

Ц 840 а

В-751

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P9 - 6755

2.86/2-73



С.Б.Ворожцов

РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНЫХ  
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ  
МЕТОДОМ СЕТОК

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

1972

P9 - 6755

С.Б.Ворожцов

РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНЫХ  
ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ  
МЕТОДОМ СЕТОК

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

В связи с успехами расчетов на ЭВМ двумерных стационарных магнитных полей конечно-разностными методами в последнее время возрос интерес к рассмотрению трехмерных конфигураций /1+5/. Однако рассматриваемые до сих пор конфигурации элементов, создающие поля, в значительной степени ограничены геометрически необходимостью сведения их к прямоугольным формам. В настоящей работе предлагается использовать при расчете полей альтернирующий метод Шварца /6/ для расширения класса рассматриваемых конфигураций.

Пространство, где локализовано поле, заполняется без пустот множеством пересекающихся или соприкасающихся геометрических элементов правильной формы /параллелепипед, шар, цилиндр и т.д./. Сегментирование производится так, чтобы внутри любого элемента не проходила граница разрыва свойств среды и не менялся вид решаемых уравнений в частных производных. Для каждого элемента ставится краевая задача с постоянными граничными условиями, определяемыми решаемой проблемой, и переменными условиями, изменяющимися в процессе нахождения решения методом Шварца.

Достоинства данного подхода к расчету стационарных электрических и магнитных полей следующие:

1. Моделируются с хорошей точностью конфигурации электродов и магнитных элементов сложной формы, определяемой разнообразием геометрических элементов.
2. Правильная форма элементов позволяет наиболее эффективно использовать результаты теории уравнений в частных производных при выборе оптимального метода решения в пределах элемента. Расчет может быть выполнен методом сеток /эффективность метода возрастает для элементов правильной формы/, методом функции Грина, известной для большинства элементов, и т.д.
3. Оптимальное использование внешней памяти ЭВМ достигается за счет увеличения отрезка времени между обращениями к ней и одновременного расположения в оперативной памяти информации лишь о двух элементах.

4. В пределах областей, где требуется наибольшая точность решения, можно помещать элементы с более подробным прослеживанием поля /например, уменьшать шаг сетки для метода сеток/.

Для демонстрации эффективности метода были написаны две программы *BOUVAL* и *RUNBOX* по расчету трехмерных электростатических полей.

Исходными данными программы *BOUVAL* являются число элементов задачи, их тип, размеры, положение в пространстве. Граничная поверхность элементов рассматривается как совокупность выпуклых многоугольников, в пределах каждого из которых задано либо постоянное значение потенциала  $U = const$ , либо условие симметрии  $\partial U / \partial \vec{n} = 0$ .

С помощью программы *RUNBOX* ведется расчет распределения потенциала с использованием информации на магнитной ленте, подготовленной при счете по *BOUVAL*.

Нахождение решения в пределах одного элемента осуществляется методом сеток с применением последовательной оптимальной верхней релаксации /7/. Итерационная формула для сетки в декартовой системе координат  $x, y, z$  имеет вид /8/:

$$U_{000}^{(n+1)} = U_{000}^{(n)} + \omega [C_x (U_{100}^{(n)} + U_{-100}^{(n)}) + C_y (U_{010}^{(n)} + U_{0-10}^{(n)}) + C_z (U_{001}^{(n)} + U_{00-1}^{(n)})], \quad /1/$$

где

$$C_x = \frac{(\Delta y)^2 (\Delta z)^2}{D_{xyz}}; \quad C_y = \frac{(\Delta x)^2 (\Delta z)^2}{D_{xyz}}; \quad C_z = \frac{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{D_{xyz}};$$

$$D_{xyz} = 2[(\Delta y)^2 (\Delta z)^2 + (\Delta x)^2 (\Delta y)^2 + (\Delta x)^2 (\Delta z)^2],$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$  - интервалы сетки по осям  $x, y, z$ ,

$$U_{ijk} = U[x_0 + i(\Delta x), y_0 + j(\Delta y), z_0 + k(\Delta z)].$$

$(x_0, y_0, z_0)$  - узел сетки, для которого вычисляется потенциал,  $\omega$  - коэффициент релаксации, выбираемый в соответствии с работой /9/,  $n$  - номер итерации по всем узлам сетки.

Для цилиндрической системы координат имеем:

$$U_{000}^{(n+1)} = U_{000}^{(n)} + \omega [C_{r_1} (U_{100}^{(n)} + U_{-100}^{(n)}) + C_{r_2} (U_{100}^{(n)} - U_{-100}^{(n)}) + C_\phi (U_{010}^{(n)} + U_{0-10}^{(n)}) + C_z (U_{001}^{(n)} + U_{00-1}^{(n)})],$$

где

$$C_{r_1} = \frac{r^2 (\Delta \phi)^2 (\Delta z)^2}{D_{r\phi z}}; \quad C_{r_2} = \frac{r (\Delta r) (\Delta \phi)^2 (\Delta z)^2}{2 D_{z\phi z}};$$

$$C_\phi = \frac{(\Delta r)^2 (\Delta z)^2}{D_{r\phi z}}; \quad C_z = \frac{r^2 (\Delta r)^2 (\Delta \phi)^2}{D_{r\phi z}};$$

/2/

$$D_{r\phi z} = 2r^2 [(\Delta r)^2 (\Delta \phi)^2 + (\Delta \phi)^2 (\Delta z)^2 + (\Delta z)^2 (\Delta r)^2].$$

Обозначения величин в /2/ аналогичны используемым в /1/. Вычисление потенциала в граничных точках с условием  $\partial U / \partial n = 0$  также производится по /1/ или /2/, но с учетом одного или нескольких соотношений вида:

$$U_{100} = U_{-100} ; U_{010} = U_{0-10} ; U_{001} = U_{00-1} \quad /3/$$

Пересчет переменных граничных условий производится интерполированием в пространстве по формуле:

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta, \kappa) = & U_{000} + \xi(U_{100} - U_{000}) + \eta(U_{010} - U_{000}) + \\ & + \kappa(U_{001} - U_{000}) + \xi\eta(U_{110} - U_{010} - U_{100} + U_{000}) + \\ & + \eta\kappa(U_{011} - U_{010} - U_{001} + U_{000}) + \xi\kappa(U_{101} - U_{100} - U_{001} + U_{000}) + \\ & + \xi\eta\kappa(U_{111} - U_{110} - U_{101} - U_{011} + U_{100} + U_{010} + U_{001} - U_{000}), \end{aligned} \quad /4/$$

где  $\xi = \frac{x-x_0}{\Delta x}$ ;  $\eta = \frac{y-y_0}{\Delta y}$ ;  $\kappa = \frac{z-z_0}{\Delta z}$ ;  $/x_0, y_0, z_0/$  - ближайший к  $x, y, z$  /узел координатной сетки.

Аналогичная формула используется при интерполировании в цилиндрической системе координат с заменой  $x \rightarrow r, y \rightarrow \phi, z \rightarrow z$ .

Для граничных точек с условием  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$  используется двухмерная форма выражения /4/.

На рис. 1 и 2 представлены результаты расчета на ЭВМ СДС-1604А конфигураций электродов, состоящих из параллелепипедов и цилиндра.

Сходимость итерационного процесса по переменным граничным условиям определяется по

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N |U_i^{(n)} - U_i^{(n-1)}|}{\sum_{i=1}^N |U_i^{(n)}|} \quad /5/$$

где  $N$  - число точек с переменными граничными значениями. Процесс заканчивается при  $\rho \leq 10^{-6}$ . В пределах элементов релаксация прерывается при изменяющемся по мере стабилизации переменных граничных условий  $\rho = 10^{-3} - 10^{-6}$ . Оценка /5/ в этом случае ведется по всем внутренним узлам сетки элемента. Максимальное число узлов  $20 \times 20 \times 20$ , общее число элементов  $\leq 20$ . Для получения указанной степени сходимости в задачах рис. 1,2 потребовалось 8-10 итераций по изменению граничных условий и было затрачено ~ 20 мин счета на ЭВМ.

На рис. 3 представлены для сравнения расчетные и экспериментальные данные /точки/, полученные с помощью электролитической ванны. Хотя конфигурация электродов рис. 3 может быть рассмотрена как двумерная, расчет велся в пространстве, причем, задавалось условие  $\partial U / \partial \vec{n} = 0$  на плоскостях  $X = 0$  и  $X = a$ . Расчетные и экспериментальные распределения совпадают в пределах точности эксперимента.

На рис. 4 пунктирными линиями показано разбиение на элементы реалистической конфигурации пулера и ионного источника. По внешней границе области задано условие отсутствия потока  $\partial U / \partial \vec{n} = 0$ .

Включение в программы расчета элементов с нелинейными свойствами среды в соответствии с /2/ позволит проводить расчеты магнитных полей с учетом насыщения.

Автор благодарит Н.Л.Заплата за постоянную поддержку и внимание к работе, А.А.Глазова и Н.Г.Шакуна за предоставление экспериментальных данных, Т.Н.Дудареву за помощь при проведении расчетов на ЭВМ.

## Литература

1. D.Nelson et al., IEEE, NS-16, No.3, p.766, 1969.
2. D.J.Kozakoff et al., IEEE, Mag-6, No.4, p.828, 1970.
3. A.A.Halacsy, III Int. Conf. on Mag. Tech. Hamburg 1970.
4. S.Саямаех. CERN ISR-MA/70-19, 1970.
5. Н.И.Дойников, А.С.Симаков, II-Всесоюзное совещание по ускорителям заряженных частиц, Москва, 1972. Изд. "Наука", ст. 143.
6. Р.Курант. Уравнения с частными производными изд. "Мир", 1964, ст. 293.
7. В.Вазов, Дж.Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Из. ин. лит. 1963.
8. И.В.Фрязинов. ЖВМ и МФ, II, №5, 1971, 1219-1228.
9. В.А.Саррэ. Comp. Journ. V.4, No. 1, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел  
18 октября 1972 года.

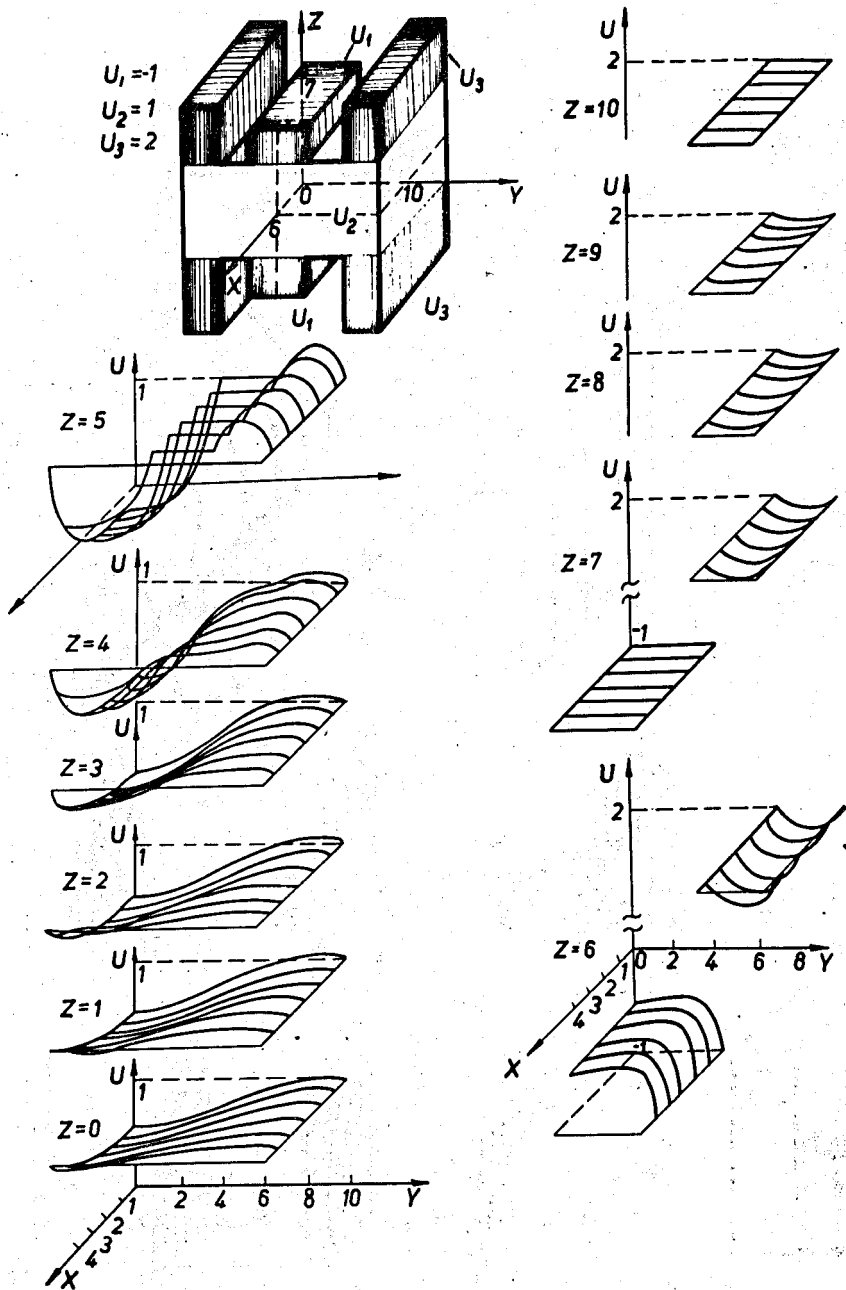


Рис. 1. Расчет конфигурации, состоящей из трех параллелепипедов, с условием симметрии на трех взаимно-перпендикулярных плоскостях.



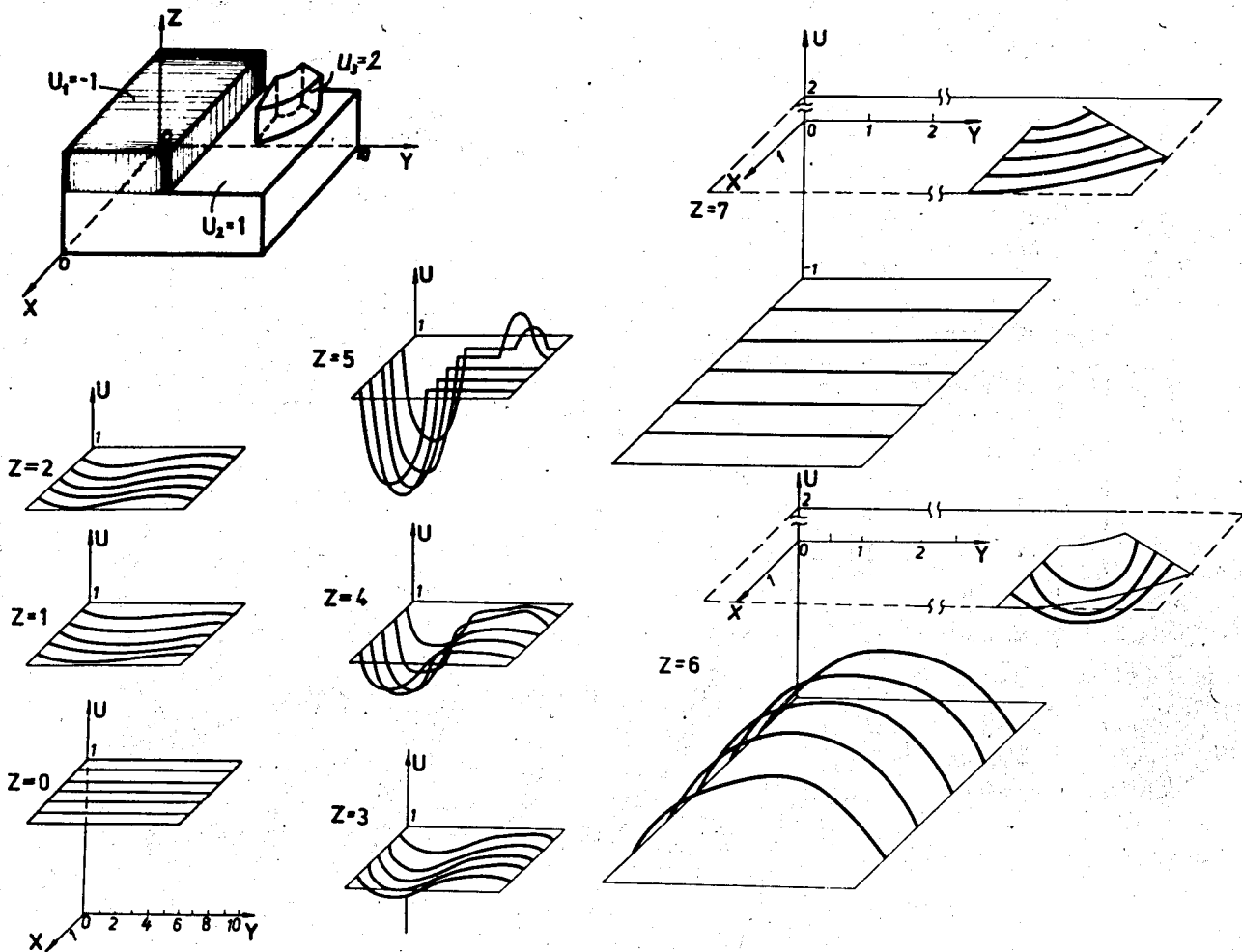


Рис. 2. Расчет конфигурации из двух параллелепипедов и цилиндра с сегментом в основании.

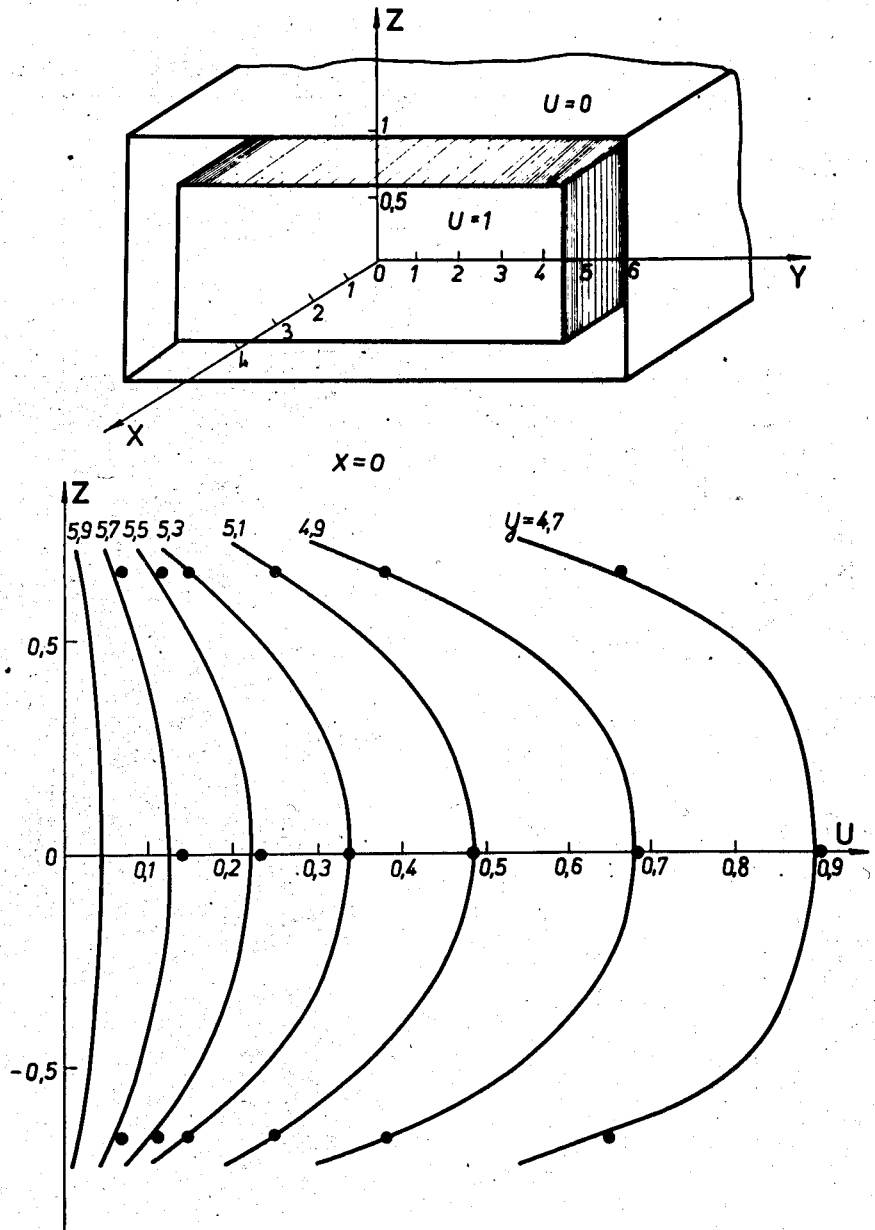


Рис. 3. Сравнение расчетных и экспериментальных данных.

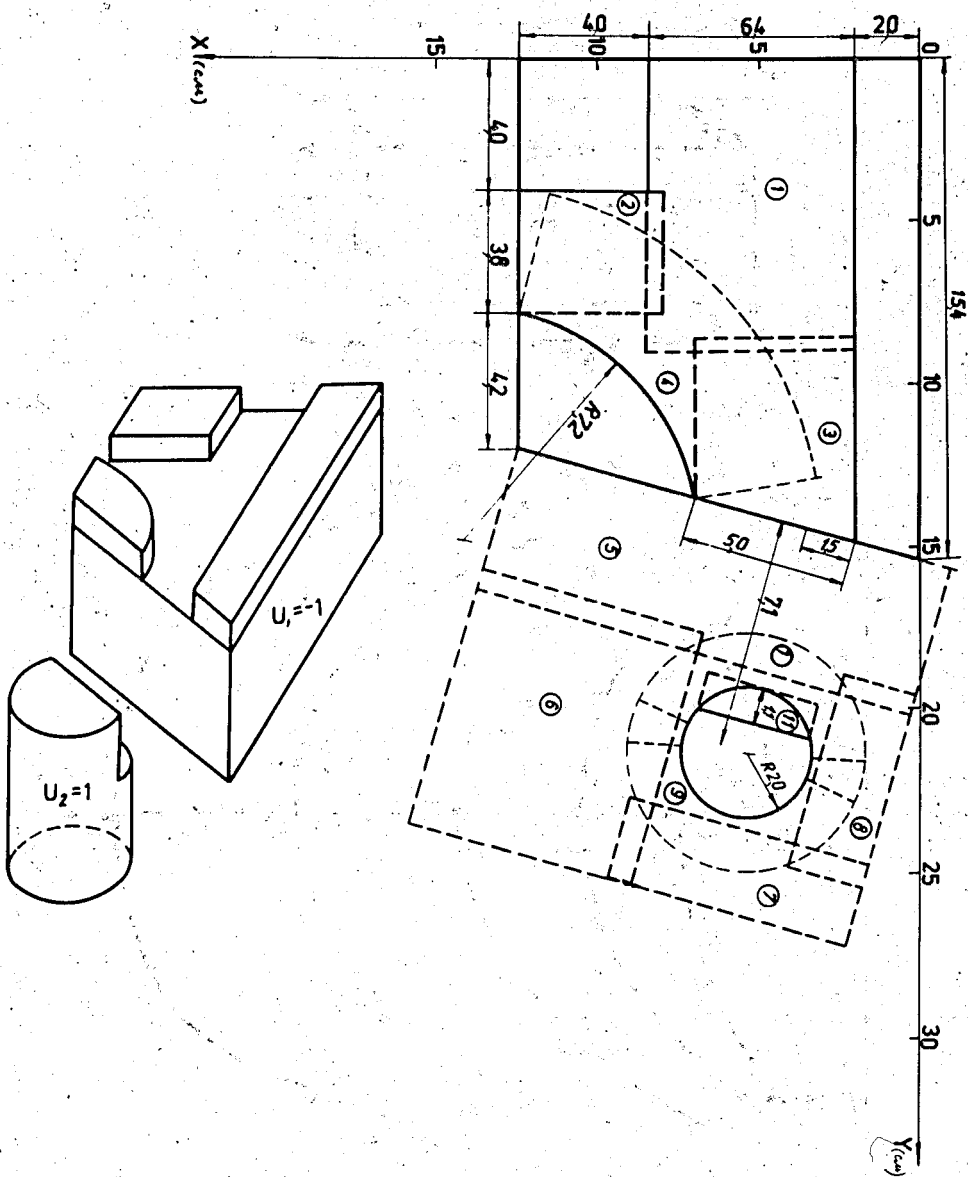


Рис. 4. Представление конфигурации пулера и ионного источника в виде совокупности элементов.