ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р9 - 6921

А.Г.Бонч-Осмоловский

ЗАМЕЧАНИЕ О H_{φ}-ФОКУСИРОВКЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО КОЛЬЦА

1973

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

P9 - 6921

А.Г.Бонч-Осмоловский

ЗАМЕЧАНИЕ О H_{φ}-ФОКУСИРОВКЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО КОЛЬЦА

Направлено в ЖТФ

В работе автора [1] были рассмотрены условия равновесия заряженного кольца релятивистских электронов в винтовом магнитном поле, в том числе и движущегося вдоль оси этого поля с релятивистской поступательной скоростью $\dot{z}_0$.

Однако дальнейший анализ показал, что условия равновесия /фокусировки/ при $\dot{z}_0 \approx c$ содержат неточности, связанные с пренебрежением малыми изменениями полной энергии частицы в кольце. При этом оказывается невозможным правильно согласовать уравнения малых колебаний около положения равновесия, написанные в лабораторной системе отсчета и в системе покоя кольца как целого. Подробный разбор возникающего парадокса для частного случая колебаний одной частицы был проведен также Л.Ласлеттом *.

Проанализируем малые колебания электрона в кольце с учетом собственных полей в лабораторной системе координат. Итак, имеем однородное по оси винтовое магнитное поле $H_z, H_\phi = \frac{\kappa}{r}$ /обозначения те же, что и в [1]/, вдоль оси которого движется кольцо с радиусом R, средним радиусом малого сечения a, числом частиц N. Будем считать, как и в [1], что $\frac{a}{R} \ll 1$, $\frac{\nu}{\gamma_s} \cdot \ln \frac{8R}{a} \ll 1$, $\nu = \frac{N}{2\pi R} \cdot \frac{e^2}{mc^2}$, так что пренебрежем поправками к собственному полю, вызванными тороидальностью кольца /учет их новых физических эффектов не дает, но сильно усложняет выкладки/.

Уравнения движения можно привести к виду:

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) = \frac{1}{m^2 \gamma r^3}\left(M^2 - \frac{r^4}{4} \cdot \frac{e^2 H_z^2}{c^2}\right) - \frac{e\kappa}{mc} \cdot \frac{\dot{z}}{r} + (r - R)\frac{2c^2 \nu}{a^2 \gamma_s'^2 \gamma_{z_0}} \cdot \qquad /1/$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) = \frac{e\kappa}{mc} \cdot \frac{\dot{r}}{r} + (z - z_0)\frac{2c^2 \nu \gamma_{z_0}}{a^2 \gamma_s'^2} . \qquad /2/$$

---

* Выражаю глубокую признательность д-ру Ласлетту за присылку расчетов, касающихся этого вопроса [2].

В этих уравнениях, как и ранее, $\kappa > 0$, R, $z_0(t)$ - траектория равновесной частицы /по определению, это частица, на которую в первом приближении не действуют поля, созданные другими частицами/, $\gamma = (1 - \frac{\dot r^2}{c^2} - \frac{r^2\dot\phi^2}{c^2} - \frac{\dot z^2}{c^2})^{1/2}$, γ'_s - релятивистский фактор равновесной частицы в собственной системе отсчета. Рассмотрим теперь малые колебания возле этой равновесной траектории, считая, что $\xi = r - R$ и $\eta = z - z_0$ - малые величины. При этом следует учесть возможные изменения релятивистского фактора γ, который в отсутствие собственных полей кольца был бы постоянным при колебаниях около положения равновесия /магнитные поля считаются постоянными во времени/. В собственной системе отсчета /где кольцо как целое покоится/ H_ϕ - составляющая магнитного поля вызывает r -составляющую электрического поля $E'_r = -\beta_{z_0}\gamma_{z_0}H_\phi$, $\gamma_{z_0} = (1-\beta^2_{z_0})^{-1/2}$, которая приводит к линейным по ξ поправкам к γ'_s:

$$\gamma' = \gamma'_s - \frac{e\kappa}{mc^2R}\gamma_{z_0}\beta_{z_0}\xi'. \qquad /3/$$

Штрихи относятся к системе, где кольцо покоится. Нетрудно видеть, что в принятом приближении собственное электрическое поле кольца дает в /3/ лишь квадратичные по отклонениям поправки.

В лабораторной системе координат, используя преобразования энергии-импульса, получаем

$$\gamma = \gamma_s(1+\Lambda), \ \Lambda = \frac{\dot z_0\gamma^2_{z_0}}{c^2}\dot\eta - \frac{e\kappa\beta_{z_0}\gamma_{z_0}}{mc^2\gamma'_s R}\xi, \quad \gamma_s = \gamma'_s\gamma_{z_0}. \qquad /4/$$

С учетом /4/, после линеаризации уравнений движения /1-2/ приходим к следующим выражениям:

$$\begin{cases} \ddot\xi + \omega_\phi\gamma^2_{z_0}\dot\eta + \xi(\omega^2_H + 2\omega_\phi\frac{\dot z_0}{R} - \omega^2_\phi\beta^2_{z_0}\gamma^2_{z_0} - \frac{2c^2\nu}{a^2\gamma'^3_s\gamma^2_{z_0}}) = 0 \\ \ddot\eta + \omega_\phi\dot\xi + \eta(-\frac{2c^2\nu}{a^2\gamma'^3_s\gamma^2_{z_0}}) = 0. \end{cases} \qquad /5/$$

Здесь

$$\omega_\phi = \frac{e\kappa}{mcR\gamma_s}, \quad \omega_H = \frac{eH_z}{mc\gamma_s}.$$

Теперь видно, что если собственное поле кольца отсутствует ($\nu \to 0$), то в силу второго уравнения /5/ линейная поправка /4/ к полной энергии также отсутствует /точнее, $\gamma = const$, как и должно быть/. Таким образом, линейный по отклонениям эффект изменения полной энергии частицы при колебаниях вызван полем потенциальной ямы, в которой колеблется частица, и наличием релятивистской переносной скорости $\dot{z}_0$. Собственное поле кольца не вызывает линейных по отклонениям поправок к полной энергии в системе покоя ансамбля частиц как целого, но производит этот эффект в лабораторной системе координат, что не было учтено в /1/.

Результат /4/ изменяет условия равновесия, полученные в работе /1/ при $\dot{z}_0 = c$ / для покоящегося кольца изменений нет/. Действуя так же, как и в /1/, можно получить следующий вид этих условий /условий вещественности характеристических частот системы /5/:

$$\omega_\phi^2 \gamma_{z_0}^2 > \Omega^2/2, \qquad /6/$$

$$\gamma_{z_0}^2 (\Omega^2 - \omega_\phi^2 \gamma_{z_0}^2) < \frac{2c^2\nu}{a^2 \gamma_s'^3} < \frac{\Omega^4}{4\omega_\phi^2}. \qquad /7/$$

Здесь $\Omega^2 = \omega_H^2 + 2\omega_\phi \frac{\dot{z}_0}{R} + \omega_\phi^2$ - частота "свободных" колебаний.

Потребуем, чтобы левая часть неравенства /7/ выполнялась тривиально /при этом снимается сильное ограничение снизу на кулоновский заряд кольца/, т.е.

$$\omega_\phi^2 \gamma_{z_0}^2 > \Omega^2, \qquad /8/$$

тогда /6/ всегда выполнено. Теперь условия фокусировки выглядят так:

$$\omega_\phi^2 (\gamma_{z_0}^2 - 1) > \omega_H^2 + 2\omega_\phi \frac{\dot{z}_0}{R}, \qquad /9/$$

$$\nu/\gamma_s' < \frac{\Omega^4 \gamma_s'^2}{8\omega_\phi^2 (c/a)^2}. \qquad /10/$$

Условие /10/ выполняется для заряженных колец с принятыми в данном рассмотрении параметрами $(\nu/\gamma'_z \ll 1)$. Что касается условия /9/, то при релятивистской скорости кольца оно удовлетворяется при умеренных значениях H_ϕ-поля. С некоторым превышением можно пользоваться следующим простым соотношением:

$$H_\phi / H_z > \frac{1}{\gamma_{z_0} - 1} . \qquad /11/$$

Можно показать, что условия /6/, /7/ справедливы и для случая слабо неоднородного вдоль оси поля H_z.

В заключение заметим, что в собственной системе отсчета уравнения /5/ совпадают по форме с системой /18/, рассмотренной в работах /1/ и /3/, следовательно, при адиабатическом изменении параметров, например, γ_{z_0}. справедливы выводы, полученные в /3/. В частности, при медленном увеличении γ_{z_0} в неизменных полях H_ϕ и H_z происходит компрессия кольца по большому радиусу и существенное изменение малых размеров его сечения.

Литература

1. *А.Г.Бонч-Осмоловский. Препринт ОИЯИ, Р9-5299, Дубна, 1970. ЖТФ, т. XLI, 1345, 1971.*
2. *L.J.Laslett. ERAN-148, Berkeley, 1971.*
3. *А.Г.Бонч-Осмоловский. Препринт ОИЯИ, Р9-6463, Дубна, 1972. ЖТФ, т. XLII, в. 11, 1972.*

Рукопись поступила в издательский отдел
29 января 1973 года.