ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р9 - 7066

Ю.И.Алексахин, И.Л.Коренев, Л.А.Юдин

УСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА В РЕЗОНАТОРЕ

Часть II. Поперечные колебания

1973

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

P9 - 7066

Ю.И.Алексахин, И.Л.Коренев, Л.А.Юдин

УСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА В РЕЗОНАТОРЕ

Часть II. Поперечные колебания

Направлено в ЖТФ

Эта работа посвящена анализу устойчивости линейных поперечных когерентных колебаний ультрарелятивистского электронного кольца в круглом цилиндрическом резонаторе и является продолжением работы /1/. Основные обозначения остаются теми же, что и в /1/, соответствующие ссылки даются в виде *(I.N)*, где *N* - номер формулы в работе /1/.

Неустойчивости поперечных колебаний подробно изучены в теории циклических ускорителей /2,3/. Однако специфика рассмотренных там задач не позволяет непосредственно воспользоваться имеющимися решениями для электронного кольца в резонаторе. В работах /4,5/ , где рассматривались неустойчивости кольца на собственных модах резонатора, подробный анализ для поперечных колебаний не производился. Между тем, как будет здесь показано, требования устойчивости этих колебаний могут накладывать существенные ограничения на параметры пучка и резонатора.

1. Анализ дисперсионного уравнения

Дисперсионное уравнение для частот поперечных возмущений плотности заряда в пучке, имеющих вид бегущей волны $e^{i(\Omega t - n\theta)}$, представляется в форме /6/:

$$1 = -\omega_0^2 F_x \int \frac{f(\omega)\,d\omega}{(\Omega - n\omega)^2 - \omega_x^2}, \qquad /1/$$

где индекс $x = r, z$, $\omega_x = \omega\nu_x(\omega)$ - частоты некогерентных бетатронных колебаний *, смысл величин $F_{r,z}$ ясен из сравнения /1/ с /1.1/, /1.2/.

---

* Здесь не учитывается связанная с нелинейностью зависимость $\omega_{r,z}$ от амплитуды колебаний в невозмущенном пучке.

Частоты обращения $\omega_\pm$ частиц, резонансно взаимодействующих с волной, имеющей частоту Ω, определяются полюсами подинтегрального выражения в /1/ *:

$$\omega_x^2(\omega_\pm) = (\Omega - n\omega_\pm)^2 \qquad /2а/$$

или, пользуясь разложением $\omega_x(\omega) \simeq \omega_{x0} + \omega_x'(\omega - \omega_0)$,

$$\omega_\pm = \frac{\Omega \mp (\omega_{x0} - \omega_0\omega_x')}{n \pm \omega_x'}, \qquad /2б/$$

где $\omega_{x0} = \omega_x(\omega_0)$, $\omega_x' = \frac{d\omega_x}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_0}$. Поля когерентного возмущения, действующие на частицы, обращающиеся с угловой скоростью ω, изменяются во времени по закону $e^{i(\Omega - n\omega)t}$. Следовательно, для частиц с $\omega = \omega_\pm$, в соответствии с /2а/, имеет место целый резонанс бетатронных колебаний. Так как в целом резонансе осциллятор может только поглощать энергию, для когерентных колебаний с частотой Ω имеются, вообще говоря, две группы частиц, обусловливающих затухание этих колебаний или уменьшение их инкремента.

Если записать частоту возмущения, пренебрегая ее мнимой частью, в виде $\Omega = \omega_0(n - Q_x)$ /неустойчивой может быть только медленная волна/, где $\omega_0 Q_x$ - когерентная бетатронная частота, то для частот обращения резонансных частиц получим

$$\omega_\pm = \omega_0\left(1 + \frac{Q_x \mp \nu_{x0}}{n \pm \omega_x'}\right). \qquad /3/$$

Таким образом, для пучков с резко спадающей функцией распределения затухание когерентных колебаний может иметь место, когда

$$\min\left|\frac{Q_x \mp \nu_{x0}}{n \pm \omega_x'}\right| < \frac{\delta\omega}{\omega_0} \sim a, \qquad /4/$$

где $\delta\omega$ - эффективная полуширина распределения по частотам, a определено в /1/.

---

* Обычно учитывают только полюс $\omega = \omega_+$, однако при больших $|\omega_x'|$ и малых ν_{x0} полюс $\omega = \omega_-$ может играть существенную роль.

Вычисление дисперсионного интеграла $I_x(\Omega) = \int \frac{f(\omega)\,d\omega}{(\Omega - n\omega)^2 - \omega_x^2}$ для используемого нами при оценках распределения Лоренца дает:

$$I_x^{-1}(\Omega) = \begin{cases} (\Omega - n(\omega_0 + i\Delta\omega))^2 - (\omega_x + i\Delta\omega \cdot \omega_x')^2, & |\omega_x'| < n \\ (\Omega - n\omega_0 - i\Delta\omega \cdot \omega_x')^2 - (\omega_x + in\,\Delta\omega)^2, & \omega_x' > n \\ (\Omega - n\omega_0 + i\Delta\omega\,\omega_x')^2 - (\omega_x - in\Delta\omega)^2, & \omega_x' < -n. \end{cases} \qquad /5/$$

Подставновка этих выражений в /1/ показывает, что разброс по частотам обращения всегда вносит затухание в систему.

2. Частоты бетатронных колебаний

Если F_x слабо зависит от Ω, то при $a = 0$ получим $Q_x = (\nu_{x_0}^2 - Re F_x)^{1/2}$. Таким образом, для определения когерентных частот необходимо знать частоты некогерентных бетатронных колебаний /одночастичные частоты/ в невозмущенном пучке. В камере, полностью экранирующей магнитное поле невозмущенного пучка /это возможно, например, при достаточно быстром сжатии /7/ /, бетатронные частоты для пучка эллиптического сечения с полуосями $a_{r,z}$ даются формулами $(\frac{\pi r_0}{h} \gg 1)$:

$$\nu_{z0}^2 = n_B(1+\xi) - \Delta n_z^c - \Delta n_{ind} - \frac{\nu}{\gamma} L$$

$$\nu_{r0}^2 = (1-n_B)(1+\xi) - \Delta n_r^c + \Delta n_{ind} - \frac{\nu}{\gamma} L, \qquad /6/$$

где n_B - показатель спада внешнего магнитного поля, $\xi = \frac{2\nu}{\gamma} L$ - добавка к напряженности поля, компенсирующая собственные расталкивающие силы, $L = \ln\frac{2h}{\pi a}\,th\phi + \frac{1}{2}$,

$$\Delta n^{c}_{r,z} = \frac{4\nu}{\beta_0^2\gamma^3} \cdot \frac{r_0^2}{a_{r,z}(a_r+a_z)}$$ - кулоновский

сдвиг частот, $\Delta n_{ind} = \frac{\nu}{\beta_0^2\gamma^3}\,\frac{1}{3}\left(\frac{\pi r_0}{h}\right)^2\left[1-6\frac{cth2\phi}{sh2\phi}\right], \phi=\pi\frac{b-r_0}{h}$,

$$a=\frac{a_r+a_z}{2}.$$

Коэффициенты $F_{r,z}$ в резонаторе с идеально проводящими стенками можно представить в виде разложения по его собственным функциям. Воспользовавшись для плотности заряда невозмущенного пучка выражением /1.7/, получим:

$$F_r = -\frac{2\chi}{b^2}\sum_{s,q=1}^{\infty} g_q^2 \Big\{ \frac{k^2-k_{rE}^2}{k^2-k_{nE}^2}\left[J_n'(k_{rE}r_0)-\frac{n\beta_0\cdot J_n(k_{rE}r_0)}{(kr_0-n\beta_0)k_{rE}r_0}\right]^2\frac{1}{N_{sE}}+$$

$$+\frac{1}{k^2-k_{nH}^2}\left[\left(\frac{kn}{k_{rH}r_0}-\beta_0 k_{rH}\right)J_n(k_{rH}r_0)-\frac{kn\beta_0}{kr_0-n\beta_0}J_n'(k_{rH}r_0)\right]^2\frac{1}{N_{sH}}\Big\},$$

/7а/

$$F_z = \frac{2\chi}{b^2}\Big\{-\left(k-\frac{n\beta_0}{r_0}\right)^2\sum_{\substack{s=1\\q=0}}^{\infty} g_q^2\epsilon_q\frac{1}{k^2-k_{nE}^2}\cdot\frac{J_n^2(k_{rE}r_0)}{N_{sE}}+$$

$$+\sum_{s,q=1}^{\infty} g_q^2 k_z^2\left[\frac{k_{rE}^2-\frac{n^2\beta_0^2}{r_0^2}}{k_{rE}^2(k^2-k_{nE}^2)}\cdot\frac{J_n^2(k_{rE}r_0)}{N_{sE}}-\frac{\beta_0^2}{k^2-k_{nH}^2}\cdot\frac{J_n'^2(k_{rH}r_0)}{N_{sH}}\right]\Big\},$$

/7б/

где $\chi=\frac{\nu}{\gamma}\,\frac{8\pi r_0^3}{\beta_0^2 h}$. В формуле /7б/ $\epsilon_q=\frac{1}{2}$ при $q=0$ и $\epsilon_q=1$ при $q=1,2,\ldots$ После суммирования по корням бесселевых функций и их производных эти выражения принимают вид *:

$$F_r = -\chi \sum_{q=1}^{\infty} g_q^2 \{ k_z^2 [G''_{nE} - \frac{2n\beta_0}{kr_0 - n\beta_0} G'_{nE} + \frac{n^2\beta_0^2}{(kr_0 - n\beta_0)^2 r_0^2 \chi_q^2} G_{nE}] +$$

$$+\beta_0^2 \chi_q^2 (1 + \frac{kn}{\beta_0 r_0 \chi_q^2})^2 G_{nH} - \frac{2\beta_0^2 kr_0}{kr_0 - n\beta_0} (\chi_q^2 + \frac{kn}{\beta_0 r_0}) G'_{nH} + \frac{k^2\beta_0^2}{(kr_0 - n\beta_0)^2} G''_{nH} \},$$

/8а/

$$F_z = \chi \{ -(k - \frac{n\beta_0}{r_0})^2 \sum_{q=0}^{\infty} g_q^2 \epsilon_q G_{nE} -$$

$$- \sum_{q=1}^{\infty} g_q^2 k_z^2 [(1 + \frac{n^2\beta_0^2}{r_0^2 \chi_q^2}) G_{nE} + \beta_0^2 G''_{nH}] \},$$ /8б/

где $G = G(\frac{r_0}{b}, b\chi_q)$ определены в приложении к работе /1/. В формулах /7а/, /8а/ $k_z = \frac{\pi(2q-1)}{h}$ и $k_z = \frac{2\pi q}{h}$ в /7б/, /8б/. В предельном случае

$$\frac{nh}{\pi r_0} \ll 1$$ /9/

и при выполнении условия $\frac{\pi a_z}{h} \ll 1$, воспользовавшись асимптотическими разложениями для цилиндрических функций мнимого аргумента, получим

$$F_r = -\Delta n_r^c + \frac{\nu}{\beta_0^2 \gamma^3} \cdot \frac{1}{3} (\frac{\pi r_0}{h})^2 [1 + 6 \frac{cth 2\phi}{sh 2\phi}] -$$

$$- \frac{\nu}{\gamma} (\ln \frac{2h}{\pi a} cth\phi + \frac{1}{2}) + (kr_0 - n\beta_0)^2 \frac{2\nu}{\beta_0^2 \gamma} (\ln \frac{2h}{\pi a} cth\phi + \frac{1}{2}),$$ /10а/

---

* Ряд /7а/ содержит расходящуюся часть, связанную с квазистатическим полем выпрямленного шнура при $a_r \to 0$. В /8а/ соответствующее слагаемое опущено, однако далее оно учтено в Δn_r^c.

$$F_z = -\Delta n_z^c + \frac{\nu}{\beta_0^2\gamma^3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{\pi r_0}{h}\right)^2(1+3\,\mathrm{sh}^{-2}2\phi) - \frac{\nu}{\gamma}\left[\ln\frac{h}{2\pi a}(1-e^{-4\phi}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\right] + (kr_0 - n\beta_0)^2\frac{2\nu}{\beta_0^2\gamma}\left\{\ln\frac{h}{2\pi a}(1-e^{-4\phi}) + \frac{1}{2} - \frac{\pi^2 r_0}{h} J_n(kr_0)\times\right.$$

$$\left.\times\left[Y_n(kr_0) - J_n(kr_0)\frac{Y_n(kl)}{J_n(kb)}\right]\right\}. \qquad /10б/$$

Последние слагаемые в формулах /10/ определяют электромагнитную поправку к массе. Переобозначив их как $\frac{1}{\beta_0^2}(kr_0-n\beta_0)^2 F_x^{(m)}$ и вводя $\tilde{F}_x = F_x - \frac{1}{\beta_0^2}(kr_0-n\beta_0)^2 F_x^{(m)}$, запишем решение дисперсионного уравнения /1/ для моноэнергетического пучка в виде $\Omega = \omega_0(n \pm Q_x)$, где $Q_x^2 = \frac{\nu_{x0}^2 - \tilde{F}_x}{1+F_x^{(m)}}$.

Используя формулы /6/, /10/, получим следующие выражения для когерентных частот:

$$(1+F_z^{(m)})Q_z^2 = n_B(1+\xi) - \frac{\nu}{\beta_0^2\gamma^3}\left(\frac{\pi r_0}{h}\,\mathrm{th}\phi\right)^2 + \frac{2\nu}{\gamma}\ln\frac{1+e^{-2\phi}}{2},$$

$$(1+F_r^{(m)})Q_r^2 = (1-n_B)(1+\xi) - \frac{\nu}{\beta_0^2\gamma^3}\frac{\mathrm{cth}2\phi}{\mathrm{sh}2\phi}\left(\frac{\pi r_0}{h}\right)^2 + \frac{2\nu}{\gamma}\ln\mathrm{cth}\phi. \qquad /11/$$

Из сравнения /6/ и /11/ видно, что, в силу условия $\frac{\pi a_z}{h} \ll 1$, когерентные частоты всегда больше частот некогерентных бетатронных колебаний, причем в практически интересных случаях

$$Q_x^2 \simeq \nu_{x0}^2 + \Delta n_x^c. \qquad /12/$$

Для малых $\frac{dn_B(r)}{dr}$, когда $|\omega_x'| \ll n$, условие /4/ сводится к неравенству

$$na \gtrsim (\nu_{x0}^2 + \Delta n_x^c)^{1/2} - \nu_{x0}, \qquad /13/$$

то есть кулоновский сдвиг должен быть достаточно мал /2/. При $n_B = \frac{1}{2}$, $a_r \sim a_z \sim a$, $\gamma \ll \frac{r_0}{a}$ затухание первой гармоники когерентных колебаний $(n=1)$ имеет место, если $\nu \lesssim (\frac{\gamma a}{r_0})^3$.

3. Резистивная неустойчивость

Энергетические потери в стенках резонатора обусловливают наличие отрицательной мнимой части у коэффициентов $F_{r,z}$. Это, в свою очередь, может привести к неустойчивости на частотах, соответствующих медленным волнам. Инкремент для моноэнергетического пучка при $|Im F_x| \ll Q_x^2$, где $Q_x^2 = \nu_{x0}^2 - Re F_x$, равен

$$Im\Omega = \frac{\omega_0}{2Q_x} Im F_x. \qquad /14/$$

Разброс по частотам приводит, как известно /2,3,5/, к уменьшению инкрементов или к полной стабилизации колебаний. Так, для распределения Лоренца, воспользовавшись /5/ при $a\nu_{x0} \max\{n, |\omega_x'|\} \ll Q_x^2$, получим следующее условие устойчивости:

$$aS_x \geq \frac{|Im F_x|}{2Q_x}, \qquad /15/$$

где

$$S_x = \begin{cases} n - \frac{\nu_x}{Q_x}\omega_x', & |\omega_x'| < n \\ |\omega_x' - \frac{\nu_x}{Q_x} n|, & |\omega_x'| > n. \end{cases} \qquad /16/$$

Величины S_x в силу $Q_x > \nu_x$ всегда отличны от нуля, хотя могут быть достаточно малыми.

Для устойчивости пучка с быстро спадающими функциями распределения /типа гауссовского/ кроме /15/ необходимо выполнение условия / 4/.

Приведем теперь выражения для поправок ΔF_x к коэффициентам F_x, обусловленных конечной проводимостью стенок камеры. Представляя $\Delta F_x = \Delta F_x^{(1)} + \Delta F_x^{(2)}$, где $\Delta F_x^{(1)}$ определяется проводимостью цилиндрической поверхности, а $\Delta F_x^{(2)}$ проводимостью торцов, имеем

$$\Delta F_r^{(1)} = \frac{2w}{hb}\sum_{q=1}^{\infty}\Big\{\Big[\frac{\left(\frac{\beta_0\chi_q}{k}+\frac{n}{r_0\chi_q}\right)I_n(\chi_q r_0)-\frac{n\beta_0}{kr_0-n\beta_0}I_n'(\chi_q r_0)}{I_n'(\chi_q b)}\Big]^2+$$

$$+\left(\frac{nk_z}{\chi_q^2 b}\right)^2\Big[\frac{\left(\beta_0\frac{\chi_q}{k}+\frac{n}{r_0\chi_q}\right)I_n(\chi_q r_0)-\frac{n\beta_0}{kr_0-n\beta_0}I_n'(\chi_q r_0)}{I_n'(\chi_q b)}-$$

$$-\frac{b}{r_0}\cdot\frac{\frac{\chi_q r_0}{n}I_n'(\chi_q r_0)-\frac{n\beta_0}{kr_0-n\beta_0}I_n(\chi_q r_0)}{I_n(\chi_q b)}\Big]^2\Big\},$$

/17а/

$$\Delta F_z^{(1)} = \frac{2w}{hb}\Big[\frac{1}{2}\left(1-\frac{n\beta_0}{kr_0}\right)^2\frac{J_n^2(kr_0)}{J_n^2(kb)}+\sum_{q=1}^{\infty}\Big\{\Big[\left(1+\frac{kn\beta_0}{r_0\chi_q^2}\right)\frac{I_n(\chi_q r_0)}{I_n(\chi_q b)}-$$

$$-\frac{n\beta_0}{kb}\cdot\frac{k_z^2}{\chi_q^2}\,\frac{I_n'(\chi_q r_0)}{I_n'(\chi_q b)}\Big]^2+\beta_0^2\frac{k_z^2}{k^2}\,\frac{I_n'^2(\chi_q r_0)}{I_n'^2(\chi_q b)}\Big\}\Big],$$

/17б/

$$\Delta F_r^{(2)} = \frac{w}{b^2}\sum_{s=1}^{\infty}\Big\{\frac{\left[J_n'(k_{rE}r_0)-\frac{n\beta_0}{(kr_0-n\beta_0)k_{rE}r_0}J_n(k_{rE}r_0)\right]^2}{N_{sE}\,ch^2\left(\kappa_{sE}\frac{h}{2}\right)}+$$

$$+\frac{\left[\left(\frac{n}{r_0 k_{rH}}-\beta_0\frac{k_{rH}}{k}\right)J_n(k_{rH}r_0)-\frac{\beta_0}{kr_0-n\beta_0}J_n'(k_{rH}r_0)\right]^2}{N_{sH}\,ch^2(\kappa_{sH}\frac{h}{2})}\Big\},\qquad /18а/$$

$$\Delta F_z^{(2)}=\frac{w}{b^2}\sum_{s=1}^{\infty}\Big\{\frac{\left(k_{rE}^2-\frac{kn\beta_0}{r_0}\right)^2}{\kappa_{sE}^2\,sh^2(\kappa_{sE}\frac{h}{2})}\cdot\frac{J_n^2(k_{rE}r_0)}{k_{rE}^2 N_{sE}}+$$

$$+\frac{\beta_0^2\kappa_{sH}^2}{k^2 sh^2(\kappa_{sH}\frac{h}{2})}\cdot\frac{J_n'^2(k_{rH}r_0)}{N_{sH}}\Big\},\qquad /18б/$$

где $w=(1-i)R\frac{\nu}{\beta_0^2\gamma}4\pi kr_0^3$.

В предельном случае $\frac{b}{h}\to 0$, заменяя суммирование в /17а,б/ интегрированием, придем к соответствующим выражениям для кольца в волноводе /3/. Величины $\Delta F_x^{(2)}$ при этом экспоненциально малы.

При выполнении условия /9/ формулы /17/ принимают вид

$$\Delta F_r^{(2)}=(1-i)R\frac{\nu}{\gamma}\left(\frac{2\pi r_0}{h\cdot sh2\phi}\right)^3\frac{1}{kr_0},$$

$$\Delta F_z^{(1)}=\Delta F_r^{(1)}ch2\phi.\qquad /19/$$

Если, кроме того, $\phi\gg 1$,

$$\Delta F_r^{(2)}=(1-i)R\frac{\nu}{\gamma}\cdot\frac{4r_0}{h}\Big\{\frac{1}{3(n-Q_r)}\left(\frac{\pi r_0}{h}\right)^2+\frac{n}{Q_r^2}\Big\},$$

$$\Delta F_z^{(2)}=(1-i)R\frac{\nu}{\gamma}\frac{8}{3\pi(n-Q_r)}\left(\frac{\pi r_0}{h}\right)^3.\qquad /20/$$

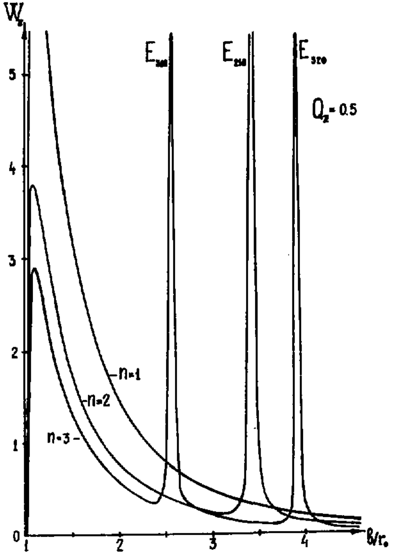
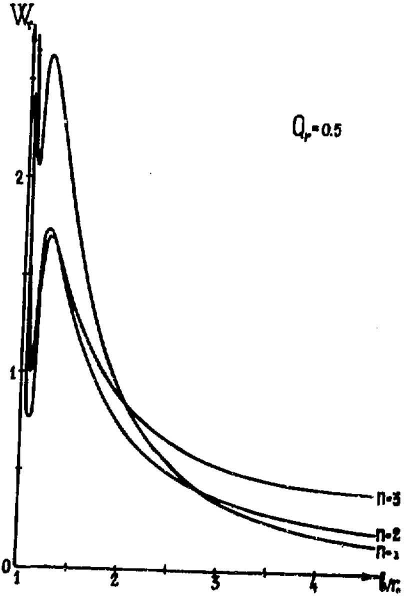


Рис. 1. Зависимость $W_{r,z} = -10^{-2}\left(\frac{\nu}{\gamma}\right)^{-1}\left(\frac{\sigma b}{c}\right)^{1/2} ImF_{r,z}$ от b/r_0 при $b/h=5, Q_{r,z} = 1/2$.



W_r
$Q_r = 0.5$
2
1
0
1
2
3
4
r/r_o
n=3
n=2
n=1

Эти формулы дают хорошее согласие с результатами численных расчетов по формулам /17/, /18/, которые /для $\Delta F_x^{(2)}$ / представлены на рис. 1а,б. Отметим, что в окрестностях резонансов формулы /17/, /18/ неприменимы. Как следует из /20/ и рисунка, инкремент радиальной резистивной неустойчивости моноэнергетического пучка растет с номером n, что обусловлено связью радиального и азимутального движений /9/.

Для параметров пучка и резонатора, приведенных в /1/, условие устойчивости $(S_x \sim 1)$ дает $\frac{\Delta\gamma}{\gamma} \gtrsim 2 \cdot 10^{-4}$, т.е. при этих параметрах резистивная неустойчивость не представляет опасности.

4. *Резонансная неустойчивость*

При частоте возмущения, близкой к одной из собственных частот камеры $\Omega \simeq ck_{nE,H}$, или для радиуса пучка

$$r_0 = \frac{\beta_0 (n - Q_x)}{[k^2_{tE,H} + (\frac{\pi m}{h})^2]^{1/2}}, \qquad /21/$$

где $m = 1,3,5...$ для радиальных и $m = 0,2,4...$ для аксиальных колебаний, коэффициенты F_x можно представить в виде

$$F_x = \mathcal{P} + \mathcal{R} \frac{\omega_{\text{рез}}}{\Omega - \omega_{\text{рез}}}, \qquad /22/$$

где $\omega_{\text{рез}} = ck_{nE,H} (1 + \frac{i}{2Q_{nsm}})$, $\mathcal{P}$ - вклад нерезонансных членов в F_x, $\mathcal{R}$ - коэффициент, зависящий от номера резонанса, вид которого нетрудно установить из сравнения с /7/, причем $\mathcal{R} < 0$.

Обозначив $\nu_x^2 - \mathcal{P} = Q_x^2$, получим дисперсионное уравнение для моноэнергетического пучка в виде

$$(\Omega - n\omega_0)^2 - \omega_0^2 Q_x^2 = -\omega_0^2 \mathcal{R} \frac{\omega_{\text{рез}}}{\Omega - \omega_{\text{рез}}}. \qquad /23/$$

Анализ этого уравнения показывает, что неустойчивыми в резонансе могут быть /как и в случае резистивной неустойчивости/ лишь медленные волны, для которых при бесконечной добротности и не слишком малых Q_x

$$\Omega = \frac{\omega_{рез} + \omega_0 (n - Q_x)}{2} \pm \frac{1}{2} \{ [\omega_{рез} - \omega_0 (n - Q_x)]^2 + \frac{2 \omega_0 \omega_{рез}}{Q_x} \Re \}^{1/2} . \qquad /24/$$

Неустойчивость, таким образом, имеет место в полосе частот ω_0, границы которой определяются равенством:

$$(\omega_{рез} - \omega_0 (n - Q_x))^2 = \frac{2 \omega_0 \omega_{рез}}{Q_x} |\Re| . \qquad /25/$$

Учитывая, что $\omega_0 \simeq \frac{\omega_{рез}}{n - Q_x}$, получим инкремент в центре полосы

$$Im \Omega = -\Gamma_0 \simeq -\omega_0 \sqrt{\frac{(n - Q_x) |\Re|}{2 Q_x}} . \qquad /26/$$

В случае произвольной расстройки инкремент $\Gamma = \Gamma_0 (1 - x^2)$, где $x = \frac{\omega_{рез} - \omega_0 (n - Q_x)}{\omega_{рез}}$. При сжатии и, тем самым, изменении ω_0, кольцо проходит через резонанс. Возрастание амплитуды за время прохождения полосы определяется

/в предположении $\Gamma_0 / \omega_0 \ll 1$ / множителем

$$exp\{ \frac{\pi}{n - Q_x} \cdot \frac{\Gamma_0^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{\beta_0}{\beta_r} \},$$

где $\beta_r = |\frac{1}{c} \frac{dr_0}{dt}|$. При условии, что амплитуда при прохождении через резонанс вырастет не более, чем в e^L раз, ограничение на скорость сжатия

$$\beta_r \geq \frac{\beta_0}{L} \cdot \frac{\pi}{n - Q_x} \cdot \frac{\Gamma_0^2}{\omega_0^2} . \qquad /27/$$

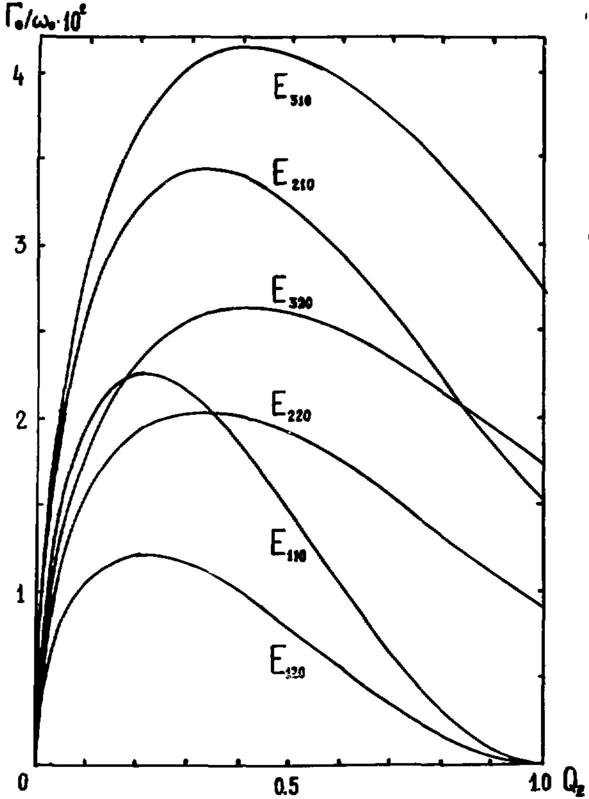


Рис. 2. Инкремент резонасной неустойчивости аксиальных колебаний на модах $E_{n s 0}$ в зависимости от жесткости фокусировки при $\frac{\nu}{\gamma} = 8.5 \cdot 10^{-3}$, $b/h = 5$, $\beta_0 = 1$.

Расчет коэффициентов $\mathfrak{R}$ показывает, что максимальный инкремент имеют резонансы аксиальных колебаний на модах E_{ns0}. Соответствующие резонансные радиусы $r_0 = \beta_0 b \frac{n - Q_z}{\lambda^E_{ns}}$ не зависят от высоты резонатора h, так что они, в отличие от других резонансов, с необходимостью проходятся при сжатии. Инкременты на этих модах даются формулой

$$\Gamma_0 = \omega_0 \left[\frac{2\nu}{\gamma} \cdot \frac{\pi r_0}{h} Q_z (n - Q_z) \frac{J_n^2(k_{sE} r_0)}{(\lambda^E_{ns})^2 N_{sE}} \right]^{1/2} \qquad /28/$$

На рис. 2 представлена зависимость Γ_0/ω_0 от жесткости фокусировки при $\nu/\gamma = 0{,}0085$. Для первой гармоники инкремент максимален при $s = 1$, $Q_z = 0{,}2$. Для скорости сжатия из /27/ получаем при этом $L\beta_r \gtrsim 2 \cdot 10^{-3}$. Резонансная неустойчивость может быть подавлена совместным стабилизирующим действием конечной добротности и энергетического разброса. Условие устойчивости пучка с лоренцевским распределением по частотам обращения имеет вид

$$Q_{nsm} \lesssim a \cdot S_x \left(\frac{\Gamma_0}{\omega_0}\right)^{-2} \frac{n - Q_x}{2} \qquad /29/$$

При $S_x \sim 1$, $a = 5 \cdot 10^{-2}$ формула /29/ дает $Q_{110} \lesssim 40$. Таким образом, аксиальные колебания кольца устойчивы лишь в резонаторе с низкой добротностью.

Авторы глубоко признательны Э.А.Перельштейну за помощь и полезные обсуждения.

Литература

1. *Ю.И.Алексахин, И.Л.Коренев, Л.А.Юдин. Препринт ОИЯИ, Р9-7065, Дубна, 1973.*
2. *L.J.Laslett, V.K.Neil, A.M.Sessler. Rev. Sci. Instr., 36, 436 (1965).*
3. *В.И.Балбеков, А.А.Коломенский. АЭ, 19, 126 /1965/.*

4. И.Н.Иванов. Препринт ОИЯИ, Р9-3474-2, Дубна, 1967.
5. В.П.Григорьев, А.Н.Диденко. ЖТФ, 40, 2283 /1970/.
6. I.L.Korenev, L.A.Yudin. Proc. of 8-th Intern. Conf. on High-Energy Accelaratots. CERN, Geneva, 1972, p. 461.
7. Ю.И.Алексахин, А.Г.Бонч-Осмоловский. Препринт ОИЯИ, Р9-6787, Дубна, 1972.
8. И.Л.Коренев, Л.А.Юдин. Радиофизика XV, №4, 637 /1972/.
9. И.Л.Коренев, Л.А.Юдин. Радиофизика XIV, №8, 1268 /1971/.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 апреля 1973 года.