9-4171, Дубна, 1968.
7. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, Москва, 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел  
6 декабря 1973 года.

ТАБЛИЦА I

N кат	J, а/см <sup>2</sup>	N <sup>2</sup> кат	J, а/см <sup>2</sup>	N <sup>2</sup> кат	J, а/см <sup>2</sup>	N <sup>2</sup> кат	J, а/см <sup>2</sup>
1	817	21	3333	41	542	61	4917
2	898	22	-1634	42	-1007	62	-7933
3	981	23	1060	43	1513	63	8973
4	1060	24	-635	44	-3204	64	-8442
5	1125	25	585	45	4671	65	9960
6	1156	26	-1083	46	-7669	66	-10316
7	1123	27	1552	47	8680	67	1505
8	975	28	-3311	48	-8334	68	4074
9	628	29	4779	49	8489	69	2762
10	-38	30	-7865	50	-8850	70	1163
11	-1163	31	8850	51	7865	71	38
12	-2762	32	-8489	52	-4779	72	-628
13	-4074	33	8334	53	3311	73	-975
14	-1505	34	-8680	54	-1552	74	-1123
15	10316	35	7669	55	1083	75	-1156
16	-9960	36	-4671	56	-585	76	-1125
17	8442	37	3204	57	635	77	-1060
18	-8973	38	-1513	58	-1060	78	-981
19	7933	39	1007	59	1634	79	-898
20	-4917	40	-542	60	-3333	80	-817

ТАБЛИЦА 2

Z, CM	N <sub>2</sub> макс, g	N <sub>2</sub> макс, g	ΔN-Δp-Δr, g	Z, CM	N <sub>2</sub> макс, g	N <sub>2</sub> макс, g	ΔN-Δp-Δr, g
-65	13	40,5	27,5	-32	118	111	-7
-64	-99	-139	-40	-31	118	130	12
-63	-302	-320	-18	-30	118	128	10
-62	-453	-441	12	-29	118	94	-24
-61	-526	-500	26	-28	108	01	-27
-60	-538	-517	21	-27	92	112,6	20,6
-59	-526	-501	25	-26	66	113,5	47,5
-58	-453	-446	7	-25	13	9	-4
-57	-302	-331	-35	-24	-99	-170	-71
-56	-99	-169	-70	-23	-302	-336	-34
-55	13	10	-3	-22	-453	-442	10
-54	66	114	48	-21	-526	-494	32
-53	92	112	2,3	-20	-538	-509	29
-52	108	90	-8	-19	-526	493	33
-51	118	93	-25	-18	-453	-440	13
-50	118	128	10	-17	-302	-333	-31
-49	118	131	13	-16	-99	-169	-70
-48	118	111	-7	-15	-13	01	-48
-47	118	107	-11	-14	66	112	46
-46	118	118	0	-13	92	113	21
-45	118	121	3	-12	108	02	-26
-44	118	116	-2	-11	118	94	24
-43	118	114	-4	-10	118	128	10
-42	118	116	-2	-9	118	130	2
-41	118	117	-1	-8	118	112	-6
-40	118	116	-2	-7	118	108	-10
-39	118	117	-1	-6	118	118	0
-38	118	116	-2	-5	118	12	3
-37	118	114	-4	-4	118	116	-2
-36	118	116	-2	-3	118	114	-4
-35	118	121	3	-1	118	116	-2
-34	118	118	0	0	118	117	-1
-33	118	107	-1		118	117	-1