ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 6787

Ю.И.Алексахин, А.Г.Бонч-Осмоловский

ОБ ОТРАЖЕНИИ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ В МЕТАЛЛЕ

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

1972

Р9 - 6787

Ю.И.Алексахин, А.Г.Бонч-Осмоловский

ОБ ОТРАЖЕНИИ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ В МЕТАЛЛЕ

Направлено в ЖТФ

Теория отражения развита в электростатике и магнитостатике и служит удобным методом для нахождения полей зарядов и токов вблизи поверхностей раздела сред с различными ϵ и μ. Некоторые применения отражения в динамических задачах можно найти в работах /1,2,4/.

Ниже на примере простой модели будут рассмотрены условия отражения зарядов и токов, движущихся вблизи поверхности металла с конечной проводимостью.

Известно, что покоящийся заряд отражается в металле независимо от проводимости последнего. Условия отражения при движении заряда в принципе могут зависеть от величины проводимости металла. В идеальном металле / $\sigma = \infty$ / отражается любой ток, в том числе и постоянный, при этом на границе между вакуумом и металлом нормальная составляющая магнитного поля равна нулю *. Для реальных металлов условия токового отражения могут быть выполнены лишь для переменного во времени тока.

Пусть параллельно плоской поверхности металла с проводимостью σ перемещается со скоростью v бесконечно тонкая нить на расстоянии d от поверхности металла, имеющая в общем случае заряд на единицу длины q и ток I /в собственной системе отсчета/. Предположим, что металл имеет конечную толщину h и μ =1. Рассмотрение проведем в декартовой системе координат, в которой ось z направлена вдоль поверхности металла параллельно v и ось y - параллельно току нити.

---

* Оговоримся, что в стационарном случае это правильно, если учесть процесс возникновения постоянного тока. Вследствие бесконечно большой величины постоянной затухания для идеального металла указанное граничное условие сохранится и в стационарном режиме.

Тогда плотность заряда и тока можно представить в виде:

$$\rho = q\delta(x-d)\delta(z-vt)$$

$$j_y = I/\gamma\,\delta(x-d)\delta(z-vt) \qquad /1/$$

$$j_z = qv\delta(x-d)\delta(z-vt)\,, \quad \gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$$

Решение для зарядов $(I=0)$ определяется потенциалом Φ и A_z - составляющей векторного потенциала, которая, очевидно, в данном случае равна просто $A_z = \beta\Phi$. Таким образом, достаточно найти Φ и тогда определятся компоненты поля

$$E_z(x, z-vt) = -(1-\beta^2)\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad H_y = \beta E. \qquad /2/$$

Токовое решение $(q=0)$ определяется A_y -составляющей векторного потенциала и имеет компоненты поля

$$H_x(x, z-vt) = -\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad E_y = -\beta H_x. \qquad /3/$$

Будем искать решение в форме, соответствующей разложению полей на плоские волны, например:

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(x)\, e^{ik(z-vt)}\, dk. \qquad /4/$$

Поскольку в силу /1/ A_y и A_z определяются совершенно аналогично Φ, наметим ход решения для Φ. В вакууме, где летит токовая нить, уравнение для Φ после использования /4/ и

$$\delta(z - vt) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(z-vt)} dk$$ имеет вид:

$$\frac{d^2 \Phi_k}{dx^2} - \frac{k^2}{\gamma^2} \Phi_k = -2q\,\delta(x-d). \qquad /5/$$

Если записать правую часть /3/ в виде $\delta(x-d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa(x-d)} d\kappa$. то решение /5/ таково:

$$\Phi_k = \frac{q}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\kappa(x-d)}}{\kappa^2 + k^2/\gamma^2} d\kappa + A e^{-\frac{|k|}{\gamma} x}. \qquad /6/$$

Здесь A - произвольная постоянная.

Интеграл в /6/ имеет особенность при $k = 0$, связанную, по существу, с особенностью потенциала бесконечно-длинной нити. Так как в дальнейшем нас будут интересовать поля, выражения для которых не имеют такой особениости, при вычислении интеграла будем считать $k \neq 0$.

Тогда с помощью интегрирования в комплексной плоскости легко показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\kappa(x-d)}}{\kappa + k/\gamma} d\kappa = \begin{cases} \pi \dfrac{e^{-k/\gamma|x-d|}}{k/\gamma}, & k > 0 \\[2ex] \pi \dfrac{e^{-k/\gamma|x-d|}}{|k/\gamma|}, & k < 0. \end{cases} \qquad /7/$$

Для нахождения полей в металле решаем уравнение для Фурье - составляющих полей вида:

$$\text{и} \qquad \frac{d^2 f_k}{dx^2} - r^2 f_k = 0, \qquad r = \sqrt{k^2 - i\frac{4\pi\sigma}{c^2} k v}. \qquad /8/$$

$$f_k = B_k e^{rx} + C_k e^{-rx}.$$

Произвольные постоянные в решениях /6/, /8/ и для второй вакуумной области $(x - h)$ определяем из граничных условий непрерывности E_τ и H_τ при $x = 0$ и $x = -h$. В результате окончательно получаем для поля при $x > 0$:

$$E_z = -\frac{iq}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{|k|}\, e^{-\frac{|k|}{\gamma}(x-d)+ik(z-vt)}\,dk + \frac{iq}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{|k|}\, e^{-\frac{|k|}{\gamma}(x+d)+ik(z-vt)}\, F_E(k)\,dk .$$

Остальные поля зарядового решения отсюда определяются так:

$$E_z^{(k)} = -\frac{i\gamma^2}{k}\,\frac{\partial E_z^{(k)}}{\partial x}, \qquad H_y = \beta E_x .$$

$$H_x = -i\frac{I}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{|k|}\, e^{-\frac{|k(x-d)|}{\gamma}+ik(z-vt)}\,dk + \frac{iI}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{|k|}\, e^{-\frac{|k|}{\gamma}(x+d)+ik(z-vt)}\, F_H(k)\,dk . \qquad /10/$$

Зная H_x, легко определить и другие составляющие поля токового решения:

$$E_y = -\beta H_x , \qquad H_z^{(k)} = \frac{i}{k}\,\frac{\partial H_x^{(k)}}{\partial x} .$$

В формулах /9/ и /10/ введены функции $F_E(k)$ и $F_H(k)$, которые можно назвать коэффициентами зарядового и токового отражения, соответственно. Как видно из /9/ и /10/, когда

$$F_E(k) = 1 \qquad \text{и} \qquad F_H(k) = 1 \qquad /11/$$

для всех k, дающих заметный вклад в интегралы, имеет место отражение в металле заряда и тока, соответственно.

Эти коэффициенты таковы:

$$F_E(k) = \left(1 + \frac{\tau^2 v^2 \gamma^2}{16\pi^2\sigma^2}\right) \frac{e^{2\tau b} - 1}{e^{2\tau b}\left(1 - i\frac{k}{|k|}\frac{\tau v \gamma}{4\pi\sigma}\right)^2 - \left(1 + i\frac{k}{|k|}\frac{\tau v \gamma}{4\pi\sigma}\right)^2}$$

$$F_H(k) = (\tau^2\gamma^2 - k^2) \cdot \frac{e^{2\tau b} - 1}{e^{2\tau b}(\tau\gamma + |k|)^2 - (\tau\gamma - |k|)^2} \qquad /13/$$

Точные равенства /11/ имеют место лишь при $\sigma = \infty$, т.е. для идеального металла. При конечном σ речь может идти о приближенных условиях отражения, когда /11/ выполняются с достаточной степенью точности.

Рассмотрим прежде всего часто встречающийся в анализе случай полубесконечного металла, т.е. $b \to \infty$. Тогда F_E и F_H равны

$$F_E(k) = \frac{1 + i\frac{k}{|k|}\frac{\tau v \gamma}{4\pi\sigma}}{1 - i\frac{k}{|k|}\frac{\tau v \gamma}{4\pi\sigma}} \qquad /14/$$

$$F_H(k) = \frac{\tau\gamma - |k|}{\tau\gamma + |k|} \qquad /15/$$

Отметим следующее важное обстоятельство. Если выполнено условие:

$$\frac{4\pi\sigma}{k v} \gg \frac{1}{\beta^2} \qquad /16/$$

для всех k, дающих заметный вклад в интегралы /9/, /10/, $(k < k_m = \frac{\gamma}{d})$, то решения в виде /9/, /10/, /14/ и /15/ совпадают с теми, которые можно получить на основе граничных условий Леонтовича. Последние для нашего случая имеют вид /см., например, /3/ /:

$$E_y \big|_{x=0} = -\zeta H_z \big|_{x=0}$$

$$E_z \big|_{x=0} = \zeta H_y \big|_{x=0}, \quad \zeta = (1-i)\sqrt{\frac{k v}{4\pi\sigma}} . \qquad /17/$$

С помощью /17/ решение для F_H, например, имеет вид: $F_H = \frac{i\beta\gamma + \zeta}{i\beta\gamma - \zeta}$, и при условии /16/ оно совпадает с /15/.

Следовательно, /16/ в данной задаче /движение вблизи плоской границы/ представляет собой критерий применимости граничных условий Леонтовича. Перепишем /16/ в другом виде, введя "диэлектрическую проницаемость" металла $\epsilon = i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$.

$$\beta^2 |\epsilon| \gg 1 . \qquad /18/$$

В форме /18/ критерий применимости условий Леонтовича является обобщением критерия, полученного в работе Морозова /5/ , на случай сред с большим поглощением. В релятивистском случае $(\beta \approx 1)$ условие /16/ выполнено для всех реальных металлов, оно совпадает, фактически, с условием пренебрежения токами смещения по сравнению с токами проводимости $(\frac{\sigma}{\omega} \gg 1)$, что и предполагалось при записи уравнений поля в металле в форме /8/.

В нерелятивистском случае $(\beta \ll 1)$, вводя глубину скин-слоя $\delta = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\sigma k v}}$, можно записать условие /16/ в такой форме:

$$\delta \ll \frac{l}{k}\ ; \qquad \delta \ll \lambda\ . \qquad /19/$$

Достаточно потребовать выполнения /19/ для максимальной частоты

$\omega_m = \frac{v}{d}$, тогда

$$\delta_m \ll d\ . \qquad /20/$$

Вернемся к анализу условий отражения. Формула /15/ показывает, что токовое отражение в полубесконечном металле происходит, если выполнено

$$\frac{k}{|r|\,\gamma} \ll 1 \qquad \text{или} \qquad d\,|r| \gg 1\ . \qquad /21/$$

В релятивистском случае это условие всегда выполнено, а в нерелятивистском оно совпадает с /16/ или /20/.

Для движущегося заряда отражение, как показывает формула /14/, будет иметь место, если

$$\frac{|r|\,v\gamma}{4\pi\sigma} \ll 1\ . \qquad /22/$$

Это условие при нерелятивистских скоростях движения нити $(v \ll c)$ для реальных металлов всегда выполнено. В релятивистском случае, поскольку предполагается выполнение основного условия для металла $\frac{\sigma}{\omega} \gg 1$ или, для максимальной частоты $\gamma \ll \frac{4\pi\sigma}{c}\,d$, /22/ эквивалентно требованию

$$(\beta\gamma)^3 \ll \frac{4\pi\sigma d}{c}\ . \qquad /23/$$

Перейдем к случаю металла конечной толщины. Анализ формул /12/ и /13/ показывает, что отражение зарядов и токов в металле происходит снова лишь при выполнении основных условий /21/ и /22/. Однако при конечном h появляются дополнительные требования. Если /21/ и /22/ выполнены, то F_H и F_E близки в единице во всей областн существенных k, если выполнены соответственно условия:

$$\frac{2k}{|\tau|\gamma} \ll |th\,\tau h|, \qquad /24/$$

$$\frac{|\tau|\, v\gamma}{2\pi\sigma} \ll |th\,\tau h|. \qquad /25/$$

Отсюда следует, что толщина металла ограничена снизу требованиями:

$$h \gg \frac{c}{2\pi\sigma\beta\gamma} = \frac{\delta_m^2}{d} \qquad /26/$$

для существования токового отражения и

$$h \gg \frac{c\beta\gamma}{2\pi\sigma} \qquad /27/$$

- для зарядового отражения.

В связи с /26/ интересно отметить, что токовое отражение может иметь место не только в физически очевидном случае $\delta_m \ll d$, $\delta_m \ll h$ /4/, но и при $h \ll \delta_m$.

Для тока при условии /21/ и

$$h \ll \delta_m \qquad /28/$$

можно получить, разлагая экспоненту в /13/ и проводя интегрирование в /10/, следующее простое выражение для отраженного поля:

$$H_x \quad -\frac{2I}{c\gamma}\cdot\frac{\kappa}{1+\kappa^2}\cdot\frac{\kappa(z-vt)-\frac{x+d}{\gamma}}{(z-vt)^2+\left(\frac{x+d}{\gamma}\right)^2}, \qquad /29/$$

где
$$\kappa = \frac{2\pi\sigma h}{c}\beta\gamma .$$

При $\kappa \gg 1$, что совпадает с условием /26/, /29/, имеет вид поля идеально отраженного тока. Из /29/ следует выражение для силы торможения /на единицу длины токовой нити/ вблизи металла:

$$f_z^H = -\frac{1}{d\gamma}\left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\kappa}{1+\kappa^2} . \qquad /30/$$

Аналогичные выражения можно получить для заряженной нити. Если выполнено /22/ и

$$h \ll \min\left\{\delta, \frac{d}{\gamma}\right\}, \qquad /31/$$

то

$$E_z \approx -\frac{2q}{\gamma}\frac{p}{1+p^2}\cdot\frac{p(z-vt)+\frac{x+d}{\gamma}}{(z-vt)^2+\left(\frac{x+d}{\gamma}\right)^2}, \qquad /32/$$

где $p = \frac{2\pi\sigma h}{c}\cdot\frac{1}{\beta\gamma}$.

Сила торможения теперь равна:

$$f_z^E = -\frac{q^2}{d}\cdot\frac{p}{1+p^2} . \qquad /33/$$

Отметим, что полученные выражения для силы торможения /30/ и /33/ вблизи металла малой толщины имеют характерные максимумы /при $\kappa = 1$ и $p = 1$ /, имеющие, видимо, то же происхождение, что и максимумы силы торможения вблизи полубесконечного металла /6,7/ .

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Г.М.Болотовского и И.Л.Коренева за полезные замечания.

Литература

1. А.Г.Бонч-Осмоловский, Г.В.Долбилов, И.Н.Иванов, Э.А.Перельштейн, В.П.Саранцев, О.И.Ярковой. Препринт ОИЯИ Р9-4135, Дубна, 1968.
2. L.J.Laslett. Brookhaven, BNL–7534 (1963).
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. "Электродинамика сплошных сред", ГИТТЛ, Москва, 1957.
4. А.Г.Бонч-Осмоловский. Сообщения ОИЯИ, Р9-6318, Дубна, 1972.
5. А.И.Морозов. ЖЭТФ, 33, 933 /1957/.
6. А.И.Морозов. ЖЭТФ, 31, 1079 /1956/.
7. Г.В.Воскресенский, И.Л.Коренев, В.Н.Курдюмов, М.Л.Левин. Симпозиум по коллективным методам ускорения, Дубна, Д9-6707, 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 ноября 1972 года.