

с 353 а

A-139

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



P9 - 7239

Х.О.Абдуллоев, В.Г.Маханьков

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ
СЛАБОТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

Р9 - 7239

Х.О.Абдуллоев, В.Г.Маханьков

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ
СЛАБОТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

Направлено в ЖЭТФ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

§1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих работах ^{1,2/} было получено и исследовано уравнение для корреляционных функций квазистационарной (ℓ) ленгмюровской турбулентности в изотермической плазме.

Напомним кратко основные результаты этих работ.

1. Мнимая часть нелинейного дисперсионного уравнения определяет спектр W_k^ℓ , а действительная - корреляционную функцию $\phi^\ell(k, \omega)$ квазистационарной турбулентности.

Коррелятор I_k^ℓ , определяемый из формулы

$$\langle E_k^\ell, E_k^{\ell *} \rangle = I_k^\ell \delta(k - k'), \quad /1.1/$$

/где $k = \{k^2, \omega\}$ /, может быть представлен в виде

$$I_k^\ell = W_k^\ell \phi^\ell(k, \omega), \quad \epsilon_I^\ell = \frac{\omega_k}{8\pi} \frac{\partial \epsilon^\ell(\omega, k)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_k}^\ell, \quad /1.2/$$

так что $\int I_k^\ell d\omega = W_k^\ell$. Отсюда получается условие нормировки для $\phi^\ell(k, \omega)$

$$\int \phi^\ell(k, \omega) d\omega = 1. \quad /1.3/$$

2. При достаточно низком уровне ℓ -турбулентности ($W_0^\ell/nT < k_0^2 d_e^2$ / k_0 - характерное волновое число, а $W_0^\ell = \int W_k^\ell dk$ - плотность энергии ℓ -турбулентности, d_e - дебаевский радиус электронов/ спектр W_k^ℓ фактически не зависит от вида корреляционной кривой и может быть найден независимо от нее.

В случае $W_0^{\ell}/nT > k_0^2 d_e^2$ уравнения для спектра турбулентности и для корреляционной функции должны решаться совместно.

3. Корреляционная функция $\phi^{\ell}(k, \omega)$ в области $k < k_*$ с хорошей точностью аппроксимируется Лоренцевой кривой

$$\phi^{\ell}(k, \omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma(k)}{(\omega - \gamma(k))^2 + (\gamma(k))^2}, \quad /1.4/$$

где $\omega = (\omega/\omega_{pe}) - 1$, $\gamma(k)$ - спонтанная часть четырехплазменного взаимодействия в единицах ω_{pe} , $\gamma(k)$ - сдвиг частоты, определяемый как тепловым движением, так и индуцированной частью нелинейных взаимодействий.

Наибольшую ширину, согласно [2], имеет корреляционная функция $\phi^{\ell}(k, \omega)$, у которой k соответствует k_0 -максимуму в спектре ℓ -турбулентности, т.е. $W_k^{\ell}|_{k=k_0} = \max W_k^{\ell}$. С увеличением и уменьшением k ширина $\phi^{\ell}(k, \omega)$ монотонно уменьшается, примерный график $\gamma(k)$ представлен на рис. 1.

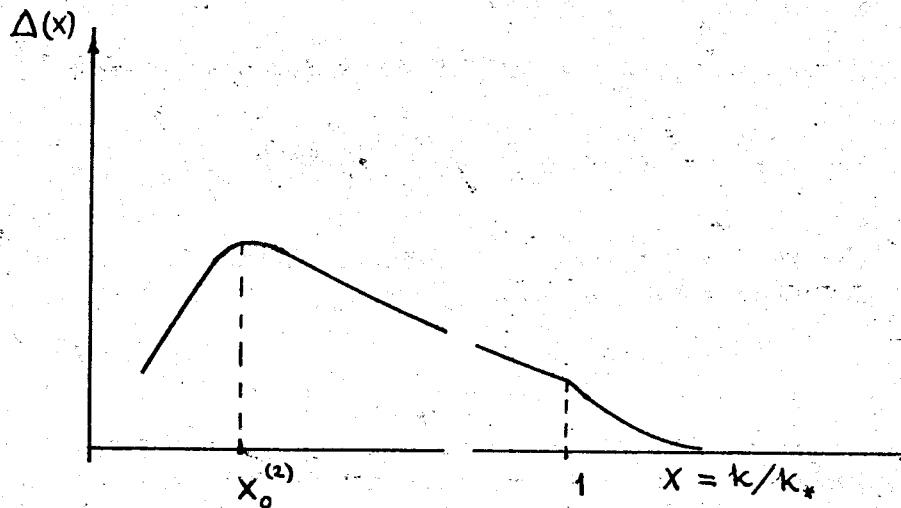


Рис. 1. Примерный график зависимости ширины корреляционной функции ленгмюровских колебаний Δ^{ℓ} от волнового числа в изотермической плазме ($T_e = T_i$).

В области $k > k_*$ ширина корреляционной кривой резко уменьшается с ростом k , примерно в $(k/k_*)^4$ раз, что связано со значительным падением эффективности 4-плазменных взаимодействий при $k > k_*$.

В случае неизотермической плазмы $T_e \gg T_i$, когда возможно распадное взаимодействие ленгмюровских волн с участием ионно-звуковых, результаты могут существенно образом измениться.

§2. ПОЛУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

Будем исходить из известного уравнения для турбулентной части поля ленгмюровских колебаний $E^{\ell T} = E^{\ell} - \langle E^{\ell} \rangle$

$$\omega \epsilon^{\ell}(\omega, \vec{k}) E_{k, \omega}^{\ell T} = -4\pi i (j_2^{\ell T}(\omega, \vec{k}) + j_3^{\ell T}(\omega, \vec{k}) + \dots), \quad /2.1/$$

где $\epsilon^{\ell}(\omega, \vec{k})$ - линейный тензор диэлектрической проницаемости, $j_2^{\ell T}$ и $j_3^{\ell T}$ - соответственно турбулентные части токов второго и третьего порядков по полю. Поскольку в неизотермической плазме $T_e \gg T_i$ возможно существование ионно-звуковых (s) колебаний и взаимодействие их с ленгмюровскими, в токе второго и третьего порядка $j_2^{\ell T}$ и $j_3^{\ell T}$ должны быть учтены члены, пропорциональные E_k^{sT} , т.е.

$$j_2^{\ell T}(\omega, \vec{k}) = 2 \int S^{\ell}(k, k_1, k_2) E_{k_1}^{Ts} E_{k_2}^{T\ell} d\lambda$$

$$d\lambda = \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2$$

$$j_3^{\ell T}(\omega, \vec{k}) = \int \Sigma(k, k_1, k_2, k_3) (E_{k_1}^{T\ell} E_{k_2}^{Ts} E_{k_3}^{Ts} + E_{k_1}^{Ts} E_{k_2}^{T\ell} E_{k_3}^{Ts} + E_{k_1}^{Ts} E_{k_2}^{Ts} E_{k_3}^{T\ell} - E_{k_1}^{T\ell} \langle E_{k_2}^{Ts} E_{k_3}^{Ts} \rangle) \times$$

$$\times \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3.$$

Умножая /2.1/ на $E_k^{T\ell}$ и интегрируя по k' , с учетом этих выражений получим после стандартной процедуры усреднения по статистическому ансамблю*

$$\begin{aligned} \epsilon^\ell(k) I_k^\ell &= \frac{8\pi i}{\omega} \{ I_k^\ell \int \Sigma'(k, k_1) (I_{k_1}^\ell + I_{k_1}^s) dk_1 - \\ &- 4\pi i \int \frac{|S^\ell(k, k_1, k_2)|^2}{\omega \epsilon^\ell(-k_1 - k_2)} I_{k_1}^\ell I_{k_2}^s d\lambda + (4\text{-плазменная часть}) \}. \end{aligned} \quad /2.2/$$

Отсюда, объединяя индуцированные члены и перенося их в левую часть, получим

$$\begin{aligned} (\epsilon^\ell(k) + \epsilon^N(k)) I_k^\ell &= \frac{32\pi^2}{\omega^2} \frac{1}{\epsilon^\ell(-k)} \int (|S^\ell(k, k_1, k_2)|^2 I_{k_1}^\ell I_{k_2}^s d\lambda + \\ &+ |\tilde{\Sigma}'(k, k_1, k_2, k_3)|^2 I_{k_1}^\ell I_{k_2}^\ell I_{k_3}^\ell \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \\ \epsilon^N(k) &= - \frac{8\pi i}{\omega} \int \Sigma'(k, k_1) (I_{k_1}^\ell + I_{k_1}^s) dk_1 + \\ &+ /четырёхплазменная индуцированная часть/. \end{aligned} \quad /2.3/$$

Это уравнение справедливо вдали от резонансной частоты $\omega = \omega_k^\ell$, вблизи которой $\epsilon^\ell(-k, -\omega_k^\ell) \rightarrow 0$. Как показано в /1, 2/, для получения точного уравнения, описывающего корреляционные эффекты вблизи резонансной линии $\omega \rightarrow \omega_k^\ell$, в правой части /2.3/ достаточно формально заменить $\epsilon^\ell(-k)$ на $\epsilon^\ell(-k) + \epsilon^N(-k)$; учитывая, что $\epsilon^\ell(-k) = \epsilon^{\ell*}(k)$, получим искомое уравнение:

$$I_k^\ell = \frac{32\pi^2}{\omega^2} \frac{1}{|\epsilon^\ell(k) + \epsilon^N(k)|^2} \int (|S^\ell(k, k_1, k_2)|^2 I_{k_1}^\ell I_{k_2}^s d\lambda +$$

* 4-плазменная часть уравнения /2.2/ получается при учете токов $j_4^{T\ell}$ и $j_5^{T\ell}$.

$$+ |\tilde{\Sigma}'(k, k_1, k_2, k_3)|^2 I_{k_1}^\ell I_{k_2}^\ell I_{k_3}^\ell \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3). \quad /2.4/$$

Уравнение /2.4/ может быть выведено более строгим методом, изложенным в работе /1/, однако ввиду громоздкости выкладок мы здесь этот вывод не приводим /относительно определений функций $S, \Sigma'(k, k_1)$ и $\tilde{\Sigma}'(k, k_1, k_2, k_3)$ см. работу /1//.

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

Как показано Цытовичем /4/, распадные взаимодействия $\ell \rightarrow \ell' + s$, разрешенные в неизотермической плазме, приводят к изменению спектра ℓ -турбулентности практически во всей области волновых чисел.

Рассмотрим вначале область $k < k_*$. Здесь влияние распадов на спектр W_k^ℓ при одинаковой мощности генерации Q , согласно /4/, сводится к уменьшению основного масштаба турбулентности и уровня энергии, ему соответствующего. Это уменьшение можно оценить из формулы

$$\frac{k_0^{(2)}}{k_0^{(1)}} = \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{\frac{1}{\nu-1}}, \quad \frac{\max W_k^{\ell(2)}}{\max W_k^{\ell(1)}} = \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{\frac{1}{\nu-1}}, \quad /3.1/$$

где $k_0^{(2)}, W_k^{\ell(2)}$ и $k_0^{(1)}, W_k^{\ell(1)}$ относятся соответственно к изотермической и неизотермической плазме. Напомним, что $W_k^\ell \sim (k_0/k)^\nu$ при $k_* > k > k_0$ и $\max W_k^{\ell(1)} = W_{k_0}^{\ell(1)}$, $\max W_k^{\ell(2)} = W_{k_0}^{\ell(2)}$.

Кроме того, нетрудно проверить, используя явный вид спектров $W_k^{\ell(1)}$ и $W_k^{\ell(2)}$, что в случае $k_0^{(1)}, k_0^{(2)} \ll k_*$

$$\int_0^{k_*} W_k^{\ell(1)} dk = \int_0^{k_*} W_k^{\ell(2)} dk = W_0^\ell.$$

Этот результат следует также из элементарных соображений баланса энергии, если энергосодержащая область находится при $k \ll k_*$.

Поскольку спектры $W_k^{\ell(1)}$ и $W_k^{\ell(2)}$ формально совпадают, мы можем и в случае $T_e \gg T_i$ применить результаты /2/.

1. Следовательно, корреляционные уширения ввиду их интегральной зависимости от W_k^{ℓ} для спектров $W_k^{\ell(2)}$ и $W_k^{\ell(1)}$ по порядку величины одинаковы при одинаковых T_e и уменьшаются с ростом T_e приблизительно как $(1/T_e^2)$. 2. Наибольшую ширину при $T_e \gg T_i$ имеет корреляционная кривая $\phi^{\ell}(k, \omega)$ при $k = k_0^{(1)e}$, а не $k = k_0^{(2)}$. График зависимости корреляционной ширины от k представлены на рис. 2.

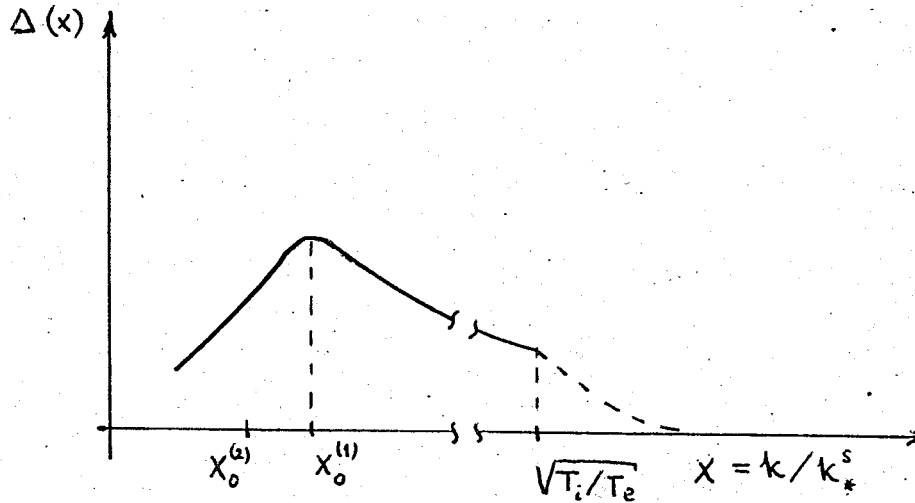


Рис. 2. График зависимости Δ^{ℓ} от $y = (k/k_*^s)$ в неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) в области $y < \sqrt{T_i/T_e}$.

Теперь перейдем к области волновых чисел $k > k_*$, где влияние неизотермичности плазмы может быть весьма существенным или даже определяющим. Из уравнения /2.4/ следует, что при $T_e = T_i$ первый член в правой части обращается в нуль и все корреляционные эффекты опять определяются 4-плазмонными взаимодействиями. Однако при $k > k_*$ их эффективность резко падает как $(k_*/k)^4$ см. /1/. Если же плазма неизотермична, то начинает играть роль первый /распадный/ член.

Рассмотрим, к какому корреляционному уширению он может привести. Заметим сразу, что в неизотермической плазме, кроме характерного волнового числа k_* , появляется еще одно число $k_*^s = k_* (T_e/T_i)^{1/2}$.

Если k_* , грубо говоря, разделяет области, в которых доминирует либо индуцированное рассеяние плазмонов на ионах ($k > k_*$) либо рассеяние плазмонов друг на друге ($k < k_*$), то k_*^s отделяет область волновых чисел ℓ -плазмонов $k > k_*^s$, способных распадаться с участием ионно-звуковых колебаний. Поэтому как спектр W_k^{ℓ} , так и корреляционные функции $\phi^{\ell}(k, \omega)$ будут различны при k больших или меньших k_*^s . Так, согласно /4/, для случая $T_e \gg T_i$ спектр $W_k^{\ell} = const$ при $k > k_*^s$ и увеличивается в $(T_e/T_i)^2$ раз с уменьшением k от k_*^s до k_* . Наконец, при $k < k_*$ он переходит в обычной степенной.

После несложных преобразований уравнение /2.4/ в области $k > k_*$ можно привести к виду

$$\begin{aligned} \phi^{\ell}(k, \omega) W_k^{\ell} &= \frac{1}{2} \frac{k^2}{\pi n_0 T_e} \frac{1}{|\epsilon^{\ell} + \epsilon N|^2} \int \left(\frac{\vec{k}_1 \vec{k}_2}{k_1 k_2} \right)^2 \times \\ &\times W_{k_1}^{\ell} dk_1 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) [W_{k_2}^s \delta(\omega_2 - \omega_{k_2}^s) + \\ &+ W_{-k_2}^s \delta(\omega + \omega_{k_2}^s)] \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) dk_2 d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned} \quad /3.2/$$

Будем считать s и ℓ турбулентности изотропными.

Уравнение /3.2/ в предположении, что нелинейный сдвиг частоты и уширение корреляционных функций достаточно малы, так что $\Delta\omega^N(k)$, $\gamma(k) \ll \omega_{pe} k_*^2 d_e^2$ может быть решено методом последовательных приближений. В первом приближении в правой части /3.2/ можно считать $\phi^{\ell}(k, \omega) = \delta(\omega - \omega^{\ell}(k))$ и $\phi^s(k, \omega) = \delta(\omega - \omega^s(k))$ /здесь $\omega^{\ell}(k)$ и $\omega^s(k)$ - решения линейного дисперсионного уравнения/. При этом после интегрирования по частоте интегральное уравнение сводится к простому интегрированию. Условие $\Delta\omega^N(k)$, $\gamma(k) \ll \omega_{pe} k_*^2 d_e^2$ в силу преимущественно дифференциального характера не-

линейных взаимодействий при $k \gg k_*$ представляет собой

$$\frac{W_{k_*}^\ell}{n_0 T_e} \ll k_*^2 d_e^2 \sqrt{T_i / T_e}$$

или

$$\frac{W_0^\ell}{n_0 T_e} \ll k_*^2 d_e^2 \left(\frac{k_*}{k_0}\right)^2 = \frac{m_e}{m_i} \frac{T_i}{T_e} \sqrt{\frac{Q}{Q_{cr}}} \quad /3.3/$$

То же условие слабой нелинейности в энергосодержащей области волновых чисел /вблизи $k_0 \ll k_*$ / есть

$$\frac{W_0^\ell}{n_0 T_e} \ll k_0^2 d_e^2 \quad /3.4/$$

Сравнивая их, видим, что правая часть /3.4/ в $(k_0/k_*)^4$ раз меньше /3.3/. Следовательно, использовать для нахождения спектров и корреляционных функций уравнения теории слабой турбулентности в области $k > k_*$ можно даже тогда, когда в энергосодержащей области условие /3.4/ нарушено и турбулентность здесь считать слабой нельзя. Таким образом /разве что за исключением k_0 окрестности точки $2k_*^s$ /, корреляционные эффекты при $k > k_*$ фактически не зависят от того, что происходит в энергосодержащей области.

В дальнейшем удобно перейти к безразмерным переменным

$$x = (k_2/k_*^s) \quad \text{и} \quad y = (k/k_*^s) \quad /3.5/$$

Для отыскания функции $\phi^\ell(k, \omega)$ мы будем использовать спектры W_k^ℓ и W_k^s , полученные в /4/.

* Исключение составляет окрестность точки $k = 2k_*^s$ шириной $\Delta k \sim k_0$ основного волнового числа ℓ -турбулентности. В этой окрестности в корреляции вносит вклад вся энергосодержащая область.

Если мощность генерации ℓ -турбулентности достаточно велика, так что нелинейное затухание ионно-звуковых волн больше затухания Ландау, т.е. $Q > Q_{cr} = (m_e/m_i)^3 (\omega_{pe} n_0 T_e / 12)$, то

$$\frac{k_*^s W_k^s}{n_0 T_e} = \frac{W_1^s}{n_0 T_e} x^2 = \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{5/2} \sqrt{\frac{Q}{Q_{cr}}} x^2, \quad /3.6/$$

в противоположном случае $Q < Q_{cr}$

$$\frac{k_*^s W_k^s}{n_0 T_e} = \frac{W_2^s}{n_0 T_e} \delta = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right) \frac{Q}{Q_{cr}} \delta \quad /3.7/$$

$$\delta = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 4/3, & x > 1 \end{cases}$$

Спектр ленгмюровской турбулентности в обоих случаях, естественно, одинаков

$$\frac{k_*^s W_{k_*^s}^\ell}{n_0 T_e} = \frac{W_*^\ell}{n_0 T_e} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{Q}{Q_{cr}}}, \quad y \geq 1 \quad /3.8/$$

$$\frac{k_*^s W_k^\ell}{n_0 T_e} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{Q}{Q_{cr}}} \left[1 + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2 (1-y)\right], \quad \sqrt{\frac{T_i}{T_e}} \leq y \leq 1 \quad /3.9/$$

Учитывая сделанное выше замечание и предполагая неравенство /3.3/ выполненным, с помощью /3.6/-/3.9/ получим

$$\phi_I^\ell(\omega, y) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{8} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \frac{1}{k_*^s v_s} \sqrt{\frac{Q}{Q_{cr}}} \times \frac{\zeta(y)}{|\epsilon^\ell + \epsilon^N|^2} \frac{1}{[1 + (\frac{T_e}{T_i})^2 (1-y)]} \quad /3.10/$$

при $Q > Q_{cr}$.

$$\phi_2^\ell(\omega, y) = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \frac{1}{k_*^s v_s} \frac{Q}{Q_{cr}} \frac{\xi(y)}{|\epsilon^\ell + \epsilon^N|^2} \times \quad /3.11/$$

$$\times \frac{1}{[1 + (\frac{T_e}{T_i})^2 (1-y)]}$$

при $Q < Q_{cr}$. В пределе малых и больших значений y можно получить простые разложения $\zeta(y)$ и $\xi(y)$.

$$\zeta(y) \approx \frac{1}{y} \int_{2(1-y)}^{2(1+y)} dx \frac{(x^2 - 2x - 2y^2)^2}{(y^2 + 2x)^2} x \quad /3.12/$$

$$\xi(y) \approx \frac{4}{3} \int_{2(1-y)}^{2(1+y)} dx \frac{(x^2 - 2x - 2y^2)^2}{(y^2 + 2x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

и

$$\zeta(y) \approx \int_0^{2y} \frac{(x^2 - 2y^2)^2}{y^4} \frac{dx}{x} \quad /3.13/$$

$$\xi(y) \approx \int_0^1 dx \frac{(x^2 - 2y^2)^2}{y^4} x + \frac{4}{3} \int_1^{2y} \frac{(x^2 - 2y^2)^2}{y^4} \frac{dx}{x}$$

Введем $\Delta^\ell(k) = \gamma^\ell(k) / k_* v_s$ — эффективную безразмерную ширину спектральной линии ленгмюровских колебаний, определяемую из формулы

$$\Delta^\ell = \pi \frac{|\epsilon^\ell + \epsilon^N|^2}{(\partial \epsilon^\ell / \partial \omega)^2} \frac{\phi^\ell(\omega, y)}{k_*^s v_s} \quad /3.14/$$

Используя /3.10/-/3.14/, получим

$$\Delta_1^\ell = \frac{1}{2} [1 + (\frac{T_e}{T_i})^2 (1-y)]^{-1} \left(\frac{m_i}{m_e}\right) \frac{W_*^\ell}{n_0 T_e} y^2 \quad /3.15/$$

при $y \ll 1$

$$\Delta_2^\ell = \frac{1}{2} [1 + (\frac{T_e}{T_i})^2 (1-y)]^{-1} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left[\frac{m_i}{m_e} \frac{W_*^\ell}{n_0 T_e}\right]^2 y^2$$

и

$$\Delta_1^\ell = \frac{1}{3} \left(\frac{m_i}{m_e}\right) \frac{W_*^\ell}{n_0 T_e} y \quad /3.16/$$

$$\Delta_2^\ell = \frac{1}{2} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \left[\frac{m_i}{m_e} \frac{W_*^\ell}{n_0 T_e}\right]^2 \frac{1}{y} \ln \frac{y}{e} \quad \text{при } y \ll 1$$

Графики зависимости Δ^ℓ от y представлены на рис. 3 и 4 при $Q < Q_{cr}$ и $Q > Q_{cr}$ соответственно.

Исследуем теперь узкую область вблизи $y \approx 2$ с шириной порядка $y_0 = k_0 / k_*^s$. Из уравнения /3.2/ следует, что в этой области волновых чисел в подинтегральном выражении существенным может оказаться вклад энергосодержащей области вблизи $y \approx y_0$. Действительно, подставляя $y=2$, видим, что при $x=2-\Delta k_0$ под интеграл входит W_k^ℓ в точке $W \sqrt{4-2x} = W_{y_0}$. Исходя из этого, легко оценить величину $\Delta^\ell(y \approx 2)$:

$$\Delta_1^\ell(2) \approx \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{y_0} \frac{W_0^\ell}{n_0 T_e}, \quad \frac{W_0^\ell}{n_0 T_e} > y_0 \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{3/2} \quad /3.17/$$

$$\Delta_2^\ell(2) \approx \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{m_i}{m_e} \frac{1}{y_0} \frac{W_0^\ell}{n_0 T_e}\right)^2, \quad \frac{W_0^\ell}{n_0 T_e} < y_0 \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{3/2}$$

Следует отметить, что эти формулы справедливы, если вблизи точки $y=y_0$ существует энергосодержащая область /кern/. Исходя из вида спектра при $y < y_0$ и $y = \sqrt{T_i/T_e}$ и условия шивки, легко получить

$$\frac{W_0^\ell}{n_0 T_e} \approx (T_e/T_i)^{1/2} y_0^{-2} \frac{W_*^\ell}{n_0 T_e}$$

Используя формулу для y_0 /см. /4/, стр. 205/

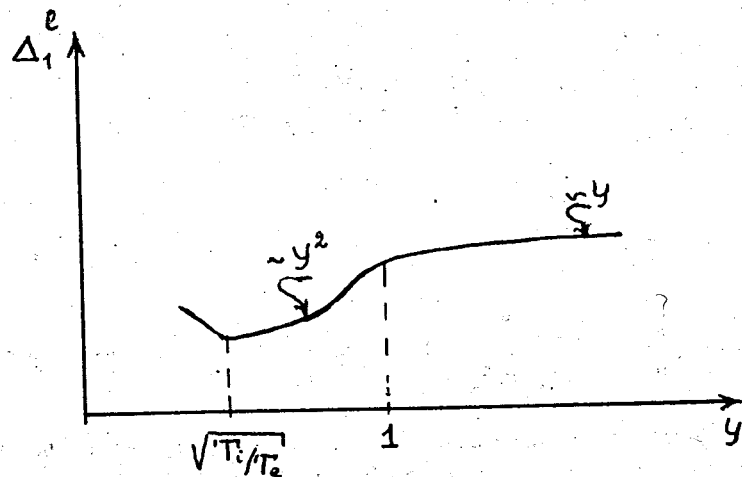


Рис. 3. Зависимость Δ_1^e от y в области $y > \sqrt{T_i/T_e}$ при $Q > Q_{cr}$.

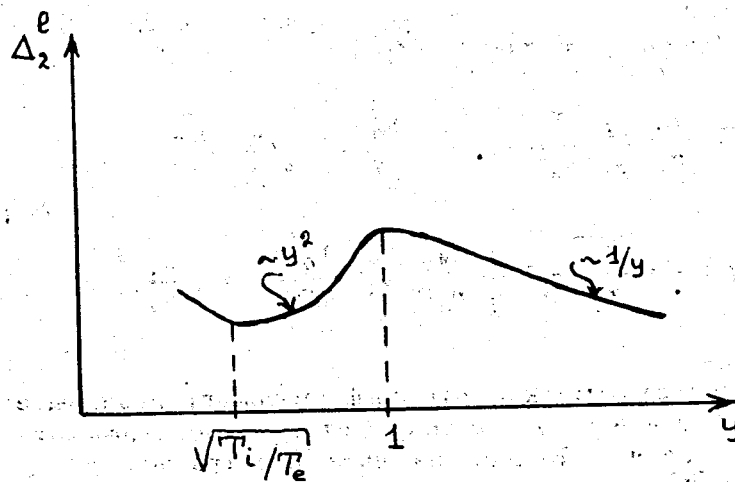


Рис. 4. Зависимость Δ^e от y в области $y > \sqrt{T_i/T_e}$ при $Q < Q_{cr}$.

$$y_0 = \left(\frac{T_i}{T_e} \frac{m_i}{m_e} \right)^{3/4} \left(\frac{\nu_e}{\omega_{pe}} \right)^{1/2} \left(\frac{Q}{Q_{cr}} \right)^{1/4} = \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{3/4} \left(\frac{\nu_e}{\omega_{pe}} \frac{n_0 T_e}{W_*^l} \right)^{1/2},$$

получим

$$\frac{W_0^l}{n_0 T_e} = \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^2 \frac{\omega_{pe}}{\nu_e} \left(\frac{W_*^l}{n_0 T_e} \right)^2.$$

Легко видеть, что керн при $y = y_0$ существует, если $W_0^l > W_y^l |_{y = \sqrt{T_i/T_e}}$, что дает с учетом соотношения

$$W_y^l |_{y = \sqrt{T_i/T_e}} = \left(T_e/T_i \right)^2 W_*^l$$

условие

$$\frac{\omega_{pe}}{\nu_e} > \frac{n_0 T_e}{W_*^l}, \quad /3.18/$$

или при $Q = Q_{cr}$

$$\frac{\omega_{pe}}{\nu_e} > \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{3/2} \rightarrow N_D > \ln \Lambda \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{3/2} \quad /3.19/$$

Таким образом, формулы /3.17/ справедливы при выполнении /3.18/, в противном случае область $y = 2$ не выделена по сравнению с остальной.

§4. КОРРЕЛЯЦИИ ИОННО-ЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

Здесь мы оценим уширение спектральных линий ионно-звуковых колебаний, обязанное их взаимодействию с ленгмюровскими. Как показано в /5/, уширение корреляционных функций s -колебаний может разрешить распадное взаимодействие вида $s \rightarrow s' + s''$, если корреляционная ширина Δ^s превосходит величину запрещения $\omega_s k^2 d_e^2$.

* В /5/ рассматривалось уширение линий s -колебаний за счет их взаимодействия между собой и частицами.

Уравнение для $I_{k\omega}^s$ можно легко получить по аналогии с /2.4/:

$$I_{k\omega}^s = \frac{32\pi^2}{\omega^2} |\epsilon^s(\omega, k) + \epsilon^N(\omega, k)|^{-2} \int I_{k_1\omega_1}^\ell I_{k_2\omega_2}^\ell |S^s(k, k_1, k_2)|^2 d\lambda$$

$$d\lambda = \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}) \delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega) dk_1 dk_2 d\omega_1 d\omega_2 \quad /4.1/$$

Из этого уравнения можно оценить ширину корреляционной функции $\phi^s(k, \omega)$ для $Q > Q_{cr}$ и $Q < Q_{cr}$, соответственно.

$$\Delta_1^s(x) = \frac{x}{32} \frac{W_*^\ell}{n_0 T_e} \left(\frac{m_i}{m_e}\right) \begin{cases} 1, & x < 1 \\ 1/x^3, & x > 1 \end{cases} \quad /4.2/$$

$$\Delta_2^s(x) = \frac{x}{48} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \quad /4.3/$$

Отсюда видно, что корреляционные уширения становятся весьма существенными при $(W_*^\ell / n_0 T_e) \sim (m_e / m_i)$. В этом случае исчезает понятие ионно-звуковых колебаний с частотой $\omega_s = kv_s$.

§5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Корреляционные функции $\phi^{\ell s}(k, \omega)$ при $\omega \rightarrow \omega_k^{\ell, s}$ имеют вид Лоренцевой кривой

$$\phi(k, \omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma(k)}{(\omega - \omega_k)^2 + (\gamma(k))^2}$$

Корреляционные функции длинноволновых ℓ -колебаний ($k \ll k_*$), как и в изотермической плазме ($T_e = T_i$), определяются четырехплазмонными взаимодействиями /см. рис. 1 и 2/. Ввиду уменьшения эффективности этих взаимодействий с ростом T_e корреляционные ширины

уменьшаются пропорционально $(1/T_e^2)$ при постоянной мощности генерации турбулентности Q .

В отличие от изотермической плазмы, где корреляционные эффекты стационарной ленгмюровской турбулентности существенны лишь в области больших фазовых скоростей ℓ -волн /или малых волновых чисел $k < k_* / v_{ph} > 3v_e \sqrt{m_i/m_e}$, в неизотермической ($T_e \gg T_i$) плазме корреляционные ширины остаются значительными вплоть до минимально возможных $v_{ph} \geq 3v_e$ /или $k \leq \frac{1}{3} k_d$ /. Это связано с наличием распадных взаимодействий типа $\ell \rightarrow \ell' + s$.

Поскольку распадные взаимодействия разрешены законами сохранения для волн, у которых $k > k_*^s = k_* \sqrt{T_i/T_e}$, то в основном они влияют на корреляции коротковолновых ℓ -колебаний.

Наибольшую ширину имеют корреляционные функции ℓ -колебаний с длиной волны $\lambda_0 \approx (1/k_0^{(1)})$, число которых максимально.

На рис. 3 и 4 представлены графики зависимости корреляционных ширин

$$\Delta^\ell \approx \pi \phi^\ell(k, \omega) [(\omega - \omega_k^\ell - \omega_k^N)^2 + (\gamma_k)^\ell]^2 \frac{1}{k_*^s v_s}$$

от волнового числа ℓ -колебаний для двух значений мощности генерации ленгмюровской турбулентности 1) $Q^\ell > Q_{cr}$ и 2) $Q^\ell < Q_{cr}$. Величина $Q = Q_{cr}$ определяется из условия равенства линейного и нелинейного декрементов затухания ионно-звуковых волн.

Формулы /3.15/ и /3.16/ показывают, что в первом случае корреляционная ширина пропорциональна квадратному корню, а во втором - мощности генерации Q^ℓ , или что то же самое

$$\Delta_1^\ell \sim W_*^\ell,$$

$$\Delta_2^\ell \sim (W_*^\ell)^2,$$

где $W_*^\ell = W_{k_*}^\ell$ - плотность энергии, сосредоточенная

в колебаниях с волновыми числами $k \geq k_*^s$. Из формул /3.15/ и /3.16/ следует также, что при

$$\frac{W_*^\ell}{n T_e} > \frac{m_e}{m_i} \quad /5.1/$$

величина $\Delta_I^\ell (y=1)$ становится больше единицы и уравнение /3.2/ перестает быть справедливым. В этом случае можно получить лишь оценку Δ_I^ℓ

$$\Delta_I^\ell \approx \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{W_*^\ell}{n T_e} \right)^{1/2} y, \quad /5.2/$$

имея в виду, что при выполнении /5.1/ $\delta(\omega_1 - \omega_2 - \omega)$ в ядре уравнения /3.2/ должна быть заменена на $(1/\pi)(\Delta/[(\omega_1 - \omega_2 - \omega)^2 + \Delta^2]) \approx \frac{1}{\pi\Delta}$. Зависимость Δ^ℓ от W_*^ℓ

представлена на рис. 5.

Уширения корреляционных функций s -турбулентности Δ_1^s и Δ_2^s , возбуждаемой ленгмюровской, определяются формулами /4.2/ и /4.3/ и имеют тот же порядок величины, что и Δ_1^ℓ и Δ_2^ℓ .

Оценки нелинейных сдвигов частоты, входящих в определение корреляционных функций

$$\omega_k^N = - \frac{\text{Re} \epsilon^N(\omega, k)}{\partial \epsilon^\ell(\omega, k) / \partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k^\ell},$$

приводят к следующему результату. Распадное взаимодействие ℓ -волн со значительно отличающимися волновыми числами приводит к не зависящему от k сдвигу частоты порядка $(\omega_{pe} W_0^\ell / n T_e)$, т.е. фактически к перенормировке плотности числа электронов n_0 на величину $\delta n \approx W_0^\ell / T_e$. Такой постоянный сдвиг частоты не входит в разность уровней энергии взаимодействующих волн $\omega_- = \omega_{k1} - \omega_{k2}$ и не влияет на их взаимодействие.

Связь волн с близкими волновыми числами может приводить к зависящему от k сдвигу частоты ω_k^N , который можно оценить как

$$\omega_k^N \approx \omega_{pe} \frac{W_*^\ell}{n_0 T_e} = 3 k_*^s v_s \frac{m_i}{m_e} \frac{W_*^\ell}{n_0 T_e},$$

т.е. того же порядка, что и уширение Δ_I^ℓ ; соответственно линейная поправка, связанная с тепловым движением, есть $\Delta \omega^\ell = \omega_k^\ell - \omega_{pe}$ и $\Delta \omega^\ell = \frac{1}{2} k_*^s v_s \left(\frac{k}{k_*} \right)^2$.

Использование в правой части /3.2/ $\phi^\ell(k, \omega)$ в виде $\delta(\omega - \omega_k^\ell)$ правомочно, если

$$\Delta \omega^\ell > \omega_k^N, \quad k_*^s v_s \Delta_I^\ell(k).$$

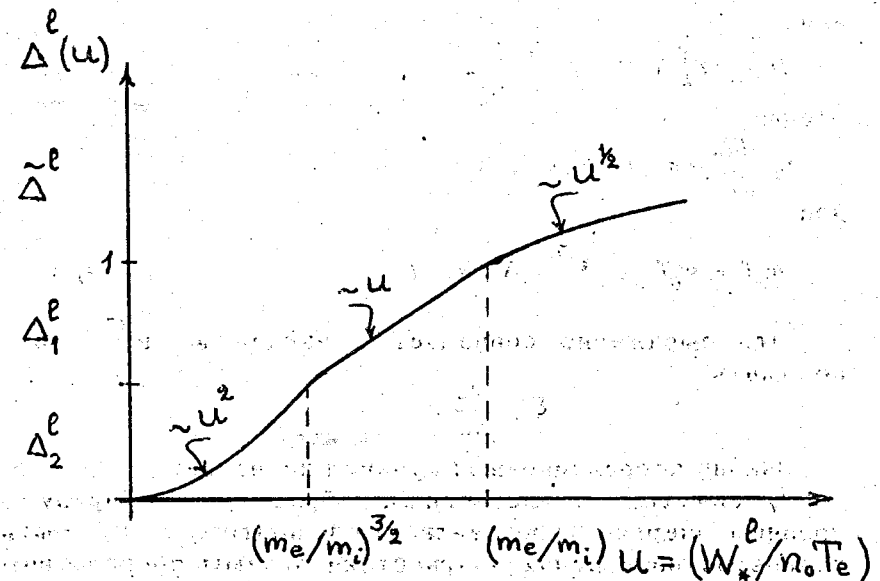


Рис. 5. Зависимость Δ^ℓ от энергии турбулентности при постоянном значении $y=1$.

Полученные результаты справедливы в том случае, когда ленгмюровскую и связанную с ней ионно-звуковую турбулентности можно считать изотропными и стационарными. До установления стационарности уширение корреляционной функции естественно определяется полным

/суммарным/ инкрементом или декрементом. $\Gamma = \sum_i \gamma_i$, учитывая процессы линейного и нелинейного поглощения, трансформации и раскочки колебаний. Этот инкремент может значительно превосходить полученные величины Δ^l .

Согласно /6/, легко можно оценить скорость и величину корреляционного нагрева электронов ленгмюровскими колебаниями, связанного с уширением дельта-функций $\delta(\omega - \omega_k^l)$. Действительно, коэффициент диффузии

$$D = \frac{-\omega_{pe}^2}{n_0 m_e} \text{Im} \int \frac{W_k^l \phi^l(k, \omega)}{\omega - k^l v} d\vec{k} d\omega = \frac{\omega_{pe}^2}{n_0 m_e} \int W_k^l \frac{\gamma^l(k) dk}{\omega_{pe}^2 + (\gamma(k))^2}$$

или

$$D = \int W_k^l \Delta^l(k) dk \frac{k_*^s v_s}{n_0 m_e},$$

отсюда

$$n_0 \frac{dT_e}{dt} = m_e D = k_*^s v_s \Delta^l W_*^l$$

или

$$n_0 T_e = n_0 T_{e0} + k_*^s v_s \Delta^l W_*^l t. \quad /5.3/$$

Это выражение совпадает с найденным в /7/, если положить

$$\xi \geq \frac{m_e}{m_i}.$$

Знание корреляционных функций позволяет:

1/ связать /единственным образом/ ее ширину с уровнем энергии турбулентности и поэтому может быть использовано в целях диагностики плазмы посредством корреляционных измерений;

2/ восстановить спектр турбулентности по корреляционной кривой /см. уравнение /3.2//.

Литература

1. V.G.Makhankov and V.N.Tsyrovich. Nucl.Fusion, 10, 405, 1970; JINR Preprint P9-4854, Dubna, 1969.
2. V.G.Makhankov and B.G.Shchinov. Phys.Rev.Lett., 25, 18, 1970.

3. Б.Б.Кадомцев. Вопросы теории плазмы, т.4, Атомиздат, М., 1964.
4. В.Н.Цытович. Теория турбулентной плазмы. Атомиздат, М., 1971.
5. V.N.Tsyrovich. Plasma Physics, 13, 741, 1971.
6. Ф.Г.Басс, Я.Б.Файнберг, В.Д.Шапиро. ЖЭТФ, 49, 829, 1965.
7. Ф.К.Хакимов, В.Н.Цытович. Препринт ФИАН №11, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 июня 1973 года.