СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р9 - 6600

Э.А.Перельштейн, М.С.Перский, В.Ф.Шевцов

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

О РЕЗОНАНСЕ $Q_r = 1$ В КОЛЛЕКТИВНЫХ УСКОРИТЕЛЯХ

1972

P9 - 6600

Э.А.Перельштейн, М.С.Перский, В.Ф.Шевцов

О РЕЗОНАНСЕ $Q_r = 1$ В КОЛЛЕКТИВНЫХ УСКОРИТЕЛЯХ

Прохождение резонанса радиальных бетатронных колебаний $Q_r = 1$ в коллективном методе ускорения, возможное при заполнении электронного кольца ионами, либо при выводе его из адгезатора, впервые рассматривалось в работе /1/. Полученные в ней требования к азимутальной однородности удерживающего магнитного поля были очень высокими. В действительности эксперименты с пучком показывают, что они не столь жестки /2/. Возможно, это объясняется когерентным движением электронов в кольце под действием возмущающих сил /3,4/. Необходимым условием когерентности является малость среднеквадратичного разброса бетатронных частот частиц по сравнению с кулоновской поправкой к частоте, связанной с ионами /4/ [x/]. В обратном случае получаются результаты работы /1/. Влияние нелинейности внешнего магнитного поля бетатронного типа не улучшает условий прохождения резонанса /1/.

В этой работе мы анализируем прохождение целого резонанса в некогерентном случае с учетом нелинейности собственных полей кольца. При определенной конфигурации зарядов обеспечивается жесткая характеристика бетатронных колебаний и, соответственно, благоприятное прохождение резонанса. Кроме того, в рамках линейного приближения уточняются результаты работы /1/, касающиеся прохождения параметрического резонанса.

[x/] Это условие должно быть согласовано с требованиями продольной когерентной устойчивости кольца.

1. Параметрический резонанс

Мы рассматриваем прохождение резонанса $Q_r = 1$ при заполнении кольца ионами. Уравнение радиального движения электронов имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + Q^2\omega^2 x = a \cos \omega t + x b \cos 2\omega t , \qquad (1)$$

где x –радиальное отклонение от равновесной орбиты; ω –частота обращения частиц в кольце; $a = \omega^2 R\left(\frac{\Delta H}{H}\right)_1$ характеризует первую гармонику отклонения внешнего поля от азимутально однородного; $b = \omega^2(\Delta n)_2$ – величина, связанная со второй гармоникой возмущения градиента поля; $Q = [1 - n - \mu - \Delta Q_i(t)]^{1/2}$ –безразмерная частота бетатронных колебаний; n, μ и ΔQ_i –показатель спада поля и кулоновские поправки к нему со стороны электронов и ионов соответственно. В дальнейшем будем считать рост Q во времени линейным.

Используя метод усреднения Боголюбова-Крылова /5/, перейдем от (1) к уравнениям медленного движения:

$$\frac{dI}{d\theta} = \alpha\sqrt{I}\sin\phi - \beta I \sin 2\phi \qquad (2а)$$

$$\frac{d\phi}{d\theta} = Q'(\theta - \theta_{рез.}) - \frac{\alpha}{2\sqrt{I}}\cos\phi - \frac{\beta}{2}\cos 2\phi , \qquad (2б)$$

где

$$\alpha = \frac{a}{\omega^2} , \quad \beta = \frac{b}{2\omega^2} , \quad \theta = \omega t ;$$

$\theta_{рез}$ – значение безразмерного времени, соответствующее $Q = 1$;

$$Q' = \frac{\mu}{2} g \frac{N_i}{N_e}\gamma^2\frac{1}{\omega t_{зап.}} = g\frac{r_{кл} N_i}{\gamma}\left(\frac{R}{a}\right)^2\frac{1}{\omega t_{зап.}} \qquad (3)$$

N_i –конечная погонная плотность ионов; γ –релятивистский фактор электронов; $r_{кл}$ – классический радиус электрона; R и a –радиус и малый размер кольца; $t_{зап}$ –время заполнения кольца ионами .

Отклонение x выражается через новые переменные I , ϕ следующим образом:

$$x = \sqrt{I} \cos (\phi + \theta) .$$

Ограничиваясь анализом параметрического резонанса в системе (2), опустим члены, пропорциональные a .

Характерным для параметрического резонанса является наличие резонансной полосы, полуширина которой равна $\beta / 2$. Эта полоса проходится за время

$$2 \Delta \theta = \frac{\beta}{Q'} . \tag{4}$$

В дорезонансной области в уравнении (2б) можно пренебречь членом, пропорциональным β . Учтем, что в начале загрузки кольца ионами величина Q значительно отличается от единицы, и ограничимся областью изменения θ до $\theta_1 = \theta_{\text{рез}} - \mu \Delta \theta$ ($\mu \approx 1$). Интегрируем систему (2), полагая начальное значение фазы $\phi_0 = \frac{\pi}{8} + Q'\theta_{\text{рез.}}$, что соответствует максимальному росту амплитуды.

В результате получаем:

$$\frac{I_1}{I_0} = e^{\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q'}}} . \tag{5}$$

В окрестности резонанса в уравнении (2б) оставляем главный член, связанный с β . Тогда изменение величины I в этой области дается формулой

$$\frac{I_2}{I_1} = e^{\frac{2\beta^2 \mu^2}{Q'}} . \tag{6}$$

В области после резонанса закон изменения I такой же, как и в дорезонансной.

Асимптотическое значение I_∞, соответствующее $\theta \to \infty$, получаем с помощью (5) и (6)

$$I_\infty = I_0 \, e^{\beta \sqrt{\frac{\pi}{Q'}} + \frac{2\mu^2 \beta^2}{Q'}} . \qquad (7)$$

При быстром прохождении резонанса, когда частица находится малое время в резонансной области $\left(2\Delta\theta = \frac{\beta}{Q'} \ll 1 \right)$, квадратичным членом в показателе экспоненты формулы (7) можно пренебречь: в результате мы получаем результат работы /1/. При медленном прохождении рост амплитуды происходит в основном в резонансной области и определяется квадратичным членом в формуле (7). Результаты нашего полукачественного рассмотрения хорошо согласуются с точным решением задачи о прохождении параметрического резонанса, данным в работе /6/.

Окончательно мы приходим к выводу, что для благоприятного прохождения параметрического резонанса необходимо выполнение условия, указанного в /1/: $\frac{\beta}{Q'} \ll 1$.

2. Влияние нелинейности собственных полей кольца на прохождение целого резонанса

В работе /1/ прохождение некогерентного целого резонанса исследовалось в предположении о линейности собственных полей кольца.

Мы учтем кубические поправки в полях, соответствующие гауссовскому распределению плотности по сечению кольца. Такой закон изменения плотности наблюдался экспериментально /7/. Кроме того, предположим, что отношение квадратов малых размеров электронного и ионного сечений $\left(\frac{a_e}{a_i} \right)^2 = g$ может отличаться от единицы x/. Кулоновские поправки к показателю спада в этом случае имеют вид:

---

x/ Например, адиабатически сжимая электронно-ионное кольцо, можно получить $a_i > a_e$.

$$\mu = \frac{2\, r_{\text{кл}}\, N_e}{\gamma^3} \left(\frac{R}{a_e} \right)^2 , \qquad (8)$$

$$\Delta Q_i = Q'\theta = \gamma^2 \frac{N_i}{N_e} \frac{\mu}{2\omega t_{\text{зап}}} g\,\theta , \qquad (9)$$

где N_e –погонная плотность электронов.

В системе (2) положим $\beta = 0$ и в правую часть уравнения (2б) добавим член $\frac{3}{16}\mu \left(1 - \frac{2Q'}{\mu} g\,\theta\right) I$, связанный с нелинейностью собственных полей электронного и ионного колец.

Введем функцию $w = \frac{2Q'\theta - \mu}{G}$ с $G = ng + \mu g - \mu$.

Тогда система уравнений, описывающая медленное изменение квадрата амплитуды и фазы колебаний, имеет вид:

$$\frac{dI}{d\theta} = -a\sqrt{I}\,\sin\phi \qquad (10а)$$

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{w-1}{2g} G - \frac{3}{16} G\,w\,I - \frac{a}{2\sqrt{I}}\cos\phi . \qquad (10б)$$

Положительные значения G в уравнении (10б) соответствуют мягкой характеристике колебаний, отрицательные – жесткой. Знак величины G при фиксированных n и μ определяется величиной g .

Стационарная резонансная кривая при $G > 0$ имеет вид, представленный на рис. 1. Сплошные линии соответствуют устойчивым стационарным решениям системы (10), пунктирная – неустойчивым. В случае $G > 0$ начальное значение $w_н$ меньше $w = w_0$, за которым существуют три стационарных решения (10). При медленном росте величины

w , соответствующем заполнению кольца ионами, амплитуда колебаний возрастает, оставаясь вблизи ветви I .

Анализ случая $G < 0$ можно провести, используя ту же резонансную кривую. Для этого заменим G на $|G|$ и неизвестную ϕ на $\phi' = \pi - \phi$. Полученная система уравнений совпадает по виду с (10) при $G > 0$. Из определения видно, что в этом случае она уменьшается при прохождении резонанса. При этом $w_н > w_0$ и рост амплитуды вначале идет вдоль линии III , а затем асимптотически стремится к линии I . Таким образом, рост амплитуды при $G < 0$ ограничен. На рис. 1 в качестве примера приведены результаты численного интегрирования системы (10) при следующих значениях параметров:

$$g = 0{,}25\,, \quad G = 2\cdot 10^{-3}\,, \quad \frac{a}{a_e} = 1{,}5\cdot 10^{-5}, \quad Q_1' = 2\cdot 10^{-10}, \quad Q_2' = 2\cdot 10^{-9}.$$

По оси ординат на графике отложена величина $X = \frac{\sqrt{I}}{a_e}\left(\frac{G\,a_e}{a}\right)^{1/3}$,

В заключение отметим, что для пучков с несовпадающими малыми размерами электронного и ионного колец можно найти режимы прохождения целого резонанса с жесткой колебательной характеристикой, обеспечивающей слабый рост амплитуды. Заметим также, что прохождение параметрического резонанса при этих же условиях более благоприятно, чем в случае линейных собственных полей /1/.

Авторы благодарят М.Г. Нехаеву за помощь при проведении расчетов.

Литература

1. K.R.Symon. "On the Tolerances to Cross the Q_R=1 Resonanse". Symposium on ERA, LBL, Berkeley, California, UCRL-18103, 1968, p.304.

2. В.П. Саранцев и др. Труды VII Международной конференции по ускорителям на высокие энергии, Ереван, 1969.

3. S. Van der Meer, CERN preprint ISR-PO-169-57, 1963.

4. C.Pellegrini, A.M.Sessler. "Crossing of the Incoherent Integral Resonanse in the Electron Ring Accelerator", LBL, Berkeley, California, UCRL-19462, 1970:

5. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. "Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний", ФМ, Москва, 1963.

6. П.Р. Зенкевич. "Изменение амплитуд колебаний линейных осцилляторов при переходе через резонанс второго порядка". Препринт ИТЭФ, № 812, Москва, 1970.

7. D.Keefe et al., "Experiments on Forming Intense Ring of Electrons Suitable for the Accelaration of Ions". Phys.Rev.Lett., 22, 11 (1969), p. 558.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июля 1972 года.

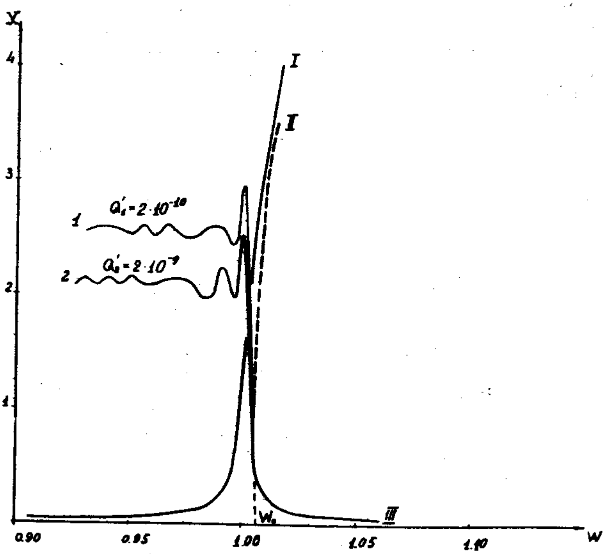

Рис. 1.