

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



7357

P9 - 7357

С. 13. ЧИТ. зала

Ю.И.Алексахин, В.П.Саранцев

ИМПЕДАНС ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА,
ЭКРАНИРОВАННОГО ВНУТРЕННИМ
КОАКСИАЛЬНЫМ ЦИЛИНДРОМ

1973

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

P9 - 7357

Ю.И.Алексахин, В.П.Саранцев

ИМПЕДАНС ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА,
ЭКРАНИРОВАННОГО ВНУТРЕННИМ
КОАКСИАЛЬНЫМ ЦИЛИНДРОМ

Научно-техническая
библиотека
ОИЯИ

Одним из принципиальных моментов, возникающих при разработке коллективного метода ускорения, является вопрос устойчивости электронного кольца по отношению ко всякого рода возмущениям. Как было показано, в частности, в работах /1.2/, основные ограничения на параметры электронного кольца /энергетический разброс, число электронов и, следовательно, эффективное ускоряющее напряжение/ связаны с развитием азимутальных /продольных/ неустойчивостей. Наиболее эффективный метод подавления этих неустойчивостей - экранировка кольца для уменьшения величины импеданса /1-5/.

В данной работе рассматривается влияние экранировки нерелятивистски движущегося электронного кольца радиуса r_0 внутренней коаксиальной трубой радиуса d на величину импеданса, определяемого из соотношения $2\pi r_0 E_{n\theta} = -Z_n I_n$, где $I_n = I_{n0} e^{i(n\theta - kct)}$ - возмущение тока пучка и $E_{n\theta}$ - создаваемое им азимутальное электрическое поле на радиусе кольца. При этом камера адгезатора /компрессора/ идеализированно представляется как коаксиальный резонатор с внешним радиусом b и высотой h , а ускоряющий тракт - как бесконечный коаксиальный волновод.

Радиальные собственные функции соответствующей граничной задачи в случае идеально проводящих стенок имеют вид /4/:

$$S_{nE}(x) = J_n(x) Y_n(\lambda_{ns}) - Y_n(x) J_n(\lambda_{ns}) \quad /1/$$

для ТМ-волн и

$$S_{nH}(x) = J_n(x) Y'_n(\mu_{ns}) - Y_n(x) J'_n(\mu_{ns}) \quad /2/$$

для TE -волн; собственные числа λ_{ns} и μ_{ns} определяют соответственно из уравнений

$$S_{nE}(\alpha\lambda_{ns}) = 0, \quad S'_{nH}(\alpha\mu_{ns}) = 0, \quad /3/$$

где $0 \leq \alpha = \frac{d}{b} < 1$, $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ - функции Бесселя и Неймана порядка n .

1. Кольцо в резонаторе

Вычисление полей стандартным методом разложения по собственным функциям резонатора дает следующее выражение для импеданса бесконечно-тонкого в радиальном направлении кольца:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n = i \frac{8\pi n}{k h b^2} \sum_{q=1}^{\infty} g_q^2 \left[\frac{k^2 - k_{rE}^2}{k^2 - k_{nE}^2} \cdot \frac{S_{nE}^2(k_{rE} r_0)}{k_{rE}^2 N_{rE} S_{rE}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{k r_0}{n} \right)^2 \frac{S_{nH}^2(k_{rH} r_0)}{(k^2 - k_{nH}^2) N_{sH}} \right], \quad /4/ \end{aligned}$$

где

$$N_{rE} = S_{nE}^2(\lambda_{ns}) - \alpha^2 S_{nE}^2(\alpha\lambda_{ns}) = \left(\frac{2}{\pi\lambda_{ns}} \right)^2 \cdot \left[1 - \frac{Y_n^2(\lambda_{ns})}{Y_n^2(\alpha\lambda_{ns})} \right],$$

$$N_{sH} = \left(1 - \frac{n^2}{\mu_{ns}^2} \right) S_{nH}^2(\mu_{ns}) - \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{\mu_{ns}^2} \right) S_{nH}^2(\alpha\mu_{ns}) =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi\mu_{ns}} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{n^2}{\mu_{ns}^2} \right) - \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{\mu_{ns}^2} \right) \frac{Y_n^2(\mu_{ns})}{Y_n^2(\alpha\mu_{ns})} \right]$$

- нормировочные постоянные; $k_{rE} = \frac{\lambda_{ns}}{b}$, $k_{rH} = \frac{\mu_{ns}}{b}$

$$k_z = \frac{\pi(2q-1)}{h}, \quad k_{nE, H}^2 = k_z^2 + k_{rE, H}^2, \quad \tilde{Z}_n = \frac{cZ_n}{4\pi n} \quad /значению$$

$\tilde{Z}_n = 1$ соответствует величина импеданса $Z_n/n = 377 \text{ Ом}/$.

Суммируя ряды /4/ по корням уравнений /3//6/, получим

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n = i \frac{2\pi^2 n}{k h} \sum_{q=1}^{\infty} g_q^2 \left[\left(\frac{k_z}{\chi_q} \right)^2 \frac{G_n(\chi_q r_0, \chi_q d) \cdot G_n(\chi_q b, \chi_q r_0)}{G_n(\chi_q b, \chi_q d)} + \right. \\ \left. + \left(\frac{k r_0}{h} \right)^2 \frac{G_n''(\chi_q r_0, \chi_q d) \cdot G_n''(\chi_q b, \chi_q r_0)}{G_n''(\chi_q b, \chi_q d)} \right], \quad /5/ \end{aligned}$$

где

$$G_n(x, y) = J_n(x)Y_n(y) - Y_n(x)J_n(y),$$

$$G_n''(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G_n(x, y),$$

$$\chi_q = \sqrt{k^2 - k_z^2}, \quad g_q = \frac{\sin k_z a_z}{k_z a_z}, \quad a_z - \text{аксиальный размер кольца.}$$

В дорезонансной области ($\text{Re } \chi_q^2 < 0$) при $\pi \frac{r_0 - d}{h} \gg 1$ вклад в импеданс за счет внутренней трубы экспоненциально мал, и формула /5/ дает выражение для импеданса кольца в обычном резонаторе /5/.

Когда кольцо расположено вблизи внутренней трубы так, что выполнено условие $\pi \frac{r_0 - d}{h} \ll 1$, для гармоник $n \ll \frac{\pi r_0}{h}$ имеем

$$\begin{aligned} \text{Im } \tilde{Z}_n = \frac{1}{\gamma^2} \left[\ln \frac{eh}{\pi a_z} + \ln \frac{\pi(r_0 - d)}{h} + \frac{1}{2} \right] + \\ + \left(\frac{r_0 - d}{d} \right)^2 \left[\ln \frac{h}{\pi(r_0 - d)} + \frac{1}{2} \right], \quad /6/ \end{aligned}$$

где $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = \frac{k r_0}{n}$. Заметим, что /6/ совпадает с формулой для импеданса кольца вблизи внешней трубы /5/, если заменить d на b и $r_0 - d$ на $b - r_0$.

Наибольший интерес представляют окрестности резонансов ($k \approx k_{nE, H}$), где импеданс представим в виде *

$$\tilde{Z}_n = i \left[P_n + R_n \frac{k_n}{k - k_n \cdot \left(1 - \frac{i}{2Q_n}\right)} \right].$$

На рис. 1 показана характерная зависимость величин P_{nsq} , R_{nsq} для TE -резонансов от радиального номера резонанса s и параметра a при $n = 5, q = 1, b/h = 10$.

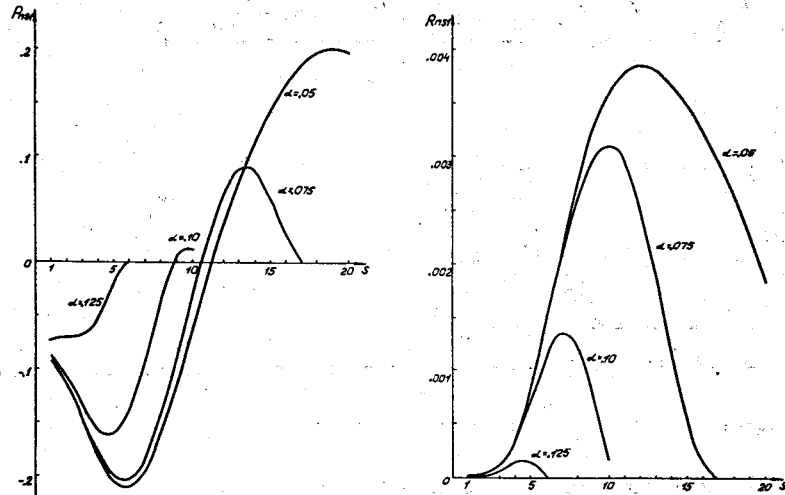


Рис. 1. Зависимость величин P_{ns1} и R_{ns1} для TE -резонансов от номера s при $n = 5, b/h = 10$.

Максимальные значения $|P_{nsq}|$ и R_{nsq} для TE -мод с $q=1$ в зависимости от номера гармоники n и a при $b/h = 10$ представлены на рис. 2. Сравнение этих графиков с результатами, полученными для обычного резонатора /5/,

* Здесь предполагается, что стенки резонатора имеют конечную проводимость, которая учтена введением добротности Q_n .

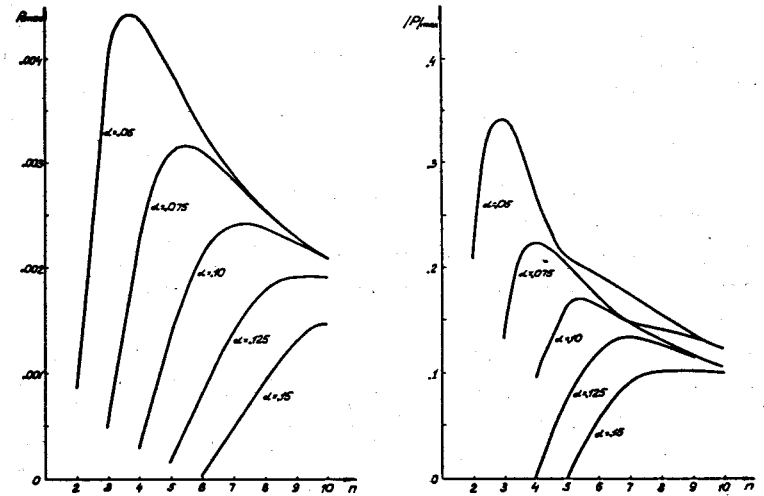


Рис. 2. Максимальные значения $|P_{ns1}|$ и R_{ns1} в зависимости от номера гармоники n при $b/h = 10$. Изломы на рис. 2а соответствуют переходу s_{max} из области малых значений, где $P_{ns1} < 0$, в область больших s , где $P_{ns1} > 0$.

показывает существенное уменьшение импеданса в резонансной области для гармоник с $n \leq 2\pi d/h$.

Условие устойчивости пучка с лоренцевским распределением по энергии в точном резонансе ($Re(k - k_n) = 0$) есть /5/

$$Q_n < \frac{\eta}{R_n} \left(1 - \frac{P_n}{\eta}\right)^{1/2}, \quad /7/$$

где $\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\gamma}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)^2$, $\nu = \frac{e^2}{mc^2} \cdot \frac{N_e}{2\pi r_0}$, N_e - число электронов в кольце, $mc^2 \cdot 2\Delta\gamma$ - разброс по энергии. Если энергетический спектр пучка ограничен снизу некоторым значением γ_{min} , для устойчивости необходимо также /5/

$$\left(1 - \frac{P_n}{\eta}\right)^{1/2} \leq \frac{\gamma - \gamma_{min}}{\Delta\gamma}. \quad /8/$$

Оценки по формулам /7/, /8/ показывают, что пучок с $\nu/\gamma = 8.10^{-3}$, $\Delta\gamma/\gamma = 5\%$ устойчив в резонаторе с $a = 0,075$, $b/h = 10$ /относительно азимутальных возмущений/ во всем интервале радиусов $d < r_0 < b$, если $Q_n \leq 40$ для $n = 5-8$.

2. Кольцо в волноводе

Общее выражение для импеданса бесконечно-тонкого кольца в коаксиальном волноводе было получено в /4/:

$$\begin{aligned} Z_n \approx & \frac{2\pi n}{k b^2} \sum_{k_{rE,H} < k} \left[\sqrt{k^2 - k_{rE}^2} \frac{S_{nE}^2(k, r_0)}{k_{rE}^2 N_{sE}} + \right. \\ & \left. + \frac{\beta^2}{\sqrt{k^2 - k_{rH}^2}} \cdot \frac{S_{nH}^2(k, r_0)}{N_{sH}} \right] + \\ & + i \frac{2\pi n}{k b^2} \sum_{k_{rE,H} > k} \left[\sqrt{k^2 - k_{rE}^2} \frac{S_{nE}^2(k, r_0)}{k_{rE}^2 N_{sE}} - \right. \\ & \left. - \frac{\beta^2}{\sqrt{k_{rH}^2 - k^2}} \cdot \frac{S_{nH}^2(k, r_0)}{N_{sH}} \right]. \end{aligned} \quad /9/$$

Однако в указанной работе не была прослежена зависимость импеданса от соотношения радиусов труб d/b ; исследование зависимости от n было проведено численно в частных случаях.

Рассмотрим сначала условия устойчивости пучка в волноводном резонансе ($k \approx k_n = k_{rH}$). Представляя импеданс в окрестности резонансов в виде

$$Z_n \approx P_n - i R_n \sqrt{\frac{k_n}{k_n (1 - \frac{i}{2Q_n}) - k}}, \quad /10/$$

найдем, что при $Re k = k_n$ пучок с лоренцевским распределением устойчив, если

$$Q_n^{1/2} < Q_{n \max}^{1/2} = \frac{2\eta}{R_n} \left[1 - \frac{P'_n}{2\eta} + \sqrt{2 \left(1 - \frac{P'_n + P''_n}{2\eta} \right)^{1/2}} \right], \quad /11/$$

где $P_n = P'_n + iP''_n$ / $P'_n > 0$, что соответствует нерезонансной потере энергии кольцом/. Для пучка с ограниченным энергетическим спектром имеет место дополнительное условие, аналогичное /8/:

$$1 + \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{P'_n + P''_n}{2\eta} \right)^{1/2}} < \frac{\gamma - \gamma_{\min}}{\Delta\gamma}. \quad /12/$$

Как подчеркнуто в работе /4/, наиболее сильными являются резонансы на TE_{n1} -модах, которые могут иметь место независимо от отношения $a = d/b$. Воспользовавшись асимптотическими формулами /7/ для $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ при $n \gg 1$, можно получить простые выражения для корней μ_{n1} и коэффициентов R_{n1} в следующих предельных случаях ($n \ll \gamma^3$):

$$1/ \quad (1 - a^2)^{-1/2} \ll n \ll (1 - a^2)^{-3/2}$$

$$\mu_{n1} \approx n \sqrt{\frac{2}{1 + a^2}} \quad /13/$$

$$R_{n1} \approx \frac{\pi n}{16\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2} \right)^3;$$

$$2/ \quad n \gg (1 - a^2)^{-3/2} \quad /14/$$

$$\mu_{n1} \approx n \left[1 + \left(\frac{3\pi}{4n} \right)^{2/3} \right]^{1/2},$$

$$R_{n1} \approx \frac{\Gamma^2(2/3)}{2^{1/2} \pi^{1/3}} \cdot \frac{1}{n} \approx \frac{0,88}{n}.$$

Формула /13/ подтверждает сделанный из анализа численных результатов вывод /4/ об увеличении модуля импеданса /в резонансе приблизительно равного $|\bar{Z}_n| \approx R_n \sqrt{2Q_n}$ / с ростом номера гармоники n . Своего максимума коэффициент R_{n1} , как функция n , достигает при

$$n = n_{max}(a) \approx \frac{4\Gamma(2/3)}{\pi^{2/3}} \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} \right)^{3/2} \approx 2,5 \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} \right)^{3/2} \quad /15/$$

и приблизительно равен в этом случае

$$(R_{n1})_{max} \approx \frac{\pi^{1/3} \Gamma(2/3)}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1-a^2}{1+a^2} \right)^{3/2} \approx 0,35 \left(\frac{1-a^2}{1+a^2} \right)^{3/2} \quad /16/$$

С дальнейшим увеличением n R_{n1} , согласно /14/, уменьшается и имеет те же значения, что и в волноводе радиуса b . Формулы /13- 16/ дают удовлетворительное согласие с результатами численного расчета, представленными на рис. 3а. Как следует из рис. 3б, нерезонансная часть импеданса P''_{n1} достигает максимума при тех же n , что и R_{n1} и для больших n приблизительно соответствует модулю импеданса кольца в свободном пространстве ($|\bar{Z}_n^{cb}| = 0,93 \cdot n^{-2/3}$), так же, как и в обычном волноводе /1/. Резонансные радиусы для $\beta = 1$ приведены на рис. 4.

Оценки по формуле /11/ для $a = 0,7$; $\nu/\gamma = 8 \cdot 10^{-3}$; $\frac{\Delta y}{y} = 5\%$ показывают, что устойчивость кольца в резонансе на $TE_{13,1}$ -моду, например, требует добротности $Q_{13,1} < 130$, на модах же с $n < 13$ допустимы существенно большие значения добротности.

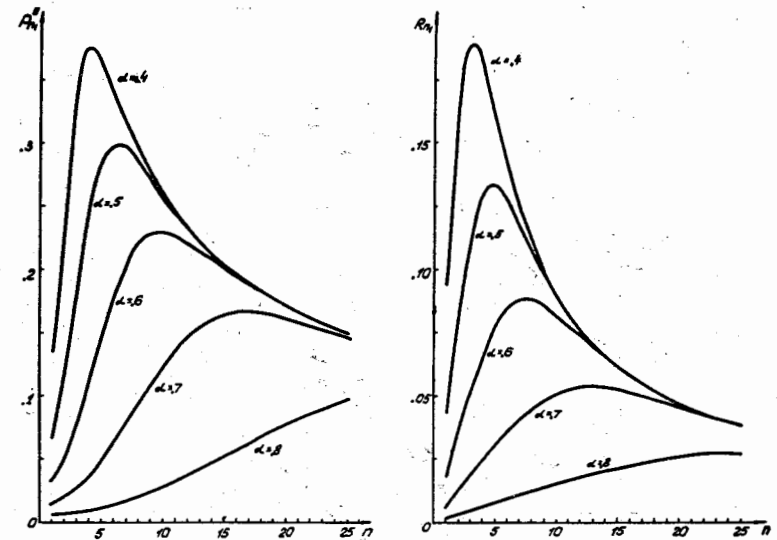


Рис. 3. Зависимость величин P''_{n1} и R_{n1} от номера гармоники n .

Вычисление добротности на TE -модах за счет конечной проводимости стенок коаксиала дает

$$Q_{ns} = \left(\frac{2\pi\sigma_b b}{c} \mu_{ns} \right)^{1/2} \cdot (S_{nH}^2(\mu_{ns}) + a \sqrt{\frac{\sigma_b}{\sigma_d}} S_{nH}^2(a\mu_{ns}/17))^{-1} \cdot N_{sH}$$

где $\sigma_{a,b}$ - проводимость внутренней и внешней труб. В предельном случае /13/ имеем

$$Q_{n1} \approx (2\pi n \frac{\sigma_b b}{c})^{1/2} \cdot \frac{1-a^2}{1+a\sqrt{\frac{\sigma_b}{\sigma_d}}} \quad /18/$$

При $\frac{\sigma_b b}{c} = 2,5 \cdot 10^6$, $\sigma_d \gg \sigma_b$ по формуле /18/ для рассматриваемого случая получим $Q_{13,1} \approx 7 \cdot 10^3$, то есть условие устойчивости не выполнено.

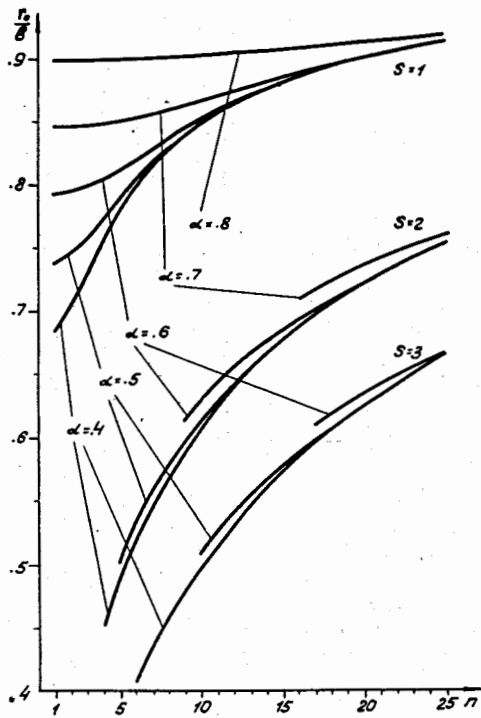


Рис. 4. Резонансные значения радиусов в коаксиальном волноводе в зависимости от номера гармоники n .

Резонансы на модах TE_{ns} с $s \geq 2$, значительно более слабые, чем TE_{n1} -резонансы, возможны для гармоник $n \geq \frac{\pi s a}{1-\alpha}$. На рис. 5 показана зависимость величин

R_{n2} , P_{n2} от номера гармоники n при разных α .

Вернемся к анализу импеданса /9/. Ряд /9/ содержит расходящуюся часть, обусловленную так называемыми квазистатическими полями кольца /1-5/. Выделяя ее, запишем /9/ в виде $\bar{Z}_n = \bar{Z}_n^{\text{стат}} + \bar{Z}_n^{\text{волн}}$, где $\bar{Z}_n^{\text{волн}} = \bar{Z}_n |_{\beta=1}$.

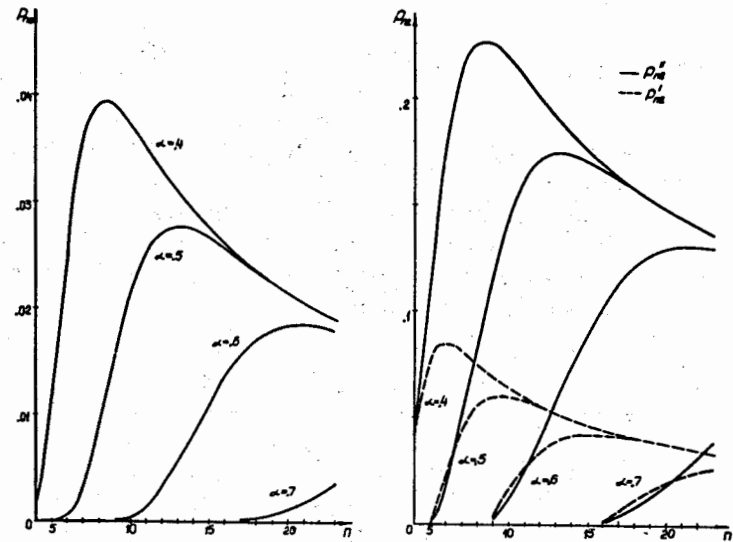


Рис. 5. Зависимость величин P'_{n2} , P''_{n2} и R_{n2} от номера гармоники n .

Для вычисления $\bar{Z}_n^{\text{стат}}$ воспользуемся процедурой обрывания соответствующего ряда при k , $\alpha \approx 1$, что, как известно /3/, приводит к правильному результату. Для гармоник $n \ll \frac{\pi a}{1-\alpha}$, когда корни уравнений /3/ представимы в виде

$$\lambda_{ns} \approx \mu_{n,s+1} \approx \frac{\pi s}{1-\alpha},$$

получим при $\pi a \ll b-d$:

$$\bar{Z}_n^{\text{стат}} \approx \frac{i}{\beta \gamma^2} \left\{ \ln \left[\frac{2(b-d)}{\pi a} \cdot \sin \left(\pi \frac{b-r_0}{b-d} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\}. \quad /19/$$

В предельных случаях имеем:

$$1/ \quad \pi \frac{b-r_0}{b-d} \ll 1, \quad \bar{Z}_n^{\text{стат}} \approx \frac{i}{\beta \gamma^2} \left[\ln \frac{2(b-r_0)}{a} + \frac{1}{2} \right];$$

$$2/\pi \frac{r_0 - d}{b - d} \ll 1, \quad \bar{Z}^{\text{стат}} \approx \frac{i}{\beta \gamma^2} \left[\ln \frac{2(r_0 - d)}{a} + \frac{1}{2} \right]$$

в соответствии с известной формулой для выпрямленного пучка у плоскости.

Волновая часть импеданса для гармоник $n = n_{\text{max}}(\alpha)$ /как показывают расчеты, для данного a импеданс достигает максимальных значений вне резонансов при $n \approx n_{\text{max}}(\alpha)$ / представлена на рис. 6.

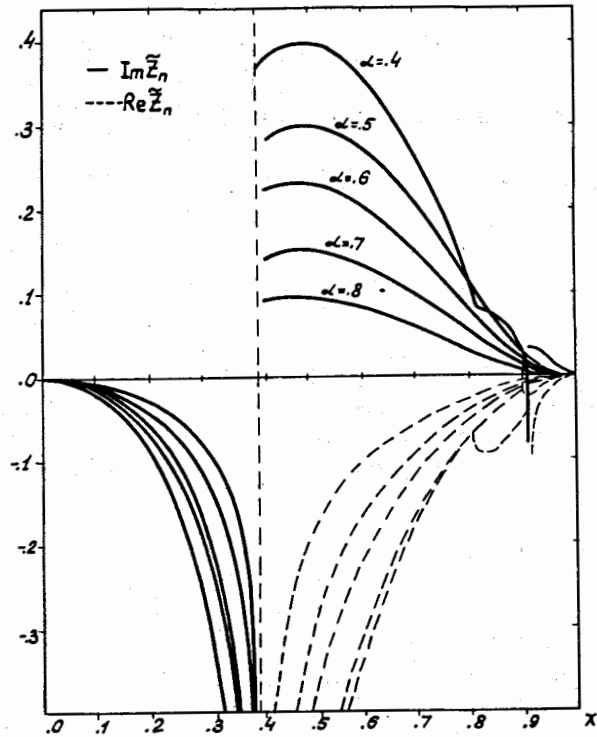


Рис. 6. Волновая часть импеданса для гармоник $n = n_{\text{max}}(\alpha)$ в зависимости от $x = \frac{b - r_0}{b - d}$

3. Кольцо, экранированное внутренним цилиндром

Определенный интерес представляет также вычисление импеданса кольца, экранированного одной внутренней трубой. Соответствующее выражение можно найти предельным переходом из формулы для импеданса кольца в коаксиальном волноводе, эквивалентной /9/:

$$\bar{Z}_n = i \frac{\pi n}{k} \int_0^\infty \left[\left(\frac{k_z}{X} \right)^2 \frac{G_n(\chi r_0, \chi d) G_n(\chi b, \chi r_0)}{G_n(\chi b, \chi d)} + \beta^2 \frac{G_n''(\chi r_0, \chi d) G_n''(\chi b, \chi r_0)}{G_n''(\chi b, \chi d)} \right] dk_z, \quad /20/$$

где $\chi^2 = k^2 - k_z^2$, а контур интегрирования выбран так, чтобы $\text{Im} \chi > 0$. Устремляя $b \rightarrow \infty$, имеем

$$Z_n = i \frac{\pi n}{k} \int_0^\infty \left[\left(\frac{k_z}{X} \right)^2 G_n(\chi r_0, \chi d) \frac{H_n(\chi r_0)}{H_n(\chi d)} + \beta^2 G_n''(\chi r_0, \chi d) \frac{H_n'(\chi r_0)}{H_n'(\chi d)} \right] dk_z, \quad /21/$$

где $H_n(x)$ - функция Ганкеля первого рода. Используя далее легко проверяемые соотношения

$$\int_0^\infty \frac{G_n^2(wX, wx)}{J_n^2(wx) + Y_n^2(wx)} \cdot \frac{w dw}{w^2 - z^2} = - \frac{\pi H_n(zX)}{2H_n(zx)} \cdot G_n(zX, zx),$$

$$\int_0^\infty \frac{G_n''(wX, wx)}{J_n'^2(wx) + Y_n'^2(wx)} \cdot \frac{w dw}{w^2 - z^2} = \frac{n}{4z^2 X^2} \left[1 - \left(\frac{x}{X} \right)^{2n} \right] - \frac{\pi H_n'(zX)}{2H_n'(zx)} \cdot G_n''(zX, zx), \quad /22/$$

где $0 \leq x \leq X$, окончательно получим ($\beta = 1$):

$$\begin{aligned}
Z_n = & \pi \int_0^n [(n^2 - x^2)] \frac{G_n^2(x, xp)}{J_n^2(xp) + Y_n^2(xp)} + \\
& + x \frac{G_n''^2(x, xp)}{J_n'^2(xp) + Y_n'^2(xp)} \Big] \frac{dx}{x \sqrt{n^2 - x^2}} + \\
& + i \int_n^\infty [(x^2 - n^2)] \frac{G_n^2(x, xp)}{J_n^2(xp) + Y_n^2(xp)} - \\
& - x^2 \frac{G_n''^2(x, xp)}{J_n'^2(xp) + Y_n'^2(xp)} \Big] \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - n^2}} \Big\} ,
\end{aligned}$$

/23/

где $p = \frac{d}{r_0}$. В пределе $p \rightarrow 0$ формула /23/ дает, как

и следовало ожидать, выражение для импеданса пучка в свободном пространстве /1/.

Результаты расчета по формуле /23/ представлены на рис. 7. Сравнение их с соответствующими результатами для коаксиального волновода показывает, что при значениях a , не слишком близких к единице, наличие внешней трубы не сказывается существенно на величине импеданса кольца, расположенного вблизи внутренней /исключая, конечно, резонансные значения радиуса/.

4. Заключение

Внутренний проводящий цилиндр, помещенный в камеру адгезатора, приводит к значительному уменьшению величины импеданса вблизи него и сдвигу резонансных радиусов для наиболее опасных мод в сторону меньших значений.

В коаксиальном волноводе с увеличением отношения $a = d/b$ резонансные значения радиуса для TE_{n1} -мод

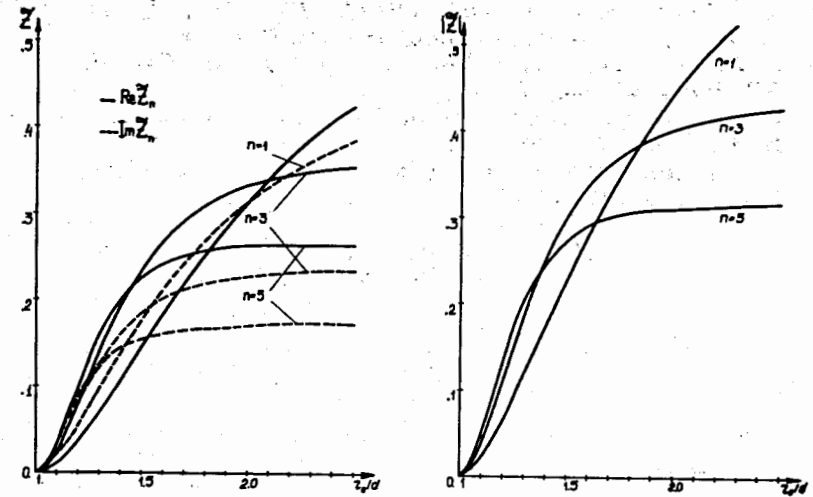


Рис. 7. Волновая часть импеданса кольца, экранированного внутренним цилиндром.

с $n \leq n_{max}(a)$ приближаются к радиусу внешней трубы, однако, это не приводит к уменьшению "традиционной" области устойчивости кольца вблизи внешней стенки волновода, так как максимальные значения Z_n/n достигаются при $n^a \geq n_{max}(a)$. Вместе с тем появляется дополнительная область устойчивости вблизи внутреннего цилиндра, остающаяся и при удалении внешней стенки на бесконечность.

В результате введение внутренней трубы позволяет существенно ослабить требования азимутальной устойчивости на конечной стадии сжатия электронного кольца и при его ускорении.

Авторы благодарны Э.А.Перельштейну и Л.А.Юдину за полезные замечания.

Литература

1. И.Л.Корнев, Л.А.Юдин. Радиофизика, 15, №2, 272 /1972/.
2. А.Г.Бонч-Осмоловский, Э.А.Перельштейн. Радиофизика, 13, №7, 1082 /1970/.

3. А.Г.Бонч-Осмоловский. ОИЯИ, Р9-6318, Дубна, 1972.
4. A.Falens, L.J.Laslett. LBL-1070, Berkeley, Calif., 1972.
5. Ю.И.Алексахин, И.Л.Коренев, Л.А.Юдин. ОИЯИ, Р9-7065, Дубна, 1973.
6. Г.Бухгольц. Расчет электрических и магнитных полей. И.Л., Москва, 1961.
7. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов. Ф.М., Москва, 1962.

*Рукопись поступила в издательский отдел
26 июля 1973 года.*