

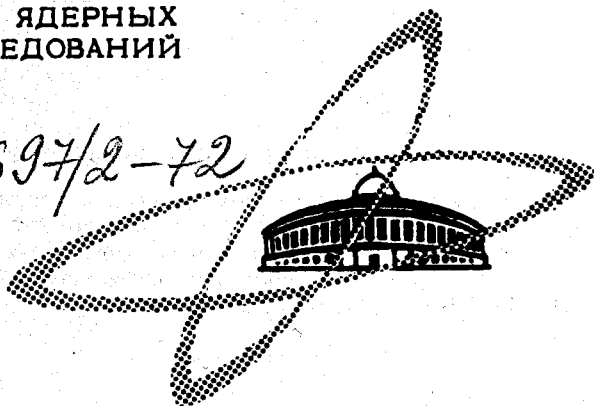
С 34511

МК-122

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

2697/2-72



P9 - 6514

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

В.М. Жабицкий, И.А. Золина, А.М. Каминская,  
И.Н. Иванов, Э.А. Перельштейн

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭКРАНИРОВАННОГО КОЛЬЦА  
ПРИ СМЕЩЕНИИ ЦЕНТРА

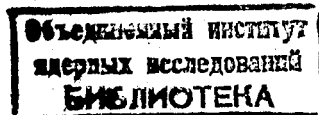
1972

P9 - 6514

В.М. Жабицкий, И.А. Золина, А.М. Каминская,  
И.Н. Иванов, Э.А. Перельштейн

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭКРАНИРОВАННОГО КОЛЬЦА  
ПРИ СМЕЩЕНИИ ЦЕНТРА

*Направлено в ЖТФ*



В работах <sup>/1,2/</sup> показано, что при движении заряженного электронного кольца с током коаксиально с экранирующей металлической трубой возможна фокусировка частиц внутри кольца в направлении движения. Для экрана с анизотропной проводимостью, обеспечивающей максимальную экранировку электрического поля и свободное проникновение магнитного поля в среду, фокусирующее действие экранирующей трубы возрастает <sup>/3/</sup>. Здесь мы исследуем устойчивость кольца в случае смещения его центра относительно оси трубы. Будем считать, что кольцо не меняет своей формы при смещении, а отклонения частиц от равновесной орбиты малы.

### 1. Уравнения движения

Движение центра электронного кольца относительно экранирующей трубы складывается из продольного движения (параллельно оси трубы) и движения перпендикулярно оси трубы. Продольное движение будем предполагать равномерным; его легко исключить переходом в соответствующую инерциальную систему координат  $I(X^i)$ . Будем считать, что ось  $Z$   $I$ -системы направлена по оси трубы, а центр кольца совершает финитное движение в плоскости  $Z = 0$ .

Рассмотрим сопутствующую систему координат  $S(x^i)$ , определяемую как инерциальная мгновенная система координат, в которой скорость центра кольца равна нулю в общем случае лишь в один определенный

момент времени  $T_0$ . В случае нерелятивистского движения центра матрица  $\bar{a}_k^i$ , определяющая закон преобразования 4-вектора от  $S$  к  $I$ -системе ( $A_I^i = \bar{a}_k^i A_s^k$ , индексами  $I$  и  $s$  отмечены величины в  $I$  и  $S$ -системах соответственно), имеет отличные от нуля компоненты:

$$\bar{a}_0^0 = \bar{a}_1^1 = 1; \quad \bar{a}_\nu^0 = \bar{a}_0^\nu = \beta_c^\nu; \quad \beta_c^\nu = \frac{1}{c} \frac{dX_c^\nu}{dT} \Big|_{T=T_0}; \quad (1)$$

где  $X_c^\nu$  - координаты центра кольца в  $I$ -системе.

Если изменение скорости центра за период обращения частиц в кольце мало, то уравнения движения частиц в  $S$ -системе:

$$m \frac{d(\gamma_\perp \vec{v})}{dt} = e \vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \vec{H}] - m \gamma_\perp \vec{w}_c; \quad (2)$$

где  $\vec{v}$  - скорость частицы в  $S$ -системе;  $\gamma_\perp = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ ;  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  - напряженности электрического и магнитного полей, а  $\vec{w}_c = \frac{d^2 \vec{X}_c}{dt^2}$  - ускорение центра кольца в  $S$ -системе. Поскольку мы ограничиваемся линейным приближением по  $\beta_c$ , то уравнения (2) справедливы для таких промежутков времени  $\Delta t$ , за которые изменение скорости центра кольца  $\Delta \vec{v}_c \approx \vec{w}_c \Delta t$ , отнесенное к скорости света, есть величина порядка  $\beta_c^2$ . В случае ультрарелятивистского движения частиц это условие можно записать как

$$\Delta t \lesssim \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{\beta_c^2 c^2}{|\vec{x} \vec{w}_c|}; \quad x \approx r_0; \quad (3)$$

где  $\omega_0$  - частота обращения частиц в кольце радиуса  $r_0$  и считается, что  $\omega_0 r_0 \approx c$ . Так как нас интересуют времена  $\Delta t$ , сравнимые с периодом обращения частиц в кольце, то ускорение центра кольца ограничено условием:

$$\left| \frac{\vec{x} \vec{w}_c}{c^2} \right| \cong \beta_c^2; \quad x \cong r_0. \quad (4)$$

Запишем радиус-вектор произвольной частицы в  $S$ -системе

$$\vec{x} = (r_0 + \xi(\theta_0, t)) \vec{e}_{r_0} + \eta(\theta_0, t) \vec{e}_{\theta_0} + \zeta \vec{e}_z; \quad (5)$$

где  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  - малые по сравнению с  $r_0$  отклонения частицы в направлениях, которым соответствуют единичные векторы  $\vec{e}_{r_0}$ ,  $\vec{e}_{\theta_0}$ ,  $\vec{e}_z$  положения невозмущенной частицы с координатами  $r_0$ ,  $\theta_0$ ,  $0$ . Уравнения (2), линеаризованные по малым отклонениям, имеют вид:

$$\begin{aligned} & (\ddot{\xi} - (\gamma_0^2 + 1) \omega_0 \dot{\eta} - (r_0 + \gamma_0^2 \xi) \omega_0^2) \vec{e}_{r_0} + (\gamma_0^2 \ddot{\eta} + (\gamma_0^2 + 1) \omega_0 \dot{\xi} - \omega_0^2 \eta) \vec{e}_{\theta_0} + \\ & + \ddot{\zeta} \vec{e}_z = \frac{e}{m \gamma_0} \vec{E} + \frac{e}{m \gamma_0 c} [(\dot{\xi} - \omega_0 \eta) \vec{e}_{r_0} + (\dot{\eta} + (\xi + r_0) \omega_0) \vec{e}_{\theta_0} + \dot{\zeta} \vec{e}_z, \vec{H}] - \vec{w}_c; \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ ,  $\beta_0 = \frac{\omega_0 r_0}{c}$ ; точка означает оператор  $\frac{\partial}{\partial t} + \omega_0 \frac{\partial}{\partial \theta_0}$

## 2. Поля

Входящие в уравнения (6) поля складываются из собственных полей кольца в свободном пространстве, внешних и наведенных экранирующей трубой. Пусть кольцо движется во внешнем постоянном однородном в  $I$ -системе магнитном поле  $\vec{H}_I = H_z \vec{e}_z$ . Используя (1), получим компоненты этого поля в  $S$ -системе:

$$\vec{E} = - [H_1 \beta_c] = \left( \frac{\dot{Y}_c}{c} \vec{e}_x - \frac{\dot{X}_c}{c} \vec{e}_y \right) H_z; \quad \vec{H} = H_1 = H_z \vec{e}_z. \quad (7)$$

Собственные поля в  $S$ -системе в линейном приближении по малым отклонениям  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , согласно работе <sup>14/</sup>, равны:

$$E_r^c = E_{rc}^0 + \frac{\xi}{r_0} E_{rc}^1; \quad E_z^c = \frac{\zeta}{r_0} E_{zc}^1; \quad H_r^c = \frac{\zeta}{r_0} H_{rc}^1; \quad H_z^c = H_{zc}^0 + \frac{\xi}{r_0} H_{zc}^1,$$

причем для кольца тороидального вида (форма сечения - круг радиуса  $d$ ) имеем:

$$E_{rc}^0 = \frac{Ne}{2\pi r_0^2} L; \quad H_{zc}^0 = \beta_0 \frac{Ne}{2\pi r_0^2} (L-1); \quad E_{zc}^1 = E_{zc}^1 = \frac{Ne}{\pi d^2}; \quad H_{rc}^1 = -H_{zc}^1 = \beta_0 \frac{Ne}{\pi d^2},$$

$$\text{где } L = \ln \frac{8r_0}{d}, \quad N - \text{число электронов в кольце.} \quad (8)$$

Наведенные поля находятся в предположении, что кольцо движется внутри идеально проводящей цилиндрической трубы радиуса  $b > r_0$ , причем малыми размерами кольца пренебрегаем. Граничные условия в  $I$ -системе ставятся для переменного электромагнитного поля на поверхности идеального проводника и выражаются через компоненты полей  $S$ -системы. Если отклонения  $a$  центра кольца от оси трубы малы

( $\frac{a}{r_0} \ll 1$ ), то в линейном приближении по параметру ( $\frac{a}{r_0}$ ) граничные условия в  $S$ -системе есть:

$$E_z + \left( -\frac{\dot{X}_c}{c} \sin \theta + \frac{\dot{Y}_c}{c} \cos \theta \right) H_r - \left( \frac{\dot{X}_c}{c} \cos \theta + \frac{\dot{Y}_c}{c} \sin \theta \right) H_\theta = 0;$$

$$E_\theta + \left( \frac{a}{b} \right) \sin(\theta - \psi) E_z + \left( -\frac{\dot{X}_c}{c} \cos \theta + \frac{\dot{Y}_c}{c} \sin \theta \right) H_z = 0;$$

$$H_r - \left( \frac{a}{b} \right) \sin(\theta - \psi) H_\theta + \left( -\frac{\dot{X}_c}{c} \sin \theta + \frac{\dot{Y}_c}{c} \cos \theta \right) E_z = 0;$$

где  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  - сумма наведенного  $\vec{E}^H$ ,  $\vec{H}^H$  и собственного полей кольца на поверхности трубы  $r = b - a \cdot \cos(\theta - \psi)$  ( $a$ ,  $\psi$  - цилиндрические координаты центра кольца в  $I$ -системе). Движение кольца мы считаем достаточно медленным, так что наведенные поля вычисляются в квазистатическом приближении. В линейном приближении по  $(\frac{a}{r_0})$  плотности наведенных зарядов  $\rho^H(\vec{r})$  и токов  $\vec{j}^H(\vec{r})$  на поверхности цилиндрической трубы в  $S$ -системе можно записать как:

$$\rho^H = -\frac{Ne}{2\pi b} [\sigma_0(z) \delta(r-b) + a \cdot \cos(\theta - \psi) \sigma_1(z) \delta'(r-b)];$$

$$\frac{1}{c} \vec{j}_r^H = -\frac{Ne}{2\pi b} [\beta_0(\frac{a}{b}) \sin(\theta - \psi) f_1(z) + (\frac{\dot{X}_c}{c} \cos \theta + \frac{\dot{Y}_c}{c} \sin \theta) (f_2(z) - \sigma_1(z)) \delta(r-b)]$$

$$\frac{1}{c} \vec{j}_\theta^H = -\frac{Ne}{2\pi b} \{ \beta_0 [f_0(z) \delta(r-b) + a \cdot \cos(\theta - \psi) f_1(z) \delta'(r-b)] +$$

$$+ (-\frac{\dot{X}_c}{c} \sin \theta + \frac{\dot{Y}_c}{c} \cos \theta) [b \cdot f_2(z) \delta'(r-b) - \sigma_1(z) \delta(r-b)] \};$$

где функции  $\sigma(z)$  и  $f(z)$  - четные по  $z$ , а штрих - производная по аргументу. Подставляя  $\rho^H$ ,  $\vec{j}^H$  в таком виде в выражение для потенциалов, получим ( $r < b$ ):

$$\phi^H = -\frac{2Ne}{\pi} \int_0^\infty [\sigma_0(k) K_0(kb) I_0(kr) + ka \cdot \cos(\theta - \psi) \sigma_1(k) I_1(kr)] \cos(kz) dk;$$

$$A_r^H = -\frac{2Ne}{\pi} \int \{ \beta_0(\frac{a}{r}) \sin(\theta - \psi) \cdot f_1(k) I_1(kr) +$$

$$+ (\frac{\dot{X}_c}{c} \cos \theta + \frac{\dot{Y}_c}{c} \sin \theta) [f_2(k) \frac{I(kr)}{kr} - \sigma_1(k) I_0(kr)] \} \cos(kz) dk;$$

$$A_{\theta}^H = -\frac{2Ne^{\infty}}{\pi} \int_0^{\infty} \{ \beta_0 f_0(k) K_1(kb) I_1(kr) + ka \cdot \cos(\theta - \psi) f_1(k) I_1'(kr) \} + \quad (9)$$

$$+ \left( -\frac{\dot{X}_c}{c} \sin \theta + \frac{\dot{Y}_c}{c} \cos \theta \right) [f_2(k) I_1'(kr) - \sigma_1(k) I_0(kr)] \cos(kz) dk,$$

где  $I_n$ ,  $K_n$  - модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода соответственно. Вычисляя  $\vec{E}^H$ ,  $\vec{H}^H$ , используя (9), и подставляя их в граничные условия, найдем:

$$\sigma_0(k) = \frac{I_0(kr_0)}{I_0(kb)}; \quad \sigma_1(k) = \frac{1}{kb} \cdot \frac{\sigma_0(k)}{I_1(kb)}; \quad f_0(k) = \frac{I_1(kr_0)}{I_1(kb)};$$

$$f_1(k) = \frac{1}{kb} \cdot \frac{f_0(k)}{I_1'(kb)}; \quad f_2(k) = \frac{1}{kb} \cdot \frac{I_0(kr_0)}{I_1(kb) I_1'(kb)}.$$

Теперь нетрудно получить силу, действующую на частицы кольца со стороны наведенных зарядов и токов:

$$\vec{F}_H = e (E_{rH}^{\circ} + \beta_0 H_{zH}^{\circ}) \vec{e}_{r_0} + \frac{e}{c} H_{zH}^{\circ} [(\dot{\eta} + \omega_0 \xi) \vec{e}_{r_0} - (\dot{\xi} - \omega_0 \eta) \vec{e}_{\theta_0}] + \quad (10)$$

$$+ \frac{\xi}{r_0} e (E_{rH}^1 + \beta H_{zH}^1) \vec{e}_{r_0} + \frac{\zeta}{r_0} e (E_{zH}^1 - \beta_0 H_{rH}^1) \vec{e}_z + \vec{F}_H^c + \Delta \vec{F}_H,$$

где  $\vec{F}_H^c$  - сила, действующая на центр кольца:

$$\frac{1}{m\gamma_0} \vec{F}_H^c = \omega_0^2 Q_c \vec{X}_c - \omega_0 \Delta_c (\dot{Y}_c \vec{e}_x - \dot{X}_c \vec{e}_y); \quad (11)$$

$\Delta \vec{F}_H$  - сила, действующая на частицы кольца со стороны наведенных зарядов:



$$\frac{1}{m \gamma_0} \Delta F_H^{\rightarrow} = \omega_0^2 Q_p [(X_c \cos \theta_0 + Y_c \sin \theta_0) \vec{e}_r - (Y_c \cos \theta_0 - X_c \sin \theta_0) \vec{e}_{\theta_0}] - \quad (12)$$

$$- \omega_0 \Delta_p [(\dot{Y}_c \cos \theta_0 - \dot{X}_c \sin \theta_0) \vec{e}_{r_0} + (\dot{X}_c \cos \theta_0 + \dot{Y}_c \sin \theta_0) \vec{e}_{\theta_0}].$$

Выпишем в явном виде функции, которые нам потребуются в дальнейшем:

$$Q_c = 2\mu p^2 \beta_0^{-2} (p \phi_2(p) \pm \phi_1(p) - \beta_0^2 p \phi_3(p)); \quad p = \frac{r_0}{b}; \quad \mu = \frac{\nu}{\gamma_0}; \quad \nu = \frac{e^2}{mc^2} \cdot \frac{N}{2\pi r_0};$$

$$\phi_1 = \int_0^{\infty} \frac{I_0(pu)}{I_0(u)} \cdot \frac{I_1(pu)}{I_1(u)} du; \quad \phi_2 = \int_0^{\infty} \frac{I_0(pu)}{I_0(u)} \cdot \frac{I_1'(pu)}{I_1'(u)} u du; \quad \phi_3 = \int_0^{\infty} \frac{I_1(pu)}{I_1(u)} \cdot \frac{I_1'(pu)}{I_1'(u)} u du;$$

$$\Delta_c = 2\mu p^2 \left\{ \int_0^{\infty} \frac{I_1(pu)}{I_1'(u)} \left[ \frac{I_1(pu)}{I_1(u)} + p \frac{I_0(pu)}{I_0(u)} \right] \frac{du}{pu} \pm \int_0^{\infty} \frac{I_1(pu)}{I_1(u)} \frac{I_1'(pu)}{I_1'(u)} du \right\}. \quad (13)$$

При рассмотрении движения кольца внутри экранирующей трубы с анизотропной проводимостью нужно учесть, что магнитное поле в этом случае свободно проникает в среду. Это означает, что в (10)  $\vec{H} = 0$ , в (11) и (12)  $\Delta_c = 0$  и в выражении для  $Q_c$   $\phi_3(p) = 0$ .

### 3. Движение центра кольца

Чтобы найти уравнения движения центра кольца, воспользуемся тем, что геометрический центр кольца совпадает с центром масс кольца в  $S$ -системе, и проведем усреднение в уравнениях (6) по всем частям кольца, что удобно делать в декартовых координатах. В результате усреднения получим:

$$\ddot{X}_c = \omega_0^2 Q_c X_c - (\omega + \omega_0 \Delta_c) \dot{Y}_c; \quad (14)$$

$$\ddot{Y}_c = \omega_0^2 Q_c Y_c + (\omega + \omega_0 \Delta_c) \dot{X}_c;$$

где  $\omega = \frac{e H_z}{m \gamma_0 c}$  — частота обращения во внешнем магнитном поле  $H_z$ .

Из уравнений (6) следует, что:

$$\omega_0 = -\frac{e}{m \gamma_0 c} (H_z + H_{zc}^{\circ} + H_{zH}^{\circ} + \frac{l}{\beta_0} (E_{rc}^{\circ} + E_{rH}^{\circ})) = \omega (1 - \Delta). \quad (15)$$

Уравнения (14) имеют решение:

$$X_c = \frac{l}{\omega_2 - \omega_1} [(\omega_2 x_0 - \dot{y}_0) \cos \omega_1 t - (\omega_2 y_0 + \dot{x}_0) \sin \omega_1 t - (\omega_1 x_0 - \dot{y}_0) \cos \omega_2 t + (\omega_1 y_0 + \dot{x}_0) \sin \omega_2 t];$$

$$Y_c = \frac{l}{\omega_2 - \omega_1} [(\omega_2 x_0 - \dot{y}_0) \sin \omega_1 t + (\omega_2 y_0 + \dot{x}_0) \cos \omega_1 t - (\omega_1 x_0 - \dot{y}_0) \sin \omega_2 t - (\omega_1 y_0 + \dot{x}_0) \cos \omega_2 t], \quad (16)$$

где  $\vec{x}_0$  и  $\dot{\vec{x}}_0$  — начальные смещения и скорость центра;  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — частоты колебаний центра

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega}{2} (1 + (1 - \Delta) \Delta_c) [1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1 - \Delta)^2 Q_c}{(1 + (1 - \Delta) \Delta_c)^2}}]. \quad (17)$$

Отсюда видно, что устойчивое движение центра возможно лишь тогда, когда выполняется неравенство

$$\frac{4(1 - \Delta)^2 Q_c}{(1 + (1 - \Delta) \Delta_c)^2} \leq 1. \quad (18)$$

Если число частиц в кольце мало ( $\mu \ll 1$ ), движение происходит в сильном внешнем магнитном поле ( $\Delta \ll 1$ ) и выполняется неравенство

$$4Q_c \ll 1, \quad (19)$$

то:

$$\omega_1 = \omega Q_c; \quad \omega_2 = \omega - \omega Q_c. \quad (20)$$

Заметим, что первая частота  $\omega_1$  в (20) соответствует дрейфовой скорости центра, а вторая частота  $\omega_2$  примерно равна циклотронной частоте обращения частицы во внешнем магнитном поле  $H_z$ .

Движение центра должно удовлетворять условию (4), которое выполняется, если:

1) частота  $\omega_1$  мала по сравнению с  $\omega$  ( $\frac{\omega_1}{\omega} \ll 1$ ), т.е. должно выполняться условие (19);

2) начальные смещения центра кольца от оси трубы малы по сравнению с радиусом кольца ( $\frac{x_0}{r_0} \ll 1$ ;  $\frac{y_0}{r_0} \ll 1$ );

3) начальная скорость центра является малой величиной второго порядка ( $\frac{\dot{y}_0}{c} \approx (\frac{\omega_1}{\omega})(\frac{x_0}{r_0})$ ,  $\frac{\dot{x}_0}{c} \approx (\frac{\omega_1}{\omega})(\frac{y_0}{r_0})$ ).

#### 4. Движение частиц в кольце при смещении его центра

Представим в уравнениях (6) отклонения  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  как:

$$\xi = \xi^1 + \xi^2; \quad \eta = \eta^1 + \eta^2; \quad \zeta = \zeta^1,$$

где  $\xi^1, \eta^1, \zeta^1$  - отклонения от орбиты невозмущенной частицы, не связанные со смещением кольца как целого от оси трубы;  $\xi^2, \eta^2$  - откло-

нения, связанные с движением центра кольца. Учитывая (14) и (15) и предполагая, что движение происходит в сильном внешнем магнитном поле, получим для  $\xi^2$ ,  $\eta^2$  уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^2 + \gamma_0^2 \omega \dot{\eta}^2 - \omega^2 (\gamma_0^2 - \kappa) \xi^2 &= \frac{1}{m \gamma_0} \Delta F_{rH}; \\ \gamma_0 \ddot{\eta} + \gamma_0 \omega \dot{\xi} &= \frac{1}{m \gamma_0} \Delta F_{\theta H}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\kappa = 1 - \frac{e}{m \gamma_0 r_0 \omega^2} (E_{rc}^1 + \beta_0 H_{zc}^1) - \frac{e}{m \gamma_0 r_0 \omega^2} (E_{rH}^1 + \beta H_{zH}^1) = 1 - n_c - n_H. \quad (22)$$

Показатели спада поля  $n_c$  и  $n_H$  легко найти, используя (8) и (9):

$$\begin{aligned} n_c &= \mu \frac{2}{\beta_0^2 \gamma_0^2} \left( \frac{r_0}{d} \right)^2; \\ n_H &= 4 \mu p^3 \beta_0^{-2} \int_0^\infty \left[ \frac{K_0(u)}{I_0(u)} I_0(pu) I_1'(pu) - \beta_0^2 \frac{K_1(u)}{I_1(u)} I_1^2(pu) \right] u^2 du = 4 \mu p^3 \beta_0^{-2} \Phi_4(p). \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя в выражение для возмущающей силы  $\Delta \vec{F}_H$  решения  $X_c$  и  $Y_c$  из (16), легко получить частное решение системы уравнений (21):

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \{ \xi_1 [(\omega_2 x_0 - \dot{y}_0) \cos(\omega_1 t - \theta_0) - (\omega_2 y_0 + \dot{x}_0) \sin(\omega_1 t - \theta_0)] - \\ &- \xi_2 [(\omega_1 x_0 - \dot{y}_0) \cos(\omega_2 t - \theta_0) - (\omega_1 y_0 + \dot{x}_0) \sin(\omega_2 t - \theta_0)] \}; \end{aligned}$$

$$\eta^2 = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \{ \eta_1 [(\omega_2 x_0 - \dot{y}_0) \sin(\omega_1 t - \theta_0) + (\omega_2 y_0 + \dot{x}_0) \cos(\omega_1 t - \theta_0)] - \eta_2 [(\omega_1 x_0 - \dot{y}_0) \sin(\omega_2 t - \theta_0) + (\omega_1 y_0 + \dot{x}_0) \cos(\omega_2 t - \theta_0)] \}, \quad (24)$$

где

$$\xi_i = \left( \frac{\omega_i}{\omega} \right) \frac{Q_p - \frac{\omega_i}{\omega} \Delta_p}{\left( 1 - \frac{\omega_i}{\omega} \right) \left[ \left( 1 - \frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 - \kappa \right]}; \quad \eta_i = \frac{1}{\left( 1 - \frac{\omega_i}{\omega} \right)} \xi_i + \frac{Q_p - \frac{\omega_i}{\omega} \Delta_p}{\gamma_0^2 \left( 1 - \frac{\omega_i}{\omega} \right)^2}. \quad (25)$$

**5. Анализ полученных результатов для кольца с малым числом частиц ( $\mu \ll 1$ ) в ультрарелятивистском случае ( $\beta_0 \approx 1$ )**

Если число частиц в кольце невелико и выполняется неравенство (19), то  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  приближенно можно представить в следующем виде:

$$\xi_1 = \frac{Q_c Q_p}{1 - \kappa - 2Q_c}; \quad \xi_2 = -\frac{Q_p - \Delta_p}{\kappa Q_c}; \quad \eta_1 = \xi_1 + \frac{Q_p}{\gamma_0^2}; \quad \eta_2 = \frac{1}{Q_c} \left( \xi_2 + \frac{Q_p - \Delta_p}{\gamma_0^2 Q_c} \right). \quad (26)$$

Выберем такую систему координат, в которой ось  $x$  направлена вдоль прямой, соединяющей геометрические центры экранирующей трубы и смещенного кольца в начальный момент времени. В этом случае  $\gamma_0 = 0$ . Предположим сначала, что кольцо в начальный момент времени движется параллельно оси трубы, т.е.  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ . Тогда  $\xi^2$  и  $\eta^2$  с учетом

(26) примут вид:

$$\xi^2 = x_0 \left[ \frac{Q_c Q_p}{1 - \kappa - 2Q_c} \cos(\omega_1 t - \theta_0) + \frac{Q_p - \Delta_p}{\kappa} \cos(\omega_2 t - \theta_0) \right]; \quad (27)$$

$$\eta^2 = x_0 \left[ \left( \frac{Q_c}{1 - \kappa - 2Q_c} + \frac{1}{\gamma_0^2} \right) Q_p \sin(\omega_1 t - \theta_0) + \frac{Q_p - \Delta_p}{Q_c} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \sin(\omega_2 t - \theta_0) \right].$$

Для того, чтобы форму кольца можно было считать неизменной при смещении центра, отклонения должны быть достаточно малыми:

$$|\xi^2| \ll d; \quad |\eta^2| \ll r_0; \quad (28)$$

или

$$x_0 \left| \frac{Q_c}{1 - \kappa - 2Q_c} Q_p \right| \ll d; \quad (29.1)$$

$$x_0 \left| \frac{Q_p - \Delta_p}{\kappa} \right| \ll d; \quad (29.2)$$

$$x_0 \left| \left( \frac{Q_c}{1 - \kappa - 2Q_c} + \frac{1}{\gamma_0^2} \right) Q_p \right| \ll r_0; \quad (30.1)$$

$$x_0 \left| \frac{Q_p - \Delta_p}{Q_c} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \right| \ll r_0. \quad (30.2)$$

Проанализируем неравенство (29.1). В явном виде  $(1 - \kappa - 2Q_c)$  согласно (13) и (23), равно:

$$1 - \kappa - 2Q_c = n_c + n_H - 2Q_c = 4\mu p^2 \beta_0^{-2} \left\{ \frac{1}{2\gamma_0^2} \left( \frac{b}{d} \right)^2 + [p(\phi_4 - \phi_2) - \phi_1 + \beta_0^2 p \phi_3] \right\}.$$

Используя данные таблицы, где приведены численные значения функ-

ций  $\phi_i(p)$  и их комбинаций, нетрудно видеть, что при  $p > 0,6$  второе слагаемое в фигурных скобках по модулю всегда больше единицы. Порядок величины  $\frac{1}{2\gamma_0^2} \left(\frac{r_0}{d}\right)^2$  можно считать равным единице. Таким образом, если исключить случай, когда возможна резонансная раскачка колебаний, связанных с движением центра

$$\frac{1}{2\gamma_0^2} \left(\frac{r_0}{d}\right)^2 = -p^3 [p(\phi_4 - \phi_2) - \phi_1 + \beta_0^2 p \phi_3], \quad (31)$$

то, как нетрудно видеть из таблицы, выражение  $\left| \frac{Q_c}{1 - \kappa - 2Q_c} \right|$  приблизительно равно единице. Тогда неравенство (29.1) можно представить в виде

$$x_0 |Q_p| \ll d. \quad (32)$$

Если мы хотим, чтобы допустимые начальные отклонения центра  $x_0$  были больше малого размера кольца  $d$ , то необходимо потребовать выполнения неравенства  $|Q_p| \ll 1$ . Однако, как видно из таблицы, для  $p < 0,9$  величины  $|Q_p|$  и  $|Q_c|$  одного порядка. Следовательно, при выполнении условия (19), исключая случай выполнения (31), допустимые отклонения центра кольца могут быть больше малого размера кольца.

Перейдем теперь к неравенству (29.2). Поскольку при сделанных предположениях величина  $\kappa \approx 1$ , то неравенство (29.2) примет вид

$$x_0 |Q_p - \Delta_p| \ll d,$$

которое, как видно из таблицы, приводит к тем же требованиям, что и неравенство (29.1).

Условия (30) можно не рассматривать детально, так как они довольно слабы по сравнению с предыдущими, поскольку  $\frac{d}{r_0} \ll 1$  и  $Q_c \approx \frac{d}{r_0}$ .

Рассмотрим теперь движение частиц в кольце, когда в начальный момент времени центр его совпадает с центром сечения трубы, но имеется одна из компонент скорости, перпендикулярная оси трубы, допустим  $\dot{\gamma}_0$ , не равная нулю. Тогда с учетом (26) для отклонений  $\xi^2$ ,  $\eta^2$  имеем:

$$\xi^2 = \frac{\dot{\gamma}_0}{\omega} \left[ -\frac{Q_c Q_p}{1 - \kappa - 2Q_c} \cos(\omega_1 t - \theta_0) - \frac{Q_p - \Delta_p}{\kappa Q_c} \cos(\omega_2 t - \theta_0) \right]; \quad (33)$$

$$\eta^2 = \frac{\dot{\gamma}_0}{\omega} \left[ -\left( \frac{Q_c}{1 - \kappa - 2Q_c} + \frac{1}{\gamma_0^2} \right) Q_p \sin(\omega_1 t - \theta_0) - \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\gamma_0^2} \right) \frac{Q_p - \Delta_p}{Q_c^2} \sin(\omega_2 t - \theta_0) \right].$$

Анализируя неравенства (28) для отклонений (33) точно так же, как и в предыдущем случае, приходим к условию:

$$\delta \beta_{\text{нач.}} \ll \left( \frac{d}{r_0} \right), \quad (34)$$

где  $\delta \beta_{\text{нач.}} = \frac{\dot{\gamma}_0}{c}$ . Условие (34) слабее тех, которые мы получили при анализе движения центра кольца.

### 6. 3 а к л ю ч е н и е

При отклонении кольца от оси экранирующей трубы движение центра будет устойчиво при выполнении неравенства (19). Если это неравенство выполняется, то частицы в кольце будут совершать колебания около равновесной орбиты с амплитудой, меньшей малого размера кольца. Для электронного кольца с параметрами  $r_0 = 5$  см,  $d = 0,1$  см,  $N = 10^{13}$  и  $\gamma_0 = 30$ , движущегося внутри анизотропного экрана,



$Q_c(p=0,8) \approx 0,03$  и  $Q_c(p=0,9) \approx 0,14$ , и допустимые отклонения кольца должны быть  $x_0 \ll 1$  см и  $x_0 \ll 0,7$  см соответственно. Поскольку  $Q_c \approx \mu$ , то с увеличением числа частиц в кольце возрастают требования к точности проводки его по оси трубы. Таким образом, при использовании фокусирующих свойств экрана необходимо учитывать точность проводки кольца по оси трубы.

#### Л и т е р а т у р а

1. А.Г. Бонч-Осмоловский и др. Препринт ОИЯИ, Р9-4135, Дубна, 1968.
2. В.М. Жабицкий, И.Н. Иванов. Сообщение ОИЯИ, Р9-6421, Дубна, 1972.
3. Г.В. Долбилов и др. Препринт ОИЯИ, Р9-4737, Дубна, 1969.
4. Э.А. Перельштейн, О.И. Ярковой. Препринт ОИЯИ, 2351, Дубна, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел  
12 июня 1972 года.

Таблица функций  $\Phi(\rho)$

$\rho = \frac{r_2}{r_1}$	Анизотропный экран			Металлическая труба			
	$\rho\Phi_2 + \Phi_1$	$\rho\Phi_2 - \Phi_1$	$\Phi_1 - \rho(\Phi_2 - \Phi_1)$	$\rho(\Phi_2 - \Phi_1) + \Phi_1$	$\Phi_1 - \rho(\Phi_2 - \Phi_1)$	$\frac{\Delta\rho - Q\rho}{2\mu}$	$\Phi_1 - \rho(\Phi_2 - \Phi_1 + \Phi_2)$
0,600	3,035	0,424	2,536	2,073	0,538	0,598	1,989
0,625	3,356	0,533	2,778	2,180	0,643	0,717	2,110
0,650	3,735	0,674	3,053	2,291	0,768	0,862	2,239
0,675	4,183	0,858	3,380	2,405	0,920	1,036	2,377
0,700	4,729	1,101	3,767	2,524	1,104	1,249	2,529
0,725	5,408	1,429	4,239	2,649	1,330	1,511	2,692
0,750	6,271	1,881	4,825	2,779	1,611	1,837	2,875
0,775	7,404	2,520	5,576	2,917	1,967	2,251	3,082
0,800	8,944	3,453	6,570	3,064	2,427	2,784	3,320
0,825	11,13	4,875	7,950	3,221	3,035	3,489	3,604
0,850	14,42	7,160	9,970	3,392	3,870	4,452	3,953
0,875	19,76	11,10	13,15	3,581	5,070	5,826	4,404
0,900	29,32	18,62	18,70	3,795	6,911	7,912	5,033
0,925	49,06	34,99	29,81	4,045	10,02	11,39	5,985
0,950	98,02	77,57	56,66	4,353	16,10	18,08	7,707
0,975	248,8	213,4	137,6	4,739	30,62	33,90	11,55