

С 345 л 2

П-181

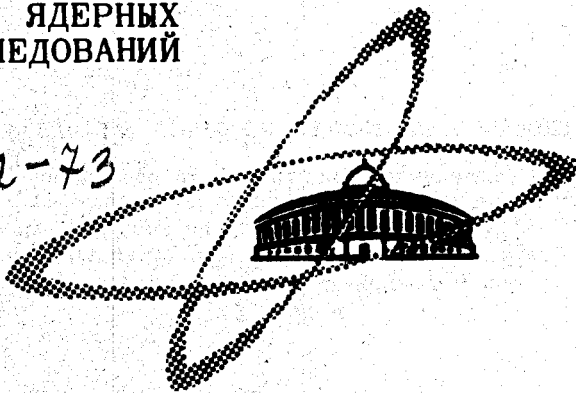
2/1-73

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

77/2-73

P9 - 6700



Д.Париш, П.И.Рыльцев, В.П.Саранцев

К ПАРАКСИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ИНТЕНСИВНЫХ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

1972

P9 - 6700

Д.Париш, П.И.Рыльцев, В.П.Саранцев

К ПАРАКСИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ИНТЕНСИВНЫХ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

ВВЕДЕНИЕ

В современной ускорительной технике одной из основных технических задач является создание интенсивных пучков или плотных сгустков заряженных релятивистских частиц. Так, например, при осуществлении идей коллективных методов ускорения /1/ возникают задачи создания электронных колец малого размера с числом частиц $N_e \approx 10^{13}$ или больше, электронных пучков с током в десятки килоампер, удержания размеров этих пучков и колец при больших расстояниях, проходимых ими, или при длительных интервалах времени, управления параметрами пучков при энергиях частиц 3-4 Мэв и выше и т.д.

Выполнение указанных технических задач без конкретных инженерных расчетов не представляется возможным. При этом особенно важным является рассмотрение влияния начального разброса параметров пучка, поведения фазового объема, а также колебаний, возникающих в пучке.

Параксиальная теория в ее обычном виде оперирует с линеаризованными дифференциальными уравнениями. Для внешних полей, которые разлагаются в быстро сходящиеся ряды, линеаризация дает хорошие приближения. Однако учет собственных полей вызывает появление нелинейностей другого характера, простая линеаризация которых может означать далекий отход от действительности. Поэтому, исходя из самых общих уравнений движения, попытаемся дать параксиальной теории интенсивных пучков несколько расширенную форму, а затем проанализируем полученные результаты.

Параксиальное движение с включением конечного фазового объема применительно к генераторам Ван-де-Граафа было рассмотрено в работе /2/. Более общая постановка вопроса содержится в работе /3/. Параксиальная теория при нулевом фазовом объеме и не очень высоких плотностях заряда, как она изложена, например в работе /4/, в инженерной практике полностью себя оправдала.

Поэтому в данной работе, учитывая результаты работ /2/ и /3/, мы поставили перед собой задачу рассмотреть параксиальную теорию пучков ненулевого фазового объема и релятивистских скоростей в области больших плотностей пространственного заряда.

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения движения заряженной частицы в цилиндрической системе координат при произвольных скоростях имеют вид

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \eta \left[\gamma E_r + B_z \frac{d\theta}{d\tau} r - B_\theta \frac{dz}{d\tau} \right] + \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 r,$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) = \eta \left[\gamma E_\theta + B_r \frac{dz}{d\tau} - B_z \frac{dr}{d\tau} \right] r,$$

/1/

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \eta \left[\gamma E_z + B_\theta \frac{dr}{d\tau} - B_r \frac{d\theta}{d\tau} r \right].$$

Здесь $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, v - полная скорость частицы, c - скорость света в вакууме, $\eta = e/m_0$ - отношение заряда частицы к ее массе покоя, $dt = \gamma d\tau$, где t - время.

Если внешние поля обладают вращательной симметрией и не зависят от времени, то $E_\theta = B_\theta = 0$. Если, далее, движение происходит

вблизи оси симметрии, то $B_r \approx -(dB_z/dz) \cdot (r/2)$. Электростатический потенциал и поток магнитной индукции разлагаются при этом в степенной ряд

$$\phi(r, z) = \Phi(z) - \frac{1}{4} r^2 \left[\Phi''(z) + \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0(z) \right] + \dots,$$

/2/

$$\Psi(r, z) = \pi r^2 \left(B_z - \frac{1}{8} r^2 B_z'' + \dots \right).$$

Здесь $\rho_0(z)$ - плотность пространственного заряда, ϵ_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума, а штрихи обозначают производную по своему аргументу.

Предполагается также, что заряд в любом сечении пучка распределяется равномерно, а пучок - тонкий и очень длинный. Траектории отдельных частиц в этом пучке не пересекаются. Тогда можно рассматривать траекторию крайней частицы пучка, на которую действует весь тонкий пучок, а траектории всех других частиц внутри пучка будут подобны этой траектории. Электрическое поле в таком случае определяется как поле равномерно заряженного цилиндра, а магнитное поле - как поле проводника с током, т.е.

$$E_{r\rho} = \frac{l}{2\pi\epsilon_0 v_c} \cdot \frac{1}{r_c}, \quad B_{\theta\rho} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{1}{r_c},$$

/3/

где l - полный ток пучка, r_c - радиус его, v_c - средняя скорость по оси, μ_0 - магнитная проницаемость вакуума.

а/. Азимутальное движение

Второе уравнение системы /1/ для параксиальной области после интегрирования дает

$$\frac{d\theta}{dr} = \dot{\theta} = -\frac{\eta}{2} B_z \left(1 - \frac{\frac{\eta}{2} B_{z0} + \dot{\theta}_0}{\frac{\eta}{2} B_z} \frac{r_0^2}{r^2} \right).$$

/4/

Это уравнение - математическое выражение теоремы Буша, где B_z , θ_0 , r_0 - начальные значения соответствующих величин.

б/ Движение по оси z .

Используя /2/ и /4/, последнее уравнение системы /1/ можно переписать в виде

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} - \eta \gamma E_z = \frac{\eta \mu_0 I}{2\pi r_c} \frac{dr}{d\tau} -$$

$$- \frac{\eta^2}{4} B_z B'_z r^2 + \frac{\eta}{2} B'_z \left(\frac{\eta}{2} B_{z_0} + \dot{\theta}_0 \right) r_0^2. \quad /5/$$

в/ Радиальное движение

Первое уравнение системы /1/ с помощью /4/ для крайнего электрона можно записать в виде

$$\frac{d^2 \lambda}{d\tau^2} + \left[\frac{\eta^2}{4} B_z^2 + \frac{\eta}{2} \gamma (\Phi''(z) + \frac{\rho_0(z)}{\epsilon_0 \gamma^2}) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\eta}{2} B_{z_0} + \dot{\theta}_0 \right)^2 \frac{r_0^4}{r^4} \right] \lambda = 0, \quad /6/$$

где $\lambda = r/r_0$, r_0 - начальный радиус пучка или просто постоянная размерности длины.

Возможность введения эмиттанса и аксептанса пучка обусловлена существованием интегральных инвариантов движения. Эти инварианты полностью содержатся в исходной системе уравнений движения /1/ и полностью могут быть определены начальными или конечными значениями переменных. Если в уравнении /6/ все величины взяты для крайнего электрона, то это же уравнение можно писать в форме

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} + \left[\frac{\eta^2}{4} B_z^2 + \frac{\eta}{2} \gamma \Phi''(z) \right] R =$$

$$= \frac{\eta l}{2\pi \epsilon_0 r_0^2 \gamma v_0} \frac{l}{R} + \frac{\left(\frac{\eta}{2} B_{z_0} + \dot{\theta}_0 \right)^2}{R^3} \quad /7/$$

II. ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАКСИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вследствие большой сложности полученной параксиальной системы /5/, /6/ из-за нелинейности удается разобрать только самые простые задачи, на примере которых можно продемонстрировать необходимость более основательного изучения поведения интенсивных электронных пучков.

1. Пучок в пространстве дрейфа

а/с нулевым угловым моментом. Рассмотрим случай $B_z = E_z = 0$.

Уравнения движения /6/, /7/ примут вид

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \frac{\eta \mu_0 l}{2\pi} \frac{d \ln R}{d\tau}, \quad /8/$$

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} = \frac{\eta l}{2\pi \epsilon_0 r_0^2} \frac{dz}{d\tau} \frac{l}{R} + \frac{\dot{\theta}_0^2}{R^3}$$

Первые интегралы этой системы, если полагать $R_0 = l$, дают

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau} / + \frac{\eta \mu_0 l}{2\pi} \ln R,$$

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{\eta l}{\pi \epsilon_0 r_0^2 c \sqrt{\gamma^2 - 1}} \cdot \frac{l}{a} \ln(1 + a \ln R) - \frac{\dot{\theta}_0^2}{R^2} + 2E_0,$$

где

$$2E_0 = \dot{\theta}_0^2 + \left(\frac{dR}{d\tau}\right)_0^2, \quad a = \frac{\eta \mu_0 l}{2\pi c \sqrt{\gamma^2 - 1}},$$

Из первого уравнения /8/ видно, что при больших токах l , или при больших интенсивностях, когда $R \geq 1$ или $R \leq 1$, перейти от r к z или от уравнения движения к уравнению траектории не столь просто.

Оценим порядок величин, фигурирующих в этой системе, полагая $\dot{\theta}_0 = 0$, $R = 1$, $R'_0 = 0$ ($E_0 = 0$), $Z = \frac{z}{r_0}$. Переходя к уравнению траектории, можно написать

$$\frac{dR}{dZ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \frac{\sqrt{\ln(1 + a \ln R)}}{1 + a \ln R}.$$

Если величина $a \ln R \ll 1$, то выражение /8/ переходит в известное /если еще и скорость мала/ соотношение

$$\frac{dR}{dZ} = \sqrt{\frac{l}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0\eta} \frac{1}{\gamma^2}} \sqrt{\ln R};$$

если же скорость сравнима с единицей, то этого сделать уже нельзя. Здесь роль играет не только величина тока, но и плотности, ибо при данном r величина $\ln R$ будет тем больше, чем меньше было r_0 .

Введя обозначение

$$Z_1 = \sqrt{\frac{2a}{\gamma^2 - 1}} Z$$

и воспользовавшись приближенным выражением

$$\ln(1 + a \ln R) \approx \frac{2 a \ln R}{2 + a \ln R},$$

которое при $a \ln R = 0,4$ дает расхождение $< 1\%$, тогда как $\ln(1 + a \ln R)$ отличается от $a \ln R$ больше чем на 50% , можно получить следующее соотношение:

$$dZ_1 = \frac{2}{\sqrt{a}} \left(1 + \frac{5}{4} U^2 + \frac{7}{32} U^4 - \frac{3}{128} U^6 + \dots \right) e^{\frac{1}{a} U^2} dU,$$

где $u = \sqrt{a \ln R}$. Ограничиваясь в разложении первой степенью по a , можно получить приближенно

$$Z_1 = 2 \left(1 - \frac{5}{8} a \right) \int_0^{\sqrt{\ln R}} e^{u^2} du + \frac{5}{4} a R \sqrt{\ln R}.$$

/На рис. 1 даны графики $R(Z_1)$ для различных значений a /.

Следует иметь в виду, что данный вывод справедлив только при $a \ln R < 1$. Вид кривых можно объяснить тем, что запасенная при минимальном радиусе $r = r_0$ в пучке потенциальная энергия переходит в кинетическую не только по R , но и по Z_1 вследствие собственного магнитного поля.

б/ с начальным угловым моментом. Допустим теперь, что a - очень малая величина, но $\theta_0 \neq 0$, и полная скорость частиц мало отличается от составляющей по z . Поскольку в этом случае

$$\frac{d}{d\tau} = \left(\frac{dz}{d\tau} \right)_0 \frac{d}{dz},$$

$$\left(\frac{dR}{dz} \right)^2 = \frac{\eta l}{\pi \epsilon_0 r_0^2 \left(\frac{dz}{d\tau} \right)_0^3} \ln R - \left(\frac{d\theta}{dz} \right)_0^2 \frac{1}{R^2} + 2E_{01}, \quad /9/$$

где $2E_{01} = \left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0^2 + \left(\frac{dR}{dz}\right)_0^2$, и полагая $Z = \sqrt{\frac{\eta l}{\pi \epsilon_0 \left(\frac{dz}{dr}\right)_0^3}} \frac{z}{r_0}$, можно на-

писать

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{dZ}\right)^2 \ln R - \left(\frac{d\theta}{dZ}\right)^2 \frac{1}{R^2} + \left(\frac{dR}{dZ}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dZ}\right)^2 &= \\ = \ln R \left(\frac{d\theta}{dZ}\right)_0^2 \frac{1}{R^2} + 2E_0. & \quad /10/ \end{aligned}$$

Оценим величину θ'_0 . После преобразований имеем

$$\left(\frac{d\theta}{dZ}\right)_0 = \left[\frac{\eta l}{\pi \epsilon_0 r_0^2 \left(\frac{dz}{dr}\right)_0^3} \right]^{-1/2} \left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0 = \sqrt{\frac{\pi \epsilon_0 \left(\frac{dz}{dr}\right)_0}{\eta l}} \left(\frac{d\theta}{dr}\right)_0 r_0,$$

т.е. эмиттанс пропорционален начальной поперечной скорости, которая сохраняется в процессе движения. Численная величина эмиттанса, например, при энергии пучка 500 кэВ ($\gamma \approx 2$) в предположении, что 2% от этой величины приходится на направление θ , и токе $I = 1000$ а, будет

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0 = \frac{2,86 \cdot 10^{-7}}{\sqrt{I}} v_{\theta_0} \approx 0,54.$$

На плоскости (r, z) из /9/ получим для эмиттанса выражение отношения скорости v_{θ_0} к скорости v_{θ_0} .

$$F_1 = \left(\frac{d\theta}{dZ}\right)_0 r_0 = \frac{\frac{d\theta}{dr}/_0 \cdot r_0}{\frac{dz}{dr}/_0} [\text{рад.}],$$

Если отношение этих скоростей $\approx 0,02$, то, представляя $R = r, r_0$, имеем величину эмиттанса $F = F_1 \cdot r_0 = 0,02 \cdot r_0$.

Введя обозначение в /10/

$$2E_0 + \ln R = u^2, \quad R = e^{-2E_0} e^{u^2},$$

можно написать

$$dz = \pm 2e^{-2E_0} \left[1 - e^{4E_0} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)_0^2 u^{-2} e^{-2u} \right]^{-1/2} e^{u^2} du.$$

Разложение квадратных скобок даст

$$dz = \pm 2e^{-2E_0} e^{u^2} \left[1 + \frac{1}{2} e^{4E_0} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)_0^2 u^{-2} e^{-2u} + \frac{3}{8} e^{8E_0} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)_0^4 u^{-4} e^{-4u} + \frac{5}{16} e^{12E_0} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)_0^6 u^{-6} e^{-6u} + \dots \right] du. \quad /11/$$

Такое разложение допустимо, если

$$e^{4E_0} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)_0^2 u_{min}^{-2} e^{-2u_{min}^2} < 1.$$

Без нарушения общности рассуждений можно взять $u_{min}^2 = 2E_0$, тогда

$$\left(\frac{d\theta}{dz} \right)_0^2 < \left[\left(\frac{dR}{dz} \right)_0^2 + \left(\frac{d\theta}{dz} \right)_0^2 \right],$$

что всегда выполняется, так как разброс скоростей по θ и по r равновероятны. Можно воспользоваться определением аксектанса - эмиттанса, и назвать $F = \sqrt{2E_0}$ эмиттансом пучка. Это разложение всегда допустимо, и полученный ряд сходится вплоть до нулевого эмиттанса, к универсальной кривой расширения.

Интегрирование первых двух слагаемых ряда /11/ приводит к следующему выражению для приведенного расстояния по оси Z :

$$Z = 2e^{-F^2} \int_F^{\pm\sqrt{F^2 + \ln R}} e^{u^2} du - F^2 e^{F^2} \int_F^{\pm\sqrt{F^2 + \ln R}} e^{u^2} du - \frac{l}{\sqrt{2}} F e^{F^2} \left(\frac{e^{-u^2}}{u} \right) \Big|_F^{\pm\sqrt{F^2 + \ln R}},$$

где выбор знаков в пределе должен соответствовать начальному углу между осью и касательной к границе пучка. Второе и третье слагаемые дают малый вклад по сравнению с первым. На рис. 2 даны кривые $R(z)$ для различных F , учитывающие первое слагаемое. При $E_0 = 0$ получается универсальная кривая расширения пучка.

2. Пучок в постоянном магнитном поле

На этом последнем примере продемонстрируется все то, что было сказано в первой части данной работы. Особенно отчетливо будет видно, что движение границы пучка, т.е. движение пучка в целом еще не определяет поведения частиц внутри пучка. Полученные цифры относятся к идеальному случаю равномерного распределения электронов по сечению пучка, и поэтому являются приближенными. Качественная картина, однако, верна, хотя и представляется несколько неожиданной.

а/ движение границы пучка. Принимаем $\frac{dz}{d\tau} \approx \frac{dz}{d\tau} /_0 = c \sqrt{\gamma^2 - 1}$. Уравнение огибающей пучка с учетом начального разброса по θ будет иметь вид

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} + \omega_H^2 R = \frac{\eta l}{2\pi\epsilon_0 r_0^2 c \sqrt{\gamma^2 - 1}} \frac{l}{R} + \frac{\dot{\theta}_0^2}{R^3} = \frac{\lambda}{R} + \frac{\dot{\theta}_0^2}{R^3}.$$

В зависимости от соотношения между $\dot{\theta}_0$ и ω_H можно произвести разные подстановки, пригодные для практических расчетов. Пусть, например,

$$R = \sqrt{\frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega_H}} y, \quad y = e^{\frac{1}{2}\phi}, \quad \frac{d}{d\tau} = 2\omega_H e^{-\frac{1}{2}\phi} \frac{d}{dx},$$

тогда

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \text{sh } \phi = \lambda.$$

Это уравнение описывает колебания маятника под постоянной нагрузкой, причем восстанавливающая сила маятника - жесткая /sh ϕ вместо sin ϕ /. После интегрирования оно дает

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + 2 \text{ch } \phi = 2\lambda\phi + 2E_0, \quad E_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_0^2 + \text{ch } \phi_0 - \lambda\phi_0.$$

Уравнения можно исследовать стандартными методами. Ради простоты и большей наглядности и здесь рассмотрим лишь упрощенный случай $\dot{\theta}_0 = 0$. Итак, имеем уравнения

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} + \omega_H^2 R = \frac{\lambda}{R}, \quad \lambda = \frac{\eta l}{2\pi\epsilon_0 r_0^2 c \sqrt{\gamma^2 - 1}}.$$

$$\frac{d}{d\tau} = \omega_H \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\lambda}{\omega_H^2} = a, \quad \frac{d}{d\xi} = e^{-\phi} \frac{d}{d\kappa}, \quad R = e^{\phi}.$$

Тогда вместо предыдущего уравнения запишем

$$\left(\frac{d^2\phi}{d\kappa^2}\right) + e^{2\phi} = a,$$

и после интегрирования получаем при $\tau = 0$ и $R_0 = 1$

$$\left(\frac{d\phi}{d\kappa}\right)^2 + e^{2\phi} = 2a\phi + c_0, \quad c_0 = 1 + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{dR}{d\tau}\right)_0^2, \quad /12/$$

Для небольших значений ϕ уравнение /12/ запишем приближенно в виде

$$\left(\frac{d\phi}{d\kappa}\right)^2 \approx \left(\frac{R'_0}{\omega}\right)^2 + 2(a-1)\phi - 2\phi^2.$$

Интеграл этого уравнения с учетом начальных условий можно представить как

$$\phi = \frac{a-1}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2}{(a-1)^2} \left(\frac{R'_0}{\omega}\right)^2} \cos \sqrt{2} \kappa \right].$$

Более высокое приближение с прибавлением следующего члена ряда

$-\frac{1}{3}\phi^3$ привело бы к эллиптическому интегралу, однако оно дало бы результаты, пригодные даже для конструктивных расчетов при больших амплитудах колебаний в пучке, ибо наибольшая ошибка, например, будет меньше чем 2%, при амплитуде 1,65 $r_0 = r_{\text{ампл}}$.

б/ движение внутри пучка. Согласно части I уравнение движения частиц во внутренней области пучка при $R'_0 = 0$ будет

$$\frac{d^2\lambda}{d\tau^2} + [\omega^2 - \lambda e^{-(a-1)\cos\sqrt{2}\kappa}] \lambda = 0.$$

Вводя вместо τ переменную κ , перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2\lambda}{d\kappa^2} - \frac{d\phi}{d\kappa} \frac{d\lambda}{d\kappa} + (e^{2\phi} - a) \lambda = 0.$$

Если положить $\lambda = e^{\frac{a-1}{4}(1-\cos\sqrt{2\kappa})}$ и разложить $e^{2\phi}$ в ряд Фурье, то, вводя сдвиг переменной $\sqrt{2\kappa} = 2T$, получим для v следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 v}{dT^2} + [A + 2\theta_0 \cos 2T + 2\theta_1 \cos 4T + 2\theta_2 \cos 6T + 2\theta_3 \cos 8T + \dots] v = 0,$$

где:
$$A = 2e^{a-1} I_0(a-1) - 2a - \frac{1}{8}(a-1)^2,$$

$$\theta_0 = \frac{a-1}{2} - 2e^{a-1} I_1(a-1),$$

$$\theta_1 = \frac{1}{16}(a-1)^2 + 2e^{a-1} I_2(a-1),$$

$$\theta_2 = -2e^{a-1} I_3(a-1),$$

$$\theta_3 = 2e^{a-1} I_4(a-1),$$

$a I_n(a-1)$ - модифицированные функции Бесселя от аргумента $(a-1)$. Значения A и θ_n для некоторых a даны в таблице 1.

Если отбросить члены ряда с θ_n при $n \geq 1$, то имеем уравнение Матье. На карте стабильности /рис. 3/ находим для этого случая предел первой зоны стабильности при $a \approx 1,46$. Если, например, при постоянных прочих параметрах ток повысить так, чтобы $a = 1,6$, то можно перейти в зону неустойчивости для решения v , причем показатель μ будет в этом случае действительной величиной, значение которой больше 0,3.

Для $a = 1,46$ находим предельный ток, при котором пучок теряет устойчивость.

$$I_{max} \approx 1,07 B_0^2 \cdot r_0^2 \cdot \sqrt{\gamma^2 - 1} = 1,07 B_0^2 r_0^2 \beta \gamma [k a],$$

где B_0 выражается в килогауссах, r_0 - в сантиметрах, а ток в килоамперах.

Функции Маттье периодичны с периодом π , поэтому можем оценить время периода τ_π

$$\tau_\pi = \frac{\sqrt{2}}{\omega} e^{\frac{a-1}{2} \pi} \int_0^\pi e^{-\frac{a-1}{2} \cos 2T} dT = \frac{\sqrt{2} \pi}{\omega} e^{\frac{a-1}{2}} I\left(\frac{a-1}{2}\right).$$

Так, например, для $B_0 = 2000$ гаусс и $a = 1,6$ имеем оценку

$$\tau_\pi \approx 3,47 \cdot 10^{-10} \text{ сек.},$$

так что за десять наносекунд электрон претерпевает около тридцати колебаний, и пучок может быстро развалиться.

Если учитывать конечный разброс скоростей R'_0 , то, как легко видеть, критический ток понижается. Более сложная картина получается при рассмотрении конечных θ_0 ; Сознательно создавая некоторое начальное вращение в пучке, можно видеть, что он будет вести себя более устойчиво по отношению к возмущениям. Эти вопросы, однако, выходят за рамки данного рассмотрения, и заслуживают самостоятельного исследования.

В заключение хотелось бы заметить следующее. Выражения "пределный ток", "развал пучка" следует понимать прежде всего в отношении существования или правдоподобия данной модели. За зоной неустойчивости следует снова устойчивая зона; вблизи оси может остаться часть тока, тогда как другая часть перераспределяется, пучок расслаивается - что и наблюдается на практике. Рассмотрение процессов перераспределения, расслаивания требовало бы расширения и усложнения этой простой модели, что выходит за рамки данного сообщения.

Литература

1. В.И. Векслер и др. Препринт ОИЯИ, Р9-3440-2, 1967 г.
2. P. H. Rose. *Nucl. Instr. and Meht.* 11- (1961) 49-62.
3. T. R. Walsh. *Plasma Phys.* 5, (1963), 23-30.
4. Дж. Пирс. Теория и расчёт электронных пучков. "Советское радио", М. 1966 г.
К. Шпангенберг. Электронные лампы, том II, "Советское радио", М. 1954 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 сентября 1972 года.

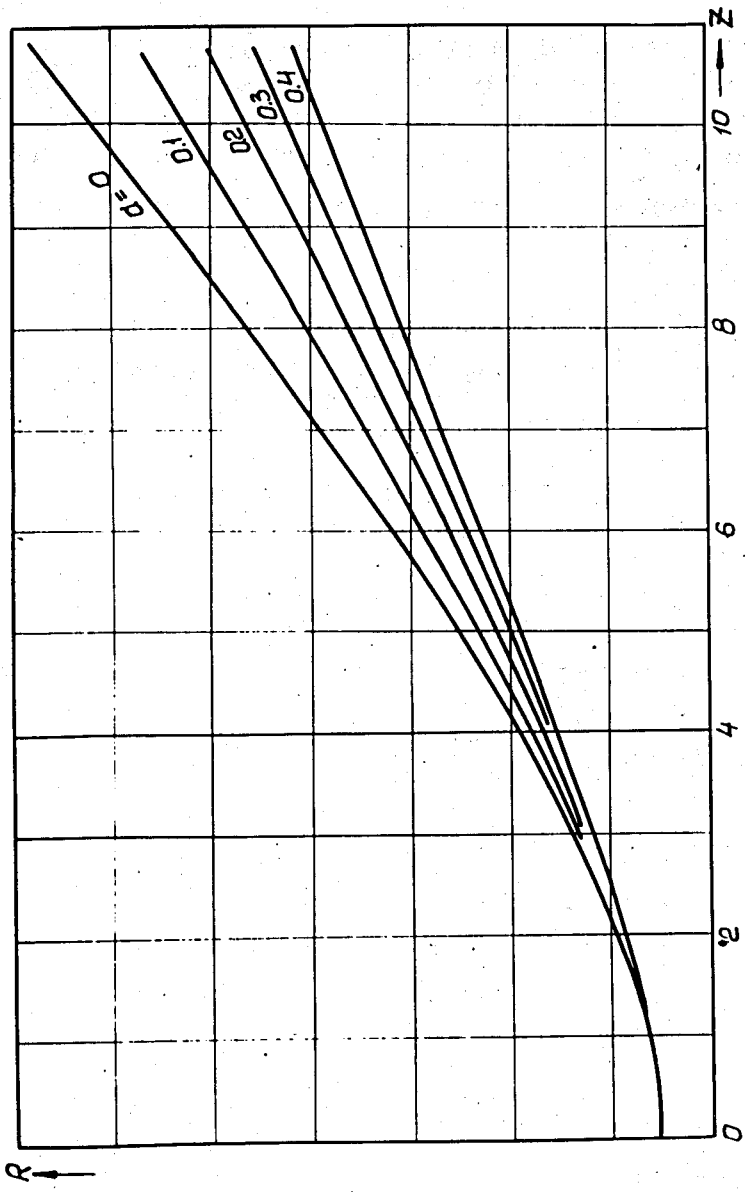


Рис. 1

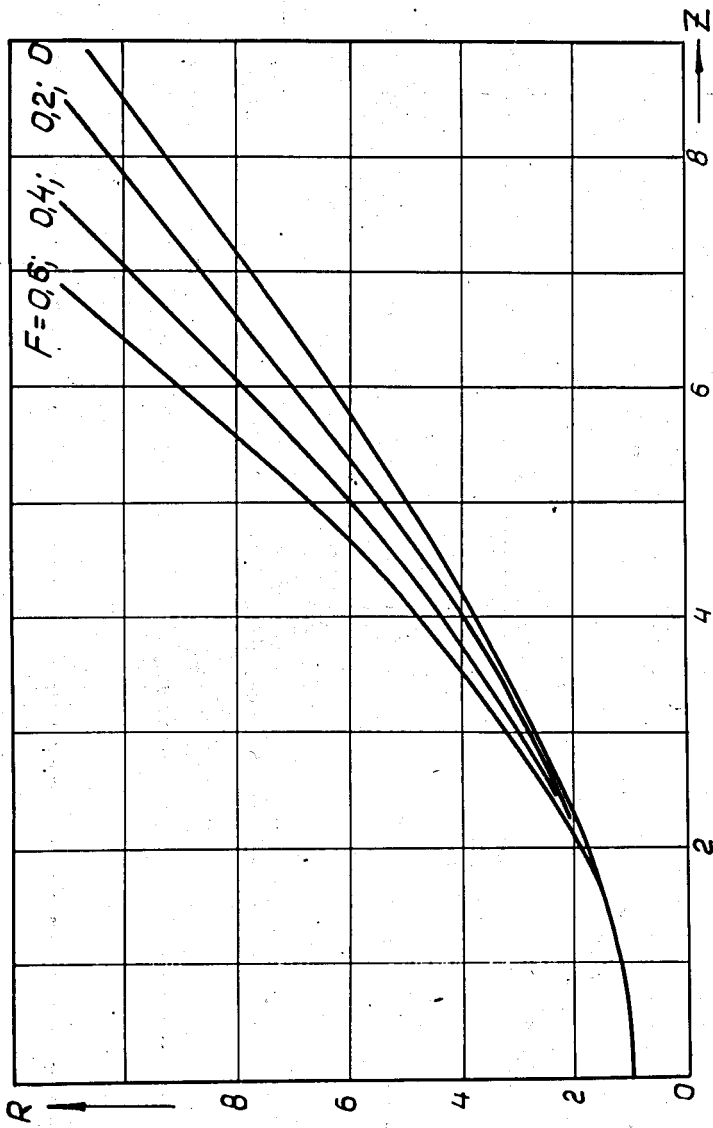


Рис. 2

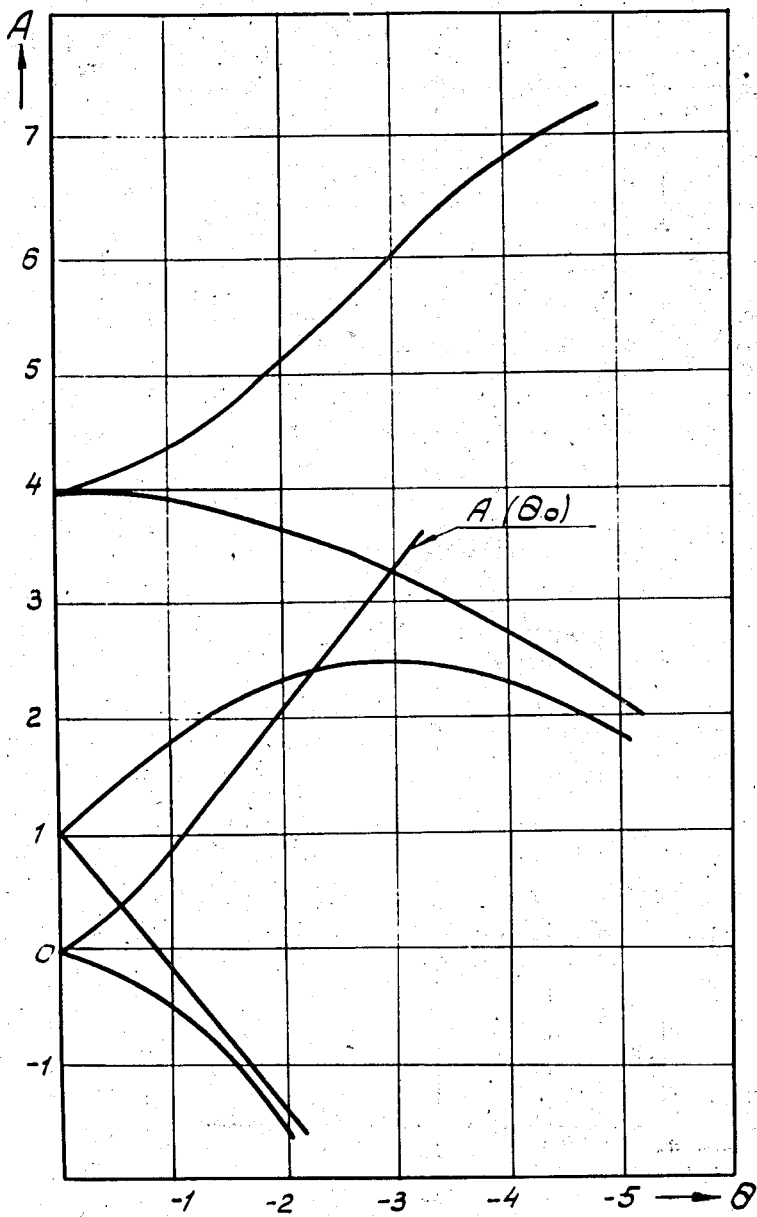


Рис.3

Таблица № I.

Q	A	θ_0	θ_1	θ_2
I,2	0,0622	- 0,146	0,00864	-0,00040
I,4	0,284	- 0,409	0,0705	-0,0020
I,46	0,390	- 0,524	-	-
I,6	0,734	- 0,843	0,191	-0,0168
I,8	I,52I	-I,527	0,415	-0,0494