

СЗУ5п1

М-22

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



2249/2-73

18/01-73

P9 - 7064

В.Н.Мамонов

ЭКРАНИРОВКА ПЕРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ
В КООКСИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ТРУБ
С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

1973

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

P9 - 7064

В.Н.Мамонов

**ЭКРАНИРОВКА ПЕРЕМЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ
В КОАКСИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ТРУБ
С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ**

В модели линейного коллективного ускорителя^{/1/} в качестве ускоряющих элементов используются резонаторы коаксиального типа. Они располагаются внутри длинного соленоида, создающего продольное однородное магнитное поле, необходимое для удержания поперечных размеров электронного кольца, нагруженного нонами. Поскольку в модели используется импульсное магнитное поле, в стенках резонаторов возникают вихревые токи, которые приводят к нагреву резонаторов, уменьшению эффективного магнитного поля внутри их объема и к появлению несродности поля, вызванной неоднородностью структуры по длине. Ниже приводится методика, с помощью которой можно приближенно оценить эти эффекты.

На рис. представлено поперечное сечение системы, которая состоит из двух металлических труб с конечной проводимостью произвольной толщины и бесконечной длины, расположенных соосно. a и b - внешний и внутренний радиусы 1-й трубы, e и f - радиусы 2-й трубы. В соответствии с рисунком, индексам 2 и 4 будем обозначать величины, относящиеся к областям, занятым металлом, индексы 1, 3 и 5 будут относиться к областям вне металла. Пусть ось системы совпадает с координатой z цилиндрической системы координат. Внешнее однородное магнитное поле H_1 направим вдоль оси системы. При решении задачи были сделаны следующие допущения:

а/ система однородна вдоль координаты z и аксиаль-

но-симметрична, т.е. $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$;

б/ в переменном поле с частотой ω зависимость величин от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$.

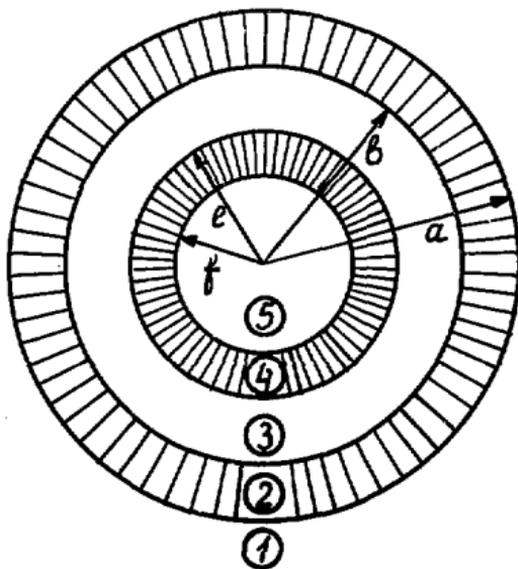


Схема расположения экранирующих элементов.

Расчет ведется в квазистационарном приближении^{/2/}, при котором справедливы уравнения:

в металле

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad /1/$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} \quad /2/$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad /3/$$

вне металла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0 \quad /4/$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Пусть во всем пространстве $\mu = 1$, удельная проводимость σ материала труб одинакова и постоянна. Вследствие однородности по z и аксиальной симметрии отличными от нуля везде будут только компоненты магнитного и электрического полей H_z и E_ϕ . Эти компоненты являются функциями только координаты r и времени. В дальнейшем индексы z и ϕ будем опускать.

Из уравнений /1/, /2/ и /3/ получим для H в металле уравнение

$$\Delta H + k^2 H \approx 0, \quad /5/$$

где $k = \frac{\sqrt{4\pi i \sigma \omega}}{c} = \frac{1+i}{\delta}$, $i = \sqrt{-1}$, δ - "глубина проникновения" поля в металл.

Учитывая, что H зависит только от r и t , перепишем уравнение /5/ в виде:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + k^2 H = 0.$$

В областях 2 и 4 решения этого уравнения будут иметь вид:

$$H_2(r, t) = [A J_0(kr) + B Y_0(kr)] e^{-i\omega t} \quad /6/$$

$$H_4(r, t) = [G J_0(kr) + F Y_0(kr)] e^{-i\omega t},$$

где A, B, G и F - пока неизвестные константы.

Для электрического поля в областях 2 и 4, используя уравнение /2/, будем иметь следующие выражения:

$$E_2(r, t) = \frac{kc}{4\pi\sigma} [A J_1(kr) + B Y_1(kr)] e^{-i\omega t}$$

$$E_4(r, t) = \frac{kc}{4\pi\sigma} [G J_1(kr) + F Y_1(kr)] e^{-i\omega t}. \quad /7/$$

Из уравнения /4/ $\text{rot } \vec{H} = -\frac{\partial H_z}{\partial r} = 0$ следует, что

вне металла магнитное поле не зависит от r , и в областях 1, 3 и 5 будет иметь вид: $H_1 e^{-i\omega t}$, $H_3 e^{-i\omega t}$, $H_5 e^{-i\omega t}$, где H_3, H_5 также подлежат определению.

Множитель $e^{-i\omega t}$ будем в дальнейшем опускать. Коэффициенты A, B, G и F с помощью граничных условий:

$$H_2 |_{r=0} = H_1, H_2 |_{r=b} = H_4 |_{r=c} = H_3, H_4 |_{r=f} = H_5 \quad /8/$$

можно выразить через величины H_1, H_3 и H_5 .
Получим следующие выражения:

$$A = \frac{H_3 Y_0(ka) - H_1 Y_0(kb)}{[]^{a,b}}, B = \frac{H_1 J_0(kb) - H_3 J_0(ka)}{[]^{a,b}} \quad /9/$$

$$G = \frac{H_5 Y_0(ke) - H_3 Y_0(kf)}{[]^{e,f}}, F = \frac{H_3 J_0(kf) - H_5 J_0(ke)}{[]^{e,f}}, \quad /10/$$

где $[]^{a,b} = Y_0(ka) J_0(kb) - J_0(ka) Y_0(kb);$

$$[]^{e,f} = Y_0(ke) J_0(kf) - J_0(ke) Y_0(kf).$$

Выражения для скобок можно переписать в общем виде:

$$[]^{r_1, r_2} = Y_0(kr_1) J_0(kr_2) - J_0(kr_1) Y_0(kr_2). \quad /11/$$

Таким образом, для полей в области 2 получаем следующие выражения:

$$H_2 = \frac{1}{[]^{a,b}} \{ [H_3 Y_0(ka) - H_1 Y_0(kb)] J_0(kr) + [H_1 J_0(kb) - H_3 J_0(ka)] Y_0(kr) \} \quad /12/$$

$$E_2 = \frac{kc}{4\pi\sigma []^{a,b}} \{ [H_3 Y_0(ka) - H_1 Y_0(kb)] J_1(kr) + [H_1 J_0(kb) - H_3 J_0(ka)] Y_1(kr) \}. \quad /13/$$

Аналогичные выражения имеют место и для полей в области 4. Связь между величинами H_1, H_3 и H_5 найдем, используя граничные условия для касательной составляющей электрического поля, а именно:

$$E_3 |_{r=f} = E_4 |_{r=f} \quad \text{и} \quad E_3 |_{r=b} = E_2 |_{r=b}. \quad /14/$$

Для определения электрического поля вне металла можно воспользоваться уравнением /1/ в интегральной форме:

$$\oint E_{\varphi} dl = \frac{i\omega}{c} \int B_n dS. \quad /15/$$

Поскольку контур интегрирования - окружность, то контурный интеграл дает $2\pi r E$, откуда

$$E = \frac{i\omega}{rc} \int_0^r H r dr. \quad /16/$$

С помощью выражения для поля E в области 4 с учетом /16/ и граничного условия /14/ при $r=f$, найдем выражение, связывающее H_5 и H_3 , которое будет иметь вид:

$$H_5 = H_3 \frac{4}{\pi k^2 f^2 \{ \}_{e,f}}, \quad /17/$$

где с помощью фигурной скобки обозначена следующая комбинация:

$$\{ \}_{r_1, r_2} = Y_0(kr_1) J_2(kr_2) - J_0(kr_1) Y_2(kr_2). \quad /18/$$

Выражение для электрического поля в области 3 будет иметь вид:

$$E_3 = \frac{i\omega}{rc} \int_0^r H r dr = \frac{i\omega}{rc} \left[\int_0^f H_5 r dr + \int_f^e H_4 r dr + \int_e^r H_3 r dr \right].$$

Делая соответствующие выкладки и используя граничное условие /14/ при $r=b$, найдем связь полей H_3 и H_1 :

$$H_3 = H_1 \frac{4}{\pi k^2 b^2 \{ \}_{a,b} + \frac{[\]^{a,b}}{[\]^{e,f}} \left[\pi k^2 e^2 \{ \}_{f,e} - \frac{16}{\pi k^2 f^2 \{ \}_{e,f}} \right]}. \quad /19/$$

Подставляя в /17/ выражение /19/, получим:

$$H_5 = H_1 \frac{4}{\pi k^2 f^2 \{ \}^{\sigma, f}} \cdot \frac{4}{\pi k^2 b^2 \{ \}^{a, b} + \frac{[]^{a, b}}{[]^{\sigma, f}} [\pi k^2 e^2 \{ \}^{f, \sigma} - \frac{16}{\pi k^2 f^2 \{ \}^{\sigma, f}}]}, \quad /20/$$

Выражения /19/ и /20/ совместно с /12/, /13/ и аналогичными выражениями для области 4 позволяют при заданном внешнем поле H_1 определять поля H и E во всех областях системы, а в областях 2, 4 и токи, поскольку $j = \sigma E$.

II.

Рассмотрим более общий случай, когда трубы имеют разную удельную проводимость. Проводимость 1-й трубы обозначим σ_1 , 2-й - σ_2 . Тогда выражения /17/ и /19/ будут иметь вид:

$$H_5 = H_3 \cdot \frac{4}{\pi k_2^2 f^2 \{ \}^{\sigma, f}}, \quad /21/$$

$$H_3 = H_1 \cdot \frac{4}{\pi k_1^2 b^2 \{ \}^{a, b} + \frac{k_1^2 []^{a, b}}{k_2^2 []^{\sigma, f}} [\pi k_2^2 e^2 \{ \}^{f, \sigma} - \frac{16}{\pi k_2^2 f^2 \{ \}^{\sigma, f}}]}, \quad /22/$$

где $k_1 = \frac{1+i}{\rho_1}$, $k_2 = \frac{1+i}{\rho_2}$, $\{ \}^{\sigma, f}$ и $\{ \}^{f, \sigma}$ совпадут с выражением /18/, если в нем r_1 и r_2 заменить соответствующими индексами, а k - на k_2 . Для $\{ \}^{a, b}$ имеет место аналогичное выражение, но вместо k надо подставить k_1 . $[]^{a, b}$ и $[]^{\sigma, f}$ совпадут с выражением /11/, в котором r_1 и r_2 надо заменить соответствующими индексами, а k заменить, соответственно, на k_1 и k_2 . Подстановкой /22/ в /21/ можно получить выражение, связывающее H_5 и H_1 .

III.

С помощью полученных формул рассмотрим несколько частных случаев.

1. Полагая в /22/ $e = f$ и делая соответствующие выкладки, получим выражение:

$$H_3 = H_1 \cdot \frac{4}{\pi k_1^2 b^2 \{ \}^{a,b}}, \quad /23/$$

которое представляет собой поле в объеме, ограниченном трубой. Множитель при H_1 характеризует "подсадку" амплитуды и сдвиг фазы поля H_3 по отношению к H_1 .

2. Если в /22/ устремить $t \rightarrow 0$, то, делая соответствующий предельный переход, получим выражение для поля, заключенного в объеме между трубой и цилиндром. Оно будет иметь вид:

$$H_3 = H_1 \cdot \frac{4}{\pi k_1^2 [b^2 \{ \}^{a,b} - \frac{e^2 [\}^{a,b} J_2(k_2 e)}{J_0(k_2 e)}]}. \quad /24/$$

Второе слагаемое в знаменателе обусловлено наличием цилиндра.

3. Обозначим $a - b = h_1$. В /19/ положим $e = f$.

Получим выражение: $H_3 = H_1 \cdot \frac{4}{\pi k_1^2 b^2 \{ \}^{a,b}}$ для одной трубы.

Если толщина стенки трубы $h_1 \ll \delta$, где $\delta \sim b$, то, проводя в полученном выражении разложение по параметру h_1/δ и сохраняя только линейный член, получим для H_3 выражение:

$$H_3 \approx H_1 \cdot \frac{1}{1 - i \frac{bh_1}{\delta^2}}. \quad /25/$$

4. Если в /19/ положить $e = f$, подставить в /12/ и устремить $b \rightarrow 0$, то получим выражение для распределения магнитного поля в цилиндре:

$$H_2 = H_1 \cdot \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}, \quad /26/$$

которое совпадает с выражением, приведенным в работе /27/.

Литература

1. В.И. Векслер и др. "Коллективное линейное ускорение ионов". Препринт ОИЯИ, Р9-3440-2, Дубна, 1968.
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. "Электродинамика сплошных сред", М., 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 апреля 1973 года.