ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P9 - 7065

Ю.И.Алексахин, И.Л.Коренев, Л.А.Юдин

УСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА В РЕЗОНАТОРЕ

Часть I. Азимутальные колебания

1973

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

P9 - 7065

Ю.И.Алексахин, И.Л.Коренев, Л.А.Юдин

УСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА В РЕЗОНАТОРЕ

Часть I. Азимутальные колебания

Направлено в ЖТФ

Известно, что наиболее опасные неустойчивости интенсивных пучков заряженных частиц связаны с когерентными эффектами /см., в частности, [1, 2] /. Интерес к вопросам устойчивости когерентных колебаний возрос в связи с разработкой метода коллективного ускорения [3]. Формирование электронных колец, используемых в этом методе для ускорения тяжелых частиц, происходит в камере адгезатора /компрессора/, которую можно рассматривать как круглый цилиндрнческий резонатор с проводящими стенками. Поскольку время нахождения кольца в камере значительно больше характерных времен развития когерентных неустойчивостей, необходима по возможности более точная оценка влияния параметров резонатора и пучка на поведение последнего.

В [4] были найдены инкременты неустойчивостей в случаѐ совпадения частоты возмущения пучка с собственной частотой резонатора. Аналогичная задача с учетом энергетического разброса н адиабатического изменения магнитного поля решалась в [5]. Однако анализ поведеиия пучка лишь на резонансных частотах недостаточен, поскольку неустойчивости возможны и вне резонансов /иеустойчивость отрицательной массы, резистивная неустойчивость/. Последнее обстоятельство тем более существенно, что соответствующим выбором геометрии камеры можно добиться удаления некоторых наиболее опасных резонансов из рабочей области частот.

В данной работе исследуется поведение малых когерентных возмущений плотности ультрарелятивистского электронного кольца $(\gamma \gg 1)$, помещенного в круглый цилиндрический резонатор радиуса b и высоты h, причем основное внимание уделяется нерезонансным эффектам.

Поведение n -й гармоники возмущения плотности заряда пучка, зависящей от времени t и азимута θ как $\exp[i(\Omega t - n\theta)]$, где Ω - частота возмущения, описывается дисперсионными уравнениями

$$1 = -\omega_0^2 a_{zz} \int \frac{f(\omega)\, d\omega}{(\Omega - n\omega)^2 - \omega_z^2}, \qquad /1/$$

$$1 = -\omega_0^2 \int \left[a_{rr} + \frac{i\omega}{\Omega - n\omega}(a_{r\theta} - a_{\theta r}) + \frac{\omega^2}{(\Omega - n\omega)^2} a_{\theta\theta} \right] \frac{f(\omega)\, d\omega}{(\Omega - n\omega)^2 - \omega_r^2} -$$

$$- \frac{\omega_0^2}{\gamma} a_{\theta\theta} \int \frac{f(\omega)\, d\omega}{(\Omega - n\omega)^2}, \qquad /2/$$

где $f(\omega)$ - функция распределения по частотам обращения в невозмущенном пучке, $\omega_0 = \int \omega f(\omega)\, d\omega$, $\beta_0 = \frac{\omega_0 r_0}{c}$, $\gamma = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$, r_0 - большой радиус кольца, $\omega_{r,z} = \omega \nu_{r,z}$ - частоты бетатронных колебаний. Коэффициенты a_{ik} определяются соотношениями /7/:

$$a_{ik} = \frac{1}{m\gamma\omega_0^2} \frac{\partial \overline{F_i}}{\partial x_k},$$

$\overline{F_i}$ - компоненты усредненной по сечению пучка силы Лоренца, связанной с возмущением, $\vec{x}$ - вектор когерентного смещения поперечного сечения кольца.

Уравнения /1/, /2/ получены в предположении, что поля мало отличаются от своего среднего значения по сечению пучка; для цилиндрической волны это справедливо при $n \ll \frac{r_0}{a}$, где a - характерный размер сечения кольца /для выпрямленного пучка ограничение более слабое - $n \ll \frac{\gamma r_0}{a}$ /.

Первая часть работы посвящена вопросам устойчивости азимутального движения. Если выполнены условия $|a_{ik}| \ll 1$, то уравнение /2/ имеет корни $\Omega \approx \omega_0 (n \pm \nu_r)$ и $\Omega \approx n\omega_0$, соответствующие радиальным и азимутальным колебаниям плотности кольца. Интересуясь решениями $\Omega \approx n\omega_0$ для пучка с характерной шириной распределения по частотам $\delta\omega$, удовлетворяющей соотношению

$$\delta\omega \approx \frac{\omega_0 a}{r_0} \ll \nu_r \frac{\omega_0}{n},$$ в уравнении /2/ можно опустить слагаемые, не содержащие $(\Omega - n\omega)^{-2}$. В результате получим дисперсионное уравнение /1/:

$$1 = -i \frac{\nu}{\beta_0 \gamma} \omega_0 \Omega \frac{c Z(n,\Omega)}{2\pi n} \left(\frac{1}{\nu_r^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \int \frac{f'(\omega)\, d\omega}{\Omega - n\omega}, \qquad /3/$$

где $\nu = \frac{e^2}{mc^2} \frac{N}{2\pi r_0}$ - "погонный электрон", N - полное число электронов в кольце, $Z(n, \Omega) = -a_{\theta\theta} \frac{2\pi i}{\Omega r_0} \beta_0^2 \left(\frac{\nu}{\gamma}\right)^{-1}$ - импеданс пучка в камере, определяемой также соотношением $2\pi r_0 \bar{E}_\theta = Z(n, \Omega) I_{n,\Omega}$, $I_{n,\Omega}$ - линейная плотность тока возмущения.

Для оценок влияния энергетического разброса в пучке воспользуемся наиболее просто анализируемым распределением Лоренца: $f(\omega) = \left\{ \pi \Delta\omega \cdot \left[1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right)^2 \right] \right\}^{-1}$,

где $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{\gamma} \left(\frac{1}{\nu_r^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \Delta\gamma$.

Тогда при $\gamma \gg \nu_r$ уравнение /3/ сводится к виду

$$(p - ia)^2 = 2i\beta \,\tilde{\tilde{Z}}(n, \Omega). \qquad /4/$$

Здесь введены обозначения $p = \frac{\Omega - n\omega_0}{n\omega_0}$, $a = \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \approx \nu_r^{-2} \frac{\Delta\gamma}{\gamma}$,

$\beta = \nu_r^{-2}\frac{\nu}{\gamma}$, $\tilde{\tilde{Z}} = \frac{cZ}{4\pi n}$ *. Неустойчивости пучка соответствует решение уравнения /4/ с $Im p < 0$.

Импеданс кольца в камере с проводящими стенками можно представить в виде $Z = Z_0 + \Delta Z$, где Z_0 - импеданс в случае идеально проводящих стенок; а ΔZ - добавка, связанная с конечной проводимостью.

Проанализируем вначале условия устойчивости при $\Delta Z = 0$, а затем рассмотрим влияние конечной проводимости.

1. Неустойчивость отрицательной массы /НОМ/

В нерезонансной области в случае идеально проводящих стенок камеры импеданс является чисто реактивным $\tilde{\tilde{Z}}_0 = iV$. Решая уравнение /4/ в предположении $\beta \ll 1$, получим

$$p = i(a \pm \sqrt{2\beta V}), \qquad V > 0,$$

$$p = \pm\sqrt{2\beta|V|} + ia, \quad V < 0. \qquad /5/$$

Таким образом, НОМ возможна только при $V > 0$, и условие ее подавления /1,2/:

$$V < \frac{1}{2}\frac{a_i^2}{\beta} = \frac{1}{2}\nu_r^{-2}\left(\frac{\nu}{\gamma}\right)^{-1}\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)^2. \qquad /6/$$

Если же $V<0$, то в пучке возможны когерентные синхротронные колебания с относительной частотой $Q_\theta = n\sqrt{2\beta|V|}$; второе из решений /5/ суть комбинационные частоты $Re\,\Omega = \omega_0(n \pm Q_\theta)$. Очевидно, что затухание колебаний в пучке с резко спадающей функцией распределения может иметь место только в случае, когда угловая скорость волны $Re\,\Omega/n$ лежит в пределах разброса по частотам обращения, то есть когда $Q_\theta \le na$.

---

* Значению $\tilde{\tilde{Z}} = 1$ соответствует величина импеданса $\frac{Z(n,\Omega)}{n} = 377$ ом.

При нахождении полей возмущения пренебрежем малым радиальным размером кольца и положим плотность заряда в невозмущенном пучке равной

$$\rho_0(r,z) = \frac{eN}{2\pi r_0}\,\delta(r - r_0)\,\frac{\sigma(a_z - |z|)}{2a_z}, \qquad /7/$$

где $\sigma(x) = 1$ при $x > 0$ и $\sigma(x) = 0$ при $x < 0$, a_z - аксиальный размер пучка. Определяя поля методом разложения по собственным функциям резонатора, получим следующее выражение для импеданса:

$$\tilde{Z}_0 = i\,\frac{8\pi n}{khb^2}\sum_{s,q=1}^{\infty}\Big[\frac{k^2 - k_{rE}^2}{k^2 - k_{nE}^2}\cdot\frac{J_n^2(k_{rE}r_0)}{k_{rE}^2 N_{SE}^2} + \qquad /8/$$

$$+ \frac{\beta_0^2}{k^2 - k_{nH}^2}\cdot\frac{J_n'^2(k_{rH}r_0)}{N_{sH}}\Big]g_q^2,$$

где

$$N_{sE} = J_n'^2(\lambda_{ns}^E), \quad N_{sH} = \Big[1 - \Big(\frac{n}{\lambda_{ns}^H}\Big)^2\Big]J_n^2(\lambda_{ns}^H)$$

- нормировочные множители,

$$k = \frac{\Omega}{c}, \quad k_z = \frac{\pi(2q-1)}{h}, \quad k_{rE,H} = \frac{\lambda_{ns}^{E,H}}{b}, k_{nE,H} = (k_z^2 + k_{rE,H}^2)^{1/2},$$

$$g_q = \frac{\sin(k_z a_z)}{k_z a_z}, \quad J_n(\lambda_{ns}^E) = 0, \quad J_n'(\lambda_{ns}^H) = 0,$$

$J_n(x)$ и $J_n'(x)$ - функция Бесселя и ее производная по аргументу. Отметим характерное свойство импеданса /8/: при переходе через резонанс $(k = k_{nE,H})\,Im\,Z_0$ меняет знак. Таким образом, резонансная полоса, ширина которой определяется добротностью и величиной инкремента, разделяет области устойчивости и неустойчивости пучка относительно НОМ /для достаточно удаленных друг от друга резонансов/.

Импеданс /8/ можно представить в виде суммы двух частей - логарифмически зависящей от малых размеров кольца, которую будем называть квазистатической, и волновой, обусловленной цилиндрической геометрией полей: $Z_0 = Z_0^{\text{стат.}} + Z_0^{\text{волн.}}$. Проводя в формуле /8/ суммирование по индексу s /см. приложение/, найдем

$$\tilde{Z}_0^{\text{стат.}} = -\frac{i}{\gamma^2}\frac{4\pi n}{kh}\sum_{q=1}^{\infty} g_q^2 G''_{nH}\left(\frac{r_0}{b}, b\chi_q\right), \qquad /9/$$

$$\tilde{Z}^{\text{волн.}} = i\frac{4\pi n}{kh}\sum_{q=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{k^2}{\chi_q^2}\right)G_{nE}\left(\frac{r_0}{b}, b\chi_q\right) + G''_{nH}\left(\frac{r_0}{b}, b\chi_q\right)\right], \qquad /10/$$

где $\chi_q = (k_z^2 - k^2)^{1/2}$. В предельном случае больших длин волн, когда выполнено условие

$$\frac{nh}{\pi r_0} \ll 1, \qquad /11/$$

в формулах /9/, /10/ можно воспользоваться асимптотическими разложениями модифицированных функций Бесселя, входящих в $G_{nE,H}$. Вычисляя сумму /9/ при $\frac{\pi a_z}{h} \ll 1$, получим

$$\tilde{Z}_0^{\text{стат.}} = \frac{i}{\gamma^2}\left[\ln\left(\frac{eh}{\pi a_z}\,\mathrm{th}\,\phi\right) + \frac{1}{2}\right], \qquad /12/$$

e - основание натуральных логарифмов, $\phi = \pi\cdot\frac{b-r_0}{h}$. Форма сечения пучка не оказывает существенного влияния на величину импеданса: так, для кольца круглого сечения радиуса a_z, $Z_0^{\text{стат.}}$ отличается от /12/ заменой e на 2 в аргументе логарифма.

В ультрарелятивистском пределе $(\gamma \to \infty)$ $Z_0^{\text{стат.}} \to 0$ и основную роль играет волновая часть импеданса. Если кольцо близко к цилиндрической стенке $(\phi \ll 1)$, то

$$\tilde{Z}_0^{\text{волн.}} = i\left(\frac{b-r_0}{b}\right)^2\cdot\left(-\ln\phi + \frac{1}{2}\right). \qquad /13/$$

В обратном случае $(\phi \gg 1)$ имеем *

$$\tilde{Z}_0^{\text{волн.}} = i\left(\frac{h}{\pi r_0}\right)^2\left[1 - 3\left(\frac{nh}{\pi r_0}\right)^2\right]. \qquad /14/$$

При $\frac{\pi r_0}{h} < n\sqrt{3}$ импеданс индуктивный $(V<0)$, так что в узком резонаторе $(\frac{h}{b} \ll 1)$ n-я гармоника при подходе к первому резонансу $(\frac{\pi r_0}{h} \sim n)$ устойчива в довольно широком интервале частот даже при нулевом энергетическом разбросе ** /подчеркнем, что проводимость стенок предполагается бесконечной/. Максимальное значение волновой части импеданса достигается при $\frac{\pi r_0}{h} \sim n\sqrt{6}$ и равно $\tilde{Z}_{max} \sim \frac{i}{12n^2}$.

Результаты расчетов на ЭВМ по формуле /9/ приведены на рис. 1. Оценим для примера величину энергетического разброса, необходимого для устойчивости электрического кольца при $\nu = 0{,}06$, $\gamma = 7$, $\frac{h}{b} = 0{,}2$, $\frac{b}{r_0} = 1{,}25$, $\frac{a}{r_0} = 0{,}03$, $\nu_r = 0{,}7$. Вычисления импеданса по формулам /12/, /14/ дают $\mathrm{Im}\,\tilde{Z}_0^{\text{стат.}} = 0{,}04$, $\mathrm{Im}\,\tilde{Z}_0^{\text{волн.}} = 0{,}007$. Для разброса, согласно условию /6/, получим $\frac{\Delta\gamma}{\gamma} \geq 2\,\%$.

---

* Первый член этого разложения был найден К.Пеллегрини и А. Сесслером в /7/. Для квазистатической части импеданса в той же работе получено вдвое большее значение, чем дает /12/.

** Этот факт, как и упомянутая неточность в работе /7/, был указан А.Г.Бонч-Осмоловским /8/.

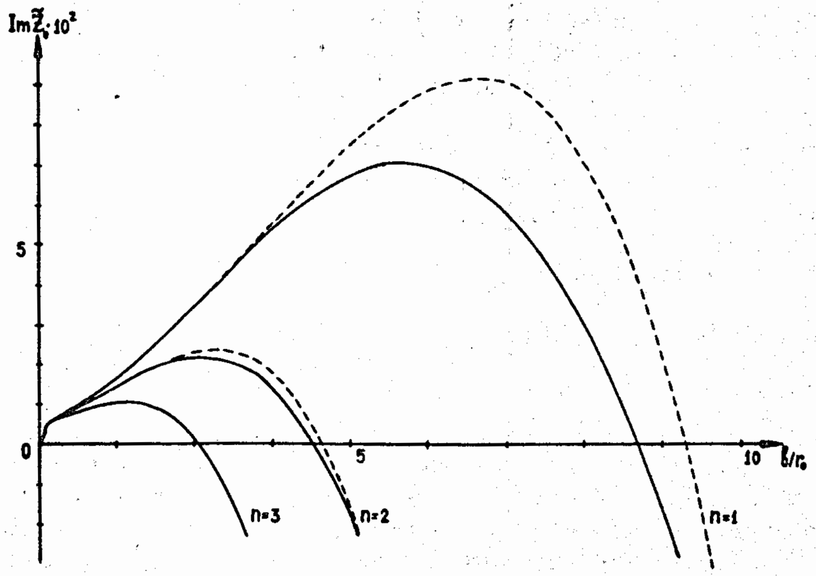

Рис. 1. Реактивная часть импеданса в зависимости от b/r_0 при $b/h = 5$.

Приведем еще одно представление для $Z_0^{\text{волн.}}$:

$$Z_0^{\text{волн.}} = i\,\frac{2\pi}{b^2}\sum_{s=1}^{\infty}\Big[\frac{\kappa_{sE}\, r_0}{k_{rE}^2}\,,\ \frac{J_n^2(k_{rE}\, r_0)}{N_{sE}}\ th\Big(\kappa_{sE}\,\frac{h}{2}\Big) - \qquad /15/$$

$$-\frac{r_0}{\kappa_{sH}}\,\frac{J_n'^2(k_{rH}\, r_0)}{N_{sH}}\ th\Big(\kappa_{sH}\,\frac{h}{2}\Big)\Big],$$

где $\kappa_{sE,H} = (k_{rE,H}^2 - k^2)^{1/2}$. Из /15/ легко видеть, что при $h/b \to \infty$ Z_0 переходит в выражение для реактивной части импеданса в волноводе /6,9,10/.

2. Резистивная неустойчивость

Найдем теперь резистивную поправку к импедансу. Для учета конечной проводимости воспользуемся граничным условием Леонтовича

$$[\vec{n}\,\vec{E}] = [\vec{n}\,[\vec{n}\,\vec{H}]]\cdot(1+i)R, \qquad /16/$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - напряженности электрического и магнитного полей на поверхности проводника, $\vec{n}$ - внешняя нормально к проводящей границе, $R = \left(\frac{\Omega}{8\pi\sigma}\right)^{1/2}$, σ - проводимость стенок. Определяя резистивные поля как возмущение полей в идеальном резонаторе, найдем поправку в первом порядке по R: $\Delta Z = \Delta Z^{(1)} + \Delta Z^{(2)}$, где

$$\Delta\tilde{Z}^{(1)} = -(1+i)\,R\,\frac{2\pi r_0^2}{n h b}\sum_{q=1}^{\infty}\Big\{\frac{I_n'^2(\chi_q r_0)}{I_n'^2(\chi_q b)} + \qquad /17/$$

$$+\Big(\frac{n k_z}{r_0\chi_q^2}\Big)^2\Big[\frac{I_n(\chi_q r_0)}{I_n(\chi_q b)} - \frac{r_0}{b}\,\frac{I_n'(\chi_q r_0)}{I_n'(\chi_q b)}\Big]^2\Big\}$$

учитывает конечную проводимость цилиндрической поверхности, а

$$\Delta\tilde{Z}^{(2)} = -(1+i)\,R\,\frac{2\pi}{n}\sum_{s=1}^{\infty}\Big\{\Big[\frac{n J_n(k_{rE}\, r_0)}{\lambda_{ns}^{E}\cdot ch(\kappa_{sE}\,\frac{h}{2})}\Big]^2\frac{1}{N_{sE}} + \qquad /18/$$

$$+\Big[\frac{r_0}{b}\cdot\frac{J_n'(k_{rH}\, r_0)}{ch(\kappa_{sH}\,\frac{h}{2})}\Big]^2\frac{1}{N_{sH}}\Big\}$$

- конечную проводимость торцов. В пределе $h/b \gg 1$, когда сумму можно заменить интегралом, выражение /17/

дает резистивную добавку к импедансу кольца в волноводе /6,11/.

При выполнении условия /11/ имеем

$$\Delta\tilde{Z}^{(1)} = -(1+i)R\,\frac{2\pi r_0^2}{nhb}\cdot sh^{-1}\,2\phi. \qquad /19/$$

Если, кроме того, $\phi \gg 1$, то

$$\Delta\tilde{Z}^{(2)} = -(1+i)R\,\frac{2r_0}{nh}. \qquad /20/$$

В узком резонаторе $(h/b \ll 1)$ резистивные эффекты определяются в основном конечной проводимостью торцевых стенок. На рис. 2 приведена зависимость величины $W = -(\frac{\sigma b}{c})^{1/2}\,Re\,\Delta\tilde{Z}^{(2)}$ от b/r_0 при $b/h=5$. Пунктирные кривые построены по формуле /20/.

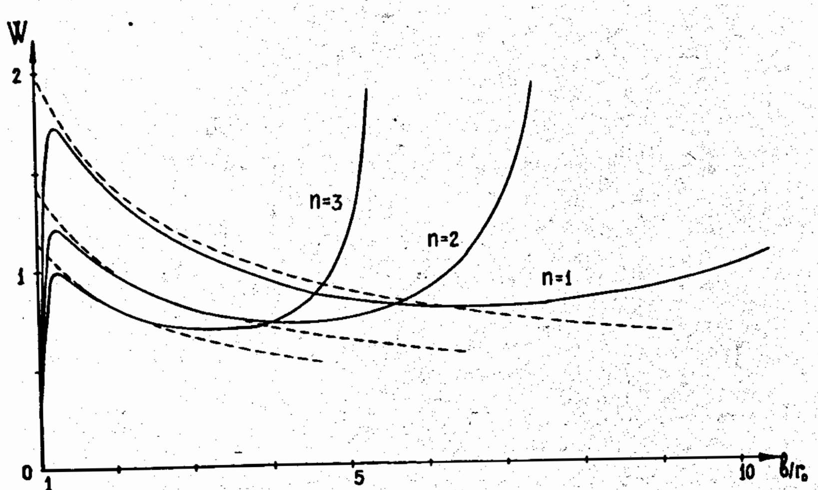

Рис. 2. Зависимость $W = -(\frac{\sigma b}{c})^{1/2} Re\,\Delta\tilde{\tilde{Z}}^{(2)}$ от b/r_0 при $b/h = 5$.

Обратимся теперь к решению дисперсионного уравнения /4/. Представляя импеданс в виде $\tilde{Z} = U + iV\,(U = Re\,\Delta Z)$, получим

$$p = \pm\sqrt{\beta}(|\tilde{Z}|-V)^{1/2} + i[a \mp \sqrt{\beta}(|\tilde{Z}|+V)^{1/2}],\ (U<0).$$

В тех областях частот, где возможна НОМ $(V>0)$, малой резистивной добавкой можно пренебречь. Так, для приведенных выше параметров и $\sigma b/c = 5.10^6$ $|U| \lesssim 10^{-3}$. Если же $V<0$, резистивные эффекты - единственный источник неустойчивости, причем условие устойчивости можно записать в виде

$$\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\right)^2 > \frac{\nu}{\gamma}\nu_r^2\,\frac{U^2}{2|V|}. \qquad /21/$$

Если функция распределения обладает резко спадающими границами, то, как уже отмечалось, необходимо, чтобы $Re\,\frac{\Omega}{n}$ лежала в пределах разброса по частотам обращения. Это приводит к более жесткому, нежели /21/, ограничению /2/. Так, для распределения Гаусса критерий устойчивости совпадает с /6/, в котором V следует заменить на $|\tilde{Z}|$.

3. *Резонансная неустойчивость*

Хотя этот тип неустойчивости исследовался ранее /4,5/, мы коротко на нем остановимся, поскольку в указанных работах не учитывалась нерезонансная часть импеданса.

Как видно из выражения /8/, n -я гармоника может резонировать лишь при $r_0 < \frac{nh}{\pi}$, так что соответствующим выбором геометрии камеры можно избежать резонансов первых наиболее опасных гармоник.

При частоте возмущения, близкой к одной из собственных частот камеры $(\Omega = \omega_{\text{рез}} = c\,k_{nE,H})$, импеданс /8/ можно представить в виде

$$Z = i(\mathcal{P} + \mathcal{R}\frac{\omega}{\Delta\Omega}), \qquad /22/$$

где $\mathcal{P}$ - вклад нерезонансных мод в импеданс, $\Delta\Omega = \Omega - \omega_{рез.}$

$$\mathcal{R} = \frac{4\pi r_0}{h\cdot b^2 k^2_{nE}} \cdot \frac{k_z^2}{k^2_{rE}} \cdot \frac{J_n^2(k_{rE} r_0)}{N_{sE}}$$

для E -волн и

$$\mathcal{R} = \frac{4\pi r_0}{h\, b^2 k^2_{nH}} \cdot \frac{J'^2_n(k_{rH} r_0)}{N_{sH}}$$

для H -волн. Конечную проводимость стенок камеры учтем как комплексную поправку к собственной частоте за счет добротности Q, пренебрегая сдвигом собственной частоты $\omega_{рез.} = \omega^{(0)}_{рез.}\cdot(1 + \frac{i}{2Q})$.

Дисперсионное уравнение /4/ теперь принимает вид

$$(p_1 + \delta - ia)^2 = -2\beta(\mathcal{P} + \frac{\mathcal{R}}{p_1 - \frac{i}{2Q}}), \qquad /23/$$

где $p = \frac{\Omega - \omega^{(0)}_{рез.}}{n\omega_0}$, $\delta = p - p_1$. В точном резонансе $(Re\, p_1 = 0)$ устойчивости $(Im\, p_1 \geq 0)$ при фиксированных параметрах a и β будут соответствовать значения добротности

$$Q < Q_{max} = \frac{\eta}{\mathcal{R}}\cdot(1 - \frac{\mathcal{P}}{\eta})^{1/2}, \qquad /24/$$

$\eta = a^2/2\beta$. Таким образом, при $\mathcal{P} > \eta$, что соответствует НОМ, пучок неустойчив независимо от величины Q. Если $\mathcal{P} < 0$, то для $Q = Q_{max}$ относительная расстройка между действительной частью частоты возмущения и n -й гармоникой частоты обращения $\delta = a(1 - \frac{\mathcal{P}}{\eta})^{1/2}$ больше полуширины распределения по частотам a. В результате

пучок с распределением гауссовского типа может быть неустойчив из-за экспоненциально малого числа частиц, что делает механизм затухания Ландау неэффективным /2/.

В узком резонаторе $(h/b \ll 1)$ при добротностях $Q < (\frac{b}{h})^2$ ширина резонансных линий становится больше расстояния между ними и представление /22/ для импеданса неправомерно. Тогда импеданс в окрестности m-го резонанса можно приближенно записать в виде

$$\tilde{\tilde{Z}} = -2\sum_{\ell = m-L}^{m+L} Q_\ell\, \mathcal{R}_\ell + i\mathcal{P}, \qquad /25/$$

где $2L = \frac{2}{Q}(\frac{b}{h})^2$ - число линий, перекрывающих m -й резонанс. Адиабатическое изменение частоты обращения пучка /5/ в этом случае, очевидно, несущественно, так как импеданс /25/ уже не имеет резонансного характера.

Зависимость $\mathcal{P}$ от r_0/h для $n = 1,2,3$ при $L = 0$ показана на рис. 3. На рис. 4 представлены коэффициенты $\mathcal{R}$ для $n = 1,2,3$, $s = 1 \div 10$, $q = 1$.

Приведем в заключение формулы для добротности резонатора на E и H модах соответственно:

$$Q^{-1}_{nE} = (\frac{c}{2\pi\sigma k_{nE}})^{1/2}\cdot(\frac{\epsilon_q}{h} + \frac{1}{b}) \qquad /26/$$

$$Q^{-1}_{nH} = (b\, k_{nH})^{-2}\cdot(\frac{c}{2\pi\sigma k_{nH}})^{1/2}\cdot[(\pi q\frac{b}{h})^2\cdot(\frac{1}{h} + \frac{n^2}{(\lambda^H_{ns})^2 - n^2}\cdot\frac{1}{b}) + \frac{(\lambda^H_{ns})^4}{(\lambda^H_{ns})^2 - n^2}\cdot\frac{1}{b}], \qquad /27/$$

где $k^2_{nE,H} = \left(\frac{\lambda^{E,H}_{ns}}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi q}{h}\right)^2$, $\epsilon_q = \frac{1}{2}$ при $q = 0$ и $\epsilon_q = 1$

при $q = 1, 2, \ldots$.

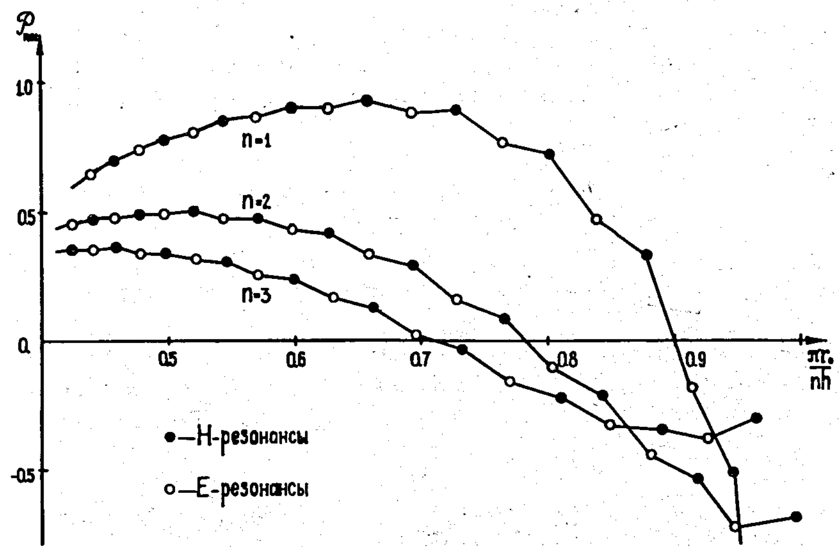

Рис. 3. Нерезонансная часть импеданса в зависимости от r_0/h для резонатора с $b/h = 5$.

Авторы пользуются случаем поблагодарить Э.А.Перельштейна за постоянный интерес к работе и стимулирующие обсуждения.

Приложение

Приведем формулы суммирования по корням бесселевых функций, которые были использованы при получении формул /9/, /10/, /17/, а также понадобятся во второй части работы. Согласно методу разложения Кнезера-Зоммерфельда /12/ имеем:

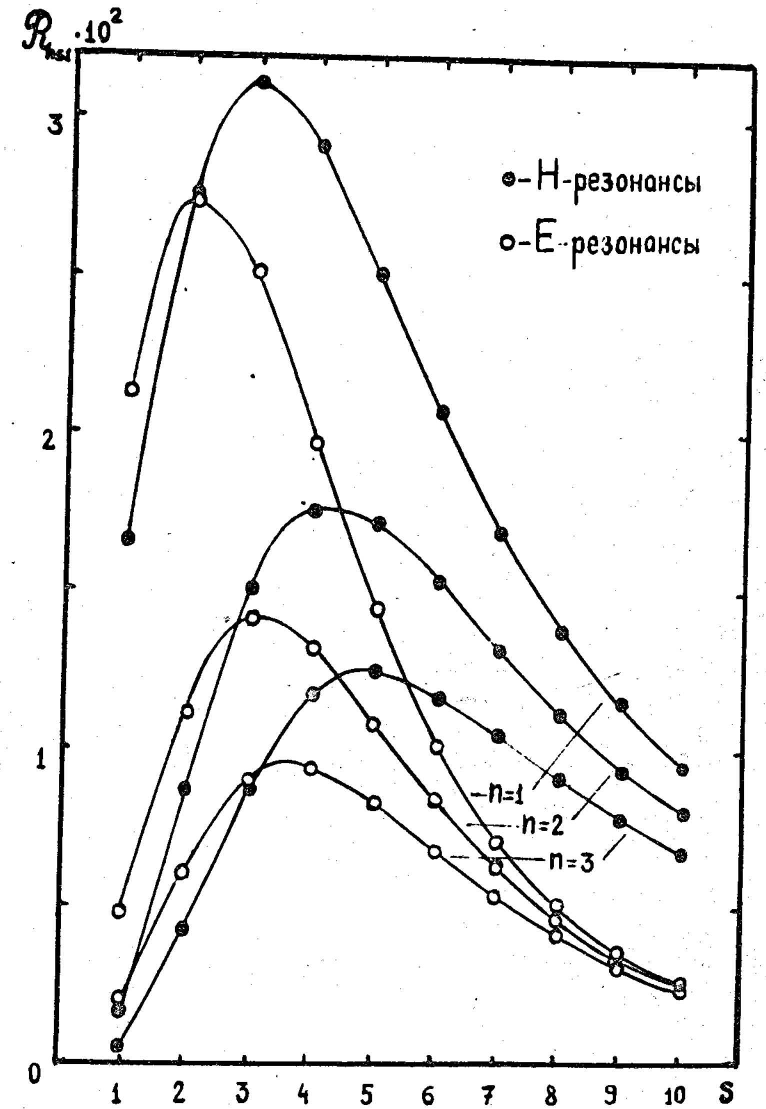

Рис. 4. Коэффициенты $\mathcal{R}_{nsl}$ для резонатора с b/h =5.

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{ns}^{E} x) J_n(\lambda_{ns}^{E} X)}{[z^2-(\lambda_{ns}^{E})^2] N_{sE}} = \frac{\pi J_n(xz)}{4 J_n(z)} \cdot [J_n(z) Y_n(Xz) - J_n(Xz) Y_n(z)],$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{ns}^{H} x) J_n(\lambda_{ns}^{H} X)}{[z^2-(\lambda_{ns}^{H})^2] N_{sH}} = \frac{\pi J_n(xz)}{4 J'_n(z)} \cdot [J'_n(z) Y_n(Xz) - J_n(Xz) Y'_n(z)],$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{J'_n(\lambda_{ns}^{E} x) J'_n(\lambda_{ns}^{E} X)}{[z^2-(\lambda_{ns}^{E})] N_{sE}} = -\frac{n}{4z^2X^2}\left(\frac{x}{X}\right)^{n-1}(1+X^{2n}) + \frac{\pi J'_n(xz)}{4 J_n(z)} \cdot [J_n(z) Y'_n(Xz) - J'_n(Xz) Y_n(z)],$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{J'_n(\lambda_{ns}^{H} x) J'_n(\lambda_{ns}^{H} X)}{[z^2-(\lambda_{ns}^{H})^2] N_{sH}} = -\frac{n}{4z^2X^2}\left(\frac{x}{X}\right)^{n-1}(1-X^{2n}) + \frac{\pi J'_n(xz)}{4 J'_n(z)} \cdot [J'_n(z) Y'_n(Xz) - J'_n(Xz) Y'_n(z)],$$

где $Y_n(x)$ - функция Неймана, $0 \le x \le X \le 1$. В тексте используются следующие обозначения:

$$G_{nE,H}(x,z) = I_n(xz) \cdot [K_n(xz) - I_n(xz) D_{nE,H}(z)],$$

$$G''_{nE,H}(xz) = I'_n(xz) \cdot [K'_n(xz) - I'_n(xz) D_{nE,H}(z)]$$

$$G'_{nE,H}(x,z) = \frac{1}{xz}\left[\frac{1}{2}(I'_n(xz)K_n(xz) + I_n(xz)K'_n(xz)) - I_n(xz)I'_n(xz)\overline{D}_{nE,H}(z)\right],$$

где $D_{nE} = K_n(z)/I_n(z)$, $D_{nH} = K'_n(z)/I'_n(z)$, $I_n(x)$ - модифицированная функция Бесселя, $K_n(x)$ - функция Макдональда.

Литература

1. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. АЭ, 7, 549 /1959/.
2. V.K.Neil, A.M.Sessler. Rev. of Sci. Instr., 36, 429 (1965).
3. И.Н.Иванов и др. Коллективное ускорение ионов. ЭЧАЯ, т. 1, вып. 2.
4. И.Н.Иванов. Препринт ОИЯИ Р9-3474-2, Дубна, 1967.
5. В.П.Григорьев, А.Н.Диденко. ЖТФ, 40, 2283 /1970/.
6. I.L.Korenev, L.A.Yudin. Proc. of 8-th Intern.Conf. on High-Energy Accelerators. CERN, Geneva, 1972, p. 461.
7. C.Pellegrini, A.M.Sessler. Symp. ERA, LRL, Berkeley, Calif. 1968, p. 442.
8. А.Г.Бонч-Осмоловский. Препринт ОИЯИ, Р9-6318, Дубна, 1972.
9. А.Г.Бонч-Осмоловский, А.Э.Перельштейн. Радиофизика, XIII, №7, 1089, 1970.
10. И.Л.Коренев, Л.А.Юдин. Радиофизика, ХУ, №2, 271 /1972/.
11. И.Л.Коренев, Л.А.Юдин, Радиофизика, ХУ, №4, 637 /1972/.
12. Г.Н.Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, Москва, 1949.

Рукопись поступила в издательский отдел 9 апреля 1973 года.