ЖТФ, 1972, т. 42, в. 11, с. 2272-2278
31/VII-72

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 6463

А.Г. Бонч-Осмоловский

АДИАБАТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ВИНТОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

1972

Р9 - 6463

А.Г. Бонч-Осмоловский

АДИАБАТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ВИНТОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Направлено в ЖТФ

В предыдущей работе [1] было отмечено, что при вращении электронов в слабофокусирующем магнитном поле бетатронные частоты колебаний значительно изменяются, если ввести азимутальный компонент магнитного поля. Было высказано предположение, что при формировании в таком поле заряженного кольца могут заметно измениться его малые размеры. Недавно показано [2], что в винтовом слабофокусирующем поле при определенных условиях существенно улучшаются условия прохождения опасных одночастичных резонансов при сжатии кольца.

Цель настоящей работы - изучить в рамках задачи с самосогласованным полем поведение заряженного кольца электронов в адиабатически изменяющемся во времени винтовом магнитном поле; мы воспользуемся при этом методом, предложенным Ярковым [3].

1. Постановка задачи

Если выполнены условия, сформулированные в [1], а именно, кольцо электронов достаточно тонкое и поперечное движение частиц в нем нерелятивистское, и если предположить, что сечение кольцевого шнура представляет собой эллипс с постоянной плотностью частиц по сечению, тогда имеют место следующие линеаризованные уравнения движения частиц в постоянном магнитном поле с компонентами $H_r\ (r\ ,z)$, $H_z\ (r\ ,z)$ и $H_\phi = \frac{K}{r}$;

$$\ddot{\xi} + \omega_\phi \dot{\eta} + \lambda_1 \xi = 0,$$
$$\ddot{\eta} - \omega_\phi \dot{\xi} + \lambda_2 \eta = 0. \qquad (1)$$

Здесь: ξ и η –отклонения частиц от равновесной орбиты в r и z направлениях соответственно;

$$\lambda_1 = \omega_H^2 \nu_r^2 , \quad \lambda_2 = \omega_H^2 \nu_z^2 , \quad \omega_H = \frac{eH_z}{mc\gamma} ;$$

ν_r и ν_z –безразмерные частоты колебаний с учетом пространственного заряда (см. /4/), $\omega_\phi = \dfrac{eH_\phi}{mc\gamma}$, $\gamma = (1 - \beta_\phi^2)^{-1/2}$.

При выводе (1) предполагалось, что в стационарном состоянии частицы вращаются по равновесной орбите с радиусом R_0, который в данном случае неподвижного как целое кольца (скорость его вдоль оси z равна нулю) выражается обычным образом: $R_0 = \sqrt{\dfrac{2M}{m\gamma\,\omega_H}}$, M – азимутальный момент количества движения.

Как известно, для выяснения характера поведения системы при адиабатически меняющихся во времени внешних условиях, в данном случае магнитном поле, необходимо найти адиабатические инварианты движения системы. В общем виде задача будет строго самосогласованной, если с помощью найденных инвариантов будет построена такая функция распределения частиц, удовлетворяющая кинетическому уравнению, которая обеспечит предположенную при выводе (1) форму сечения кольца и распределение плотности частиц и токов.

Этой программой мы и займемся.

2. Адиабатические инварианты системы (1)

Для нахождения адиабатических инвариантов прежде всего нужно разделить в (1) переменные. Перепишем систему (1) в новых обозначениях

$$x_1 = \xi , \quad x_2 = \dot{\xi} , \quad x_3 = \eta , \quad x_4 = \dot{\eta} . \tag{2}$$

Тогда

$$\dot{x}_i = A_{ik} x_k \tag{3}$$

и матрица

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ -\lambda_1, & 0, & 0, & -\omega_\phi \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & \omega_\phi, & -\lambda_2, & 0 \end{pmatrix} \tag{3a}$$

Найдем собственные значения и векторы матрицы A ; для этого надо решить систему однородных уравнений

$$A_{ik} h_k = a h_i , \tag{4}$$

где a –некоторые числа (собственные значения). Характеристический детерминант системы (4) должен равняться нулю. Нетрудно показать, что это приводит к биквадратному уравнению с решениями:

$$a^2 = -\frac{\omega_\phi^2 + \lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_\phi^2 + \lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 - \lambda_1 \lambda_2} . \tag{5}$$

Заметим, что $a_i^2 = -\omega_i^2$, где ω_i –характеристические частоты системы (1).

Для каждого собственного значения (5): $a_1 = -a_2 \equiv a_1$, $a_3 = -a_4 \equiv a_2$ находим собственный вектор h_k из (4), например, в таком виде:

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} h \\ a_1 h \\ \dfrac{\omega_\phi a_1}{a_1^2 + \lambda_2} h \\ \dfrac{\omega_\phi a_1^2}{a_1^2 + \lambda_2} h \end{pmatrix} \tag{6}$$

Здесь h –произвольные числа, разные, вообще говоря, для каждого собственного вектора.

Поскольку собственные значения матрицы A в общем случае различные, возможна диагонализация этой матрицы и разделение переменных в (3).

Для этого по найденным векторам вида (6) построим матрицу H, поставив в каждый ее столбец свой собственный вектор. Удобно H записать в таком виде:

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & -\dfrac{a_2\omega_\phi}{a_2^2+\lambda_1} h_3 & \dfrac{a_2\omega_\phi}{a_2^2+\lambda_1} h_4 \\ a_1 h_1 & -a_1 h_2 & -\dfrac{a_2^2\omega_\phi}{a_2^2+\lambda_1} h_3 & -\dfrac{a_2^2\omega_\phi}{a_2^2+\lambda_1} h_4 \\ \dfrac{a_1\omega_\phi}{a_1^2+\lambda_2} h_1 & -\dfrac{a_1\omega_\phi}{a_1^2+\lambda_2} h_2 & h_3 & h_4 \\ \dfrac{a_1^2\omega_\phi}{a_1^2+\lambda_2} h_1 & \dfrac{a_1^2\phi_4}{a_1^2+\lambda_2} h_2 & a_2 h_3 & -a_2 h_4 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Теперь введем в (3) новые переменные y по формуле:

$$x_l = H_{lk}\, y_k \quad . \tag{8}$$

В новых переменных, как легко видеть, уравнения движения будут:

$$\begin{aligned} \dot y_1 &= a_1 y_1 , & \dot y_3 &= a_2 y_3 \\ \dot y_2 &= -a_1 y_2 , & \dot y_4 &= -a_2 y_4 \quad . \end{aligned} \tag{9}$$

Преобразования (8) можно упростить, если вместо y ввести переменные z , удовлетворяющие уравнениям 2-го порядка. Положим

$$\begin{aligned} h_I\, z_1 &= h_1 y_1 + h_2 y_2 , \\ h_{II}\, z_2 &= h_3 y_3 + h_4 y_4 \, . \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда, согласно (9), получим, что

$$\ddot z_l = a_l^2 z_l \,, \qquad l = 1,2 \, . \tag{11}$$

Это и есть разделенные уравнения движения вместо системы (3). Связь между старыми переменными ξ , η и новыми z_l дается равенствами:

$$\begin{aligned} \xi &= h_I\, z_1 - h_{II} \frac{\omega\phi}{a_2^2 + \lambda_1} \dot z_2 , \\ \eta &= h_I \frac{\omega\phi}{a_1^2 + \lambda_2} \dot z_1 + h_{II} z_2 , \end{aligned} \tag{12}$$

$$\dot{\xi} = h_I \dot{z}_1 - h_{II} \frac{\omega_\phi a_2^2}{a_2^2 + \lambda_1} z_2 ,$$

$$\dot{\eta} = h_I \frac{\omega_\phi a_1^2}{a_1^2 + \lambda_2} z_1 + h_{II} \dot{z}_2 .$$

Вычислим интеграл энергии системы (1):

$$\frac{E}{m\gamma} = \frac{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2}{2} + \lambda_1 \frac{\xi^2}{2} + \lambda_2 \frac{\eta^2}{2} . \qquad (13)$$

В новых переменных z_i получим

$$\frac{E}{m\gamma} = h_I^2 \left| \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + \lambda_2} \right| \left(\frac{\dot{z}_1^2}{2} - a_1^2 \frac{z_1^2}{2} \right) + h_{II}^2 \left| \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_2^2 + \lambda_1} \right| \left(\frac{\dot{z}_2^2}{2} - a_2^2 \frac{z_2^2}{2} \right) . \qquad (14)$$

При выводе (11) использовались следующие свойства собственных значений:

$$a_1^2 + a_2^2 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \omega_\phi^2) ,$$

$$a_1^2 a_2^2 = \lambda_1 \lambda_2 ,$$

$$(a_i^2 + \lambda_1)(a_i^2 + \lambda_2) = -a_i^2 \omega_\phi^2 , \quad i = 1, 2 . \qquad (15)$$

Положив произвольные до сих пор постоянные h_I и h_{II} равными

$$h_I = \sqrt{\left| \frac{a_1^2 + \lambda_2}{a_1^2 - a_2^2} \right|} , \qquad h_{II} = \sqrt{\left| \frac{a_2^2 + \lambda_1}{a_1^2 - a_2^2} \right|} , \qquad (16)$$

получим (14) в виде обычной суммы энергии двух гармонических осцилляторов.

Таким образом, мы как бы нормировали амплитуды введенных гармонических осцилляторов по заданной энергии малых колебаний частиц. Можно сказать еще и иначе: величина полной энергии колебаний системы не зависит от преобразования переменных.

Хорошо известно, что адиабатическим инвариантом гармонического осциллятора является отношение его энергии к частоте. Полный инвариант системы с двумя степенями свободы можно выбрать в виде суперпозиции инвариантов по обеим степеням свободы:

$$I = AI_1 + BI_2 , \tag{17}$$

причем I_1 и I_2 равны:

$$I_1 = \frac{m\gamma\,(\dot{z}_1^2 + \omega_1^2 z_1^2)}{2\omega_1} , \tag{18а}$$

$$I_2 = \frac{m\gamma\,(\dot{z}_2^2 + \omega_2^2 z_2^2)}{2\omega_2} . \tag{18б}$$

В этих формулах и далее мы переходим от a_i к ω_i – характеристическим частотам колебаний, причем будем в дальнейшем считать, что индекс 1 означает взятие верхнего, а индекс 2 – нижнего знака в формуле:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_\phi^2 + \lambda_1 + \lambda_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_\phi^2 + \lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 - \lambda_1\lambda_2} . \tag{19}$$

Используя (17), (18а), (18б) и формулы преобразования от z_i, $\dot{z}_i$ к $\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}$ (обратные (12)), можно выразить адиабатический инвариант I через старые переменные. Результат несложных вычислений таков:

$$I = \sum_{i,k=1}^{4} c_{ik}\, x_i\, x_k\ . \tag{20}$$

В формуле (20) x_i –переменные (2), а c_{ik} определены следующим образом:

$$c_{11} = \frac{m\gamma}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left[A\omega_1 \frac{(\lambda_1-\omega_2^2)^2}{|\lambda_2-\omega_1^2|} + \frac{B}{\omega_2}\,\frac{\lambda_1^2\,\omega_\phi^2}{|\lambda_1-\omega_2^2|}\right]$$

$$c_{22} = \frac{m\gamma}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left[\frac{A}{\omega_1}\,\frac{\lambda_2^2\,\omega_\phi^2}{|\lambda_2-\omega_1^2|} + B\,\omega_2\,\frac{(\lambda_2-\omega_1^2)^2}{|\lambda_1-\omega_2^2|}\right] \tag{21}$$

$$c_{14} = c_{41} = \frac{m\gamma}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left[A\,\omega_1\,\omega_\phi\left|\frac{\lambda_1-\omega_2^2}{\lambda_2-\omega_1^2}\right| - \frac{B}{\omega_2}\,\lambda_1\omega_\phi\right]$$

$$c_{23} = c_{32} = \frac{m\gamma}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left[\frac{A}{\omega_1}\,\lambda_2\omega_\phi - B\,\omega_2\,\omega_\phi\left|\frac{\lambda_2-\omega_1^2}{\lambda_1-\omega_2^2}\right|\right]$$

$$c_{33} = \frac{m\gamma}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left[A\,\omega_1 \frac{\omega_\phi^2}{|\lambda_2 - \omega_1^2|} + \frac{B}{\omega_2} \,|\lambda_1 - \omega_2^2|\, \right]$$

$$c_{44} = \frac{m\gamma}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \left[\frac{A}{\omega_1} \,|\lambda_2 - \omega_1^2|\, + B\omega_2 \frac{\omega_\phi^2}{|\lambda_1 - \omega_2^2|} \right]$$

$$c_{12} = c_{21} = c_{13} = c_{31} = c_{24} = c_{42} = c_{34} = c_{43} = 0 .$$

Квадратичную форму (20) можно привести к сумме квадратов, что понадобится нам в дальнейшем. Действительно, нетрудно проверить, учитывая вид коэффициентов c_{ik} из (21), что форму I можно записать в виде:

$$I = \xi^2 \left(c_{11} - \frac{c_{23}^2}{c_{44}} \right) + \eta^2 \left(c_{22} - \frac{c_{14}^2}{c_{33}} \right) + s^2 + q^2 , \qquad (22)$$

где

$$s = \sqrt{c_{33}}\, \dot{\xi} + \frac{c_{14}}{\sqrt{c_{33}}} \eta , \quad q = \sqrt{c_{44}}\, \dot{\eta} + \frac{c_{23}}{\sqrt{c_{44}}} \xi . \qquad (23)$$

3. Вычисление плотности и малые размеры кольца

Итак, задача об адиабатическом движении частиц в винтовом магнитном поле при заданной конфигурации ансамбля частиц (размеры кольца, плотность и токи частиц в нем) решена. Теперь следует показать, что такая конфигурация действительно может существовать как некоторое частное решение бесстолкновительного кинетического уравнения. При адиабатическом изменении параметров функция распределения, являющаяся частным решением кинетического уравнения, должна зависеть от точных или адиабатических интегралов движения. Следуя /3/, выберем следующую частную модель: все частицы имеют один и тот же азимутальный обобщенный импульс (точный интеграл движения для рассматриваемого класса конфигураций) и один и тот же адиабатический интеграл I. Таким образом, функция распределения будет иметь вид:

$$f(r,z,\dot{\xi},\dot{\eta},M) = C\delta(M-M_0)\,\delta(I-I_0)\ . \tag{24}$$

Вычислим теперь плотность заряда в кольце:

$$\rho(r,z) = \frac{e\gamma^2}{r}\int f(r,z,\dot{\xi},\dot{\eta},M)\,d\dot{\xi}\,d\dot{\eta}\,dM = \frac{e\gamma^2 C}{r}\int\delta(I-I_0)\,d\dot{\xi}\,d\dot{\eta}\ . \tag{25}$$

В интеграле (25) перейдем к новым переменным интегрирования s и q (см. (24)):

$$\rho = \frac{e\gamma^2 C}{r\sqrt{c_{33}c_{44}}}\int\delta(I-I_0)\,ds\,dq =$$

$$= \frac{2\pi e\gamma^2 C}{r\sqrt{c_{33}c_{44}}}\int\limits_0^\infty\delta\left[\xi^2\left(c_{11}-\frac{c_{23}^2}{c_{44}}\right)+\eta^2\left(c_{22}-\frac{c_{14}^2}{c_{33}}\right)+p^2-I_0\right]p\,dp\ . \tag{26}$$

Введем обозначения:

$$a_r^2 = \frac{I_0}{c_{11}-\dfrac{c_{23}^2}{c_{44}}}\,,\qquad a_z^2 = \frac{I_0}{c_{22}-\dfrac{c_{14}^2}{c_{33}}}\ . \tag{27}$$

Произведя необходимые вычисления в (26), получим

$$\rho = \frac{\pi e \gamma^2 C}{r I_0 \sqrt{c_{33} c_{44}}} \sigma\left(\frac{\xi^2}{a_r^2} + \frac{\eta^2}{a_z^2} - 1\right), \quad \sigma(x) = \begin{cases} 1, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases}. \quad (28)$$

Таким образом, плотность заряда в сечении кольца с точностью до слабой зависимости $1/r$ постоянна, причем форма поперечного сечения - эллипс с полуосями a_r и a_z, даваемыми формулами (27). Постоянная C в (28) определяется по начальной ($t = 0$) плотности заряда. Аналогично вычисляются и токи. В данной задаче отличен от нуля $j_\phi = \rho v_\phi$. Итак, все условия самосогласованности задачи выполнены.

Наиболее интересен для нас результат определения в явном виде через внешние поля малых размеров кольца; перепишем после некоторых преобразований формулы (27):

$$a_r^2 = \frac{I_0}{A \cdot B} \frac{\Delta_1^2 - \Delta_2^2}{m\gamma\, \omega_H} \frac{A\sqrt{\nu_r \nu_z}\, |\nu_r - \Delta_2^2|\, p^2 + B|\nu_z - \Delta_1^2|(\nu_r - \Delta_2^2)^2}{\Delta_1[\nu_r p^2 + (\nu_r - \Delta_2^2)^2]^2} \quad (29)$$

$$a_z^2 = \frac{I_0}{A B} \frac{\Delta_1^2 - \Delta_2^2}{m\gamma\, \omega_H} \frac{B\sqrt{\nu_r \nu_z}\, |\nu_z - \Delta_1^2|\, p^2 + A|\nu_r - \Delta_2^2|(\nu_z - \Delta_1^2)^2}{\Delta_2[\nu_z p^2 + (\nu_z - \Delta_1^2)^2]^2} \quad (30)$$

Здесь введены для удобства безразмерные величины:

$$\Delta_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}}{\omega_H}, \quad p = \frac{\omega_\phi}{\omega_H} = \frac{H_\phi}{H_z}, \quad H_\phi = H_\phi(R_0). \quad (31)$$

Постоянные A и B определяются начальными значениями параметров системы. С помощью общих уравнений движения (см. /1/) просто показывается, что изменение вращательной энергии частиц[x] (γ) и радиуса равновесной орбиты происходит так же, как в обычном переменном слабофокусирующем поле, т.е.

$$\gamma \sim \sqrt{H_z}\,, \qquad R_0 \sim \frac{1}{\sqrt{H_z}}\,. \tag{32}$$

Характер изменения же малых размеров кольца существенно меняется. Действительно, положим $p = 0$, т.е. предположим, что азимутальный компонент магнитного поля на орбите отсутствует. Тогда $\Delta_1 = \sqrt{\nu_r}$, $\Delta_2 = \sqrt{\nu_z}$ и

$$a_r^2 = \frac{I_0}{Am\gamma\,\omega_H\sqrt{\nu_r}} = \frac{I_0\,c}{AeH_z\sqrt{\nu_r}}\,. \tag{33}$$

$$a_z^2 = \frac{I_0\,c}{BeH_z\sqrt{\nu_z}}\,. \tag{34}$$

Это – обычный результат для бочкообразного поля /4/. Отметим, что постоянные A и B здесь определяют начальные размеры независимо друг от друга.

Положим теперь, что на орбите азимульный компонент поля велик, так что

$$p \gg 1\,. \tag{35}$$

---

[x] Заметим, что при изменении поля H_ϕ со временем появляется поле E_z и сила, смещающая равновесную орбиту в направлении оси z . Мы пренебрегаем соответствующим изменением энергии частиц.

Тогда легко получить:

$$a_r^2 \simeq \frac{I_0 c}{e H_\phi} \; \frac{B + A\sqrt{\nu_z / \nu_r}}{A \cdot B} . \tag{36}$$

$$a_z^2 \simeq \frac{I_0 c}{e H_\phi} \; \frac{B + A\sqrt{\nu_r / \nu_z}}{A \cdot B} . \tag{37}$$

В этом предельном случае малые размеры кольца уменьшаются с ростом H_ϕ поля ($\sim \frac{1}{\sqrt{H_\phi}}$) и не зависят от напряженности H_z поля.

Дадим физическую интерпретацию полученных результатов. Когда H_ϕ-поле на орбите равно нулю, частицы совершают бетатронные колебания с частотой $\omega_H \sqrt{\nu_r}$ и $\omega_H \sqrt{\nu_z}$, в линейном приближении независимые друг от друга. При введении азимутального поля колебания частиц в поперечной плоскости становятся связанными. Представление (12) означает переход к таким переменным, когда эти движения описываются снова суперпозицией независимых гармонических осцилляторов с частотами ω_1 и ω_2 . Если $\omega_1 \gg \omega_2$, а это и есть случай большого H_ϕ поля (больших p), то нетрудно показать, что такое представление эквивалентно известному дрейфовому приближению в теории плазмы (см., например, /5/). Действительно, при условии (35)

$$\omega_1 \simeq \omega_\phi , \qquad \omega_2 \simeq \frac{\omega_H^2 \nu_r \nu_z}{\omega_\phi} . \tag{38}$$

С другой стороны, если частица двигается в магнитном поле, и на нее действует сила, перпендикулярная H , то скорость дрейфа в обычных условиях адиабатического приближения равна

$$v_{\text{др.}} = \frac{c F_\perp}{e m H} . \tag{39}$$

В наших условиях $H = H_\phi$, а $F_\perp = m\gamma\,\omega_H^2\nu^2 x$, где ν -некоторая средняя характеристика крутизны потенциальной ямы, x -отклонение от центра ямы (~ ξ , η), оно порядка ларморовского радиуса вращения в поле H_ϕ. Применим формулу (39):

$$v_{\text{др.}} \simeq \frac{\omega_H^2 \nu^2 x}{\omega_\phi}, \qquad \omega_{\text{др.}} \simeq \frac{v_{\text{др.}}}{x} = \frac{\omega_H^2 \nu^2}{\omega_\phi}. \tag{40}$$

Сравнение (40) с выражением для ω_2 в (38) доказывает сделанное утверждение. На циклотронное вращение с частотой $\omega_1 = \omega_\phi$ вокруг силовой линии поля H_ϕ накладывается циклическое дрейфовое движение вокруг положения равновесия (центра сил $F_\perp$) с частотой ω_2, которая убывает с ростом продольного магнитного поля. Следует заметить, что такой характер поперечное движение имеет и в любом другом случае, когда помимо ведущего продольного магнитного поля существует сила произвольного происхождения, перпендикулярная полю и продольной скорости. Например, в прямолинейном заряженном пучке, находящемся в продольном магнитном поле, роль такой силы играет кулоновская сила расталкивания зарядов, и в стационарном состоянии поперечное движение будет аналогично рассмотренному выше.

Заметим, что сжатие пучка при увеличении продольного магнитного поля в прямолинейном случае будет иметь место для рассмотренной выше модели двух δ -функций, которая может осуществиться, например, при инжекции в магнитное поле с автоэмиссионного катода.

Автор выражает свою глубокую признательность С.Н. Богдановой за помощь при выполнении ряда вычислений и А.Б. Кузнецову за ценные замечания.

Литература

1. А.Г. Бонч-Осмоловский. Препринт ОИЯИ Р9-5299, Дубна, 1970; ЖТФ, XXI , в. 7, стр. 1345 (1971).

2. L. Laslett, U.Schumacher. Preprint UCRL-20855, Berkeley, 1970.

3. О.И. Ярковой. Препринт ОИЯИ 2183, Дубна, 1965.

4. И.Н. Иванов, М.Л. Иовнович, А.Б. Кузнецов, Ю.Л. Обухов, К.А. Решетникова, Н.Б. Рубин, В.П. Саранцев, О.И. Ярковой. Препринт ОИЯИ Р9-4132, Дубна, 1968.

5. Л. Спитцер. "Физика полностью ионизованного газа", Издательство "Мир", Москва, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 мая 1972 года.