

СЭУ 11

9/11-2

ЖС-122

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

1311/2-73

P9 - 6421 e



ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

В.М.Жабицкий, И.Н.Иванов

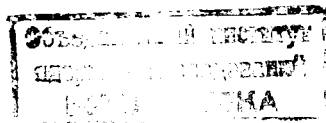
ВЛИЯНИЕ УСКОРЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА
НА ФОКУСИРОВКУ СИЛАМИ ИЗОБРАЖЕНИЯ

1972

P9 - 6421

В.М.Жабицкий, И.Н.Иванов

ВЛИЯНИЕ УСКОРЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА
НА ФОКУСИРОВКУ СИЛАМИ ИЗОБРАЖЕНИЯ



В линейном коллективном ускорителе ионы захватываются и удерживаются потенциальной ямой электронного сгустка, который ускоряется внешними полями. Эффективная сила, удерживающая ионы в электронном сгустке, пропорциональна его плотности /1/. Отсюда ясно, что нужно обеспечить и поддерживать в процессе ускорения плотность электронов в сгустке достаточно высокой. В модели коллективного ускорителя ОИЯИ электронный сгусток представляет собой кольцо, образованное вращающимися во внешнем магнитном поле электронами, с эллиптическим поперечным сечением. Радиальный размер эллипса достаточно эффективно поддерживается внешним магнитным полем, в котором движется кольцо. Основным методом фокусировки электронного кольца в направлении его движения в модели коллективного ускорителя ОИЯИ является фокусировка силами изображения в анизотропном экране типа "беличье колесо" /2,3/.

При рассмотрении фокусировки силами изображения в работах /2,3/ считалось, что электронное кольцо как целое движется равномерно. В реальных условиях электронное кольцо будет двигаться ускоренно, причем величина ускорения не является малой. Поэтому возникает вопрос о влиянии ускорения на фокусировку электронного кольца силами изображения.

Будем считать, что электронное кольцо как целое движется равноускоренно и прямолинейно, причем движение носит релятивистский характер. В этом случае решение задачи о фокусировке электронного кольца силами изображения удобно проводить в системе координат, ускоренно движущейся вместе с кольцом. Ясно, что эта собственная система координат является неинерциальной. В данной работе в качестве собственной системы координат используется неинерциальная меллерова система.

Общие вопросы, связанные с введением неинерциальных меллеровых систем координат, рассмотрены в работе /4/. В интересующем нас случае равноускоренного прямолинейного движения преобразования координат к собственной системе будут иметь вид:

$$T = \frac{1}{c} \left(\frac{c^2}{a} + z \right) \operatorname{sh} \frac{a t}{c} ; \quad Z = \left(\frac{c^2}{a} + z \right) \operatorname{ch} \frac{a t}{c} - \frac{c^2}{a} ; \quad (1)$$

$$Y = y ; \quad X = x ;$$

где X^i - координаты точки в лабораторной (инерциальной) системе координат, x^i - координаты точки в инерциальной меллеровой системе координат ($i = 0, 1, 2, 3$), a - ускорение начала координат собственной системы в этой системе. Отличные от нуля компоненты метрического тензора g_{ik} в собственной системе в этом случае равны

$$g_{00} = \left(1 + \frac{a z}{c^2} \right)^2 ; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 . \quad (2)$$

Формулы преобразования координат (1) и метрика (2) полностью определяют все свойства собственной системы координат.

Уравнения электродинамики в произвольной 4-мерной криволинейной системе координат в вакууме имеют вид /5/:

$$F_{ik;l} + F_{li;k} + F_{kl;i} = 0 ; \quad (3)$$

$$F_{;k}^{ik} = - \frac{4\pi}{c} j^i . \quad (4)$$

Тензор электромагнитного поля F_{ik} определяется через 4-вектор потенциала A_i согласно формуле

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k}, \quad (5)$$

при этом уравнения (3) удовлетворяются автоматически. Тензор $A_{k;i}$ есть ковариантная производная ковариантного 4-вектора

$$A_{k;i} = \nabla_i A_k = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \Gamma_{ki}^{\ell} A_{\ell}, \quad (6)$$

где символы Кристоффеля выражаются через метрический тензор:

$$\Gamma_{ki}^{\ell} = \frac{1}{2} g^{\ell m} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right). \quad (7)$$

Подставляя (5) в (4) и используя перестановочное соотношение для ковариантных производных контравариантного вектора

$$A_{;m;l}^k - A_{;l;m}^k = A^n R_{nlm}^k$$

(R_{nlm}^k - тензор кривизны), получим:

$$-\nabla_k \nabla^k A^i + \nabla_i \nabla_k A^k + g^{im} R_{nm} A^n = -\frac{4\pi}{c} j^i,$$

где $R_{nm}^k = R_{nm}$ - тензор Риччи. Выбирая условие калибровки

$$\nabla_k A^k = 0,$$

аналогичное условию Лоренца, получим, что 4-вектор потенциала A^i удовлетворяет следующим уравнениям:

$$-\nabla_k \nabla^k A^i + g^{im} R_{nm} A^n = -\frac{4\pi}{c} j^i. \quad (8)$$

Уравнения (8), очевидно, ковариантны и определяют потенциалы произвольного электромагнитного поля в любой 4-мерной криволинейной системе координат.

Найдем явный вид уравнений (8) в неинерциальной меллеровой системе координат в случае равноускоренного движения. В дальнейшем будет удобно ввести в пространственной области цилиндрические координаты. Если начало координат собственной системы совершает прямолинейное равноускоренное движение вдоль оси Z , то отличные от нуля компоненты метрического тензора g_{ik} и символов Кристоффеля Γ_{kt}^l равны:

$$g_{00} = \left(1 + \frac{az}{c^2}\right)^2; \quad g_{11} = -1; \quad g_{22} = -r^2; \quad g_{33} = -1; \quad (9)$$

$$\Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 = \frac{a}{c^2 \left(1 + \frac{az}{c^2}\right)}; \quad \Gamma_{00}^3 = \frac{a}{c^2} \left(1 + \frac{az}{c^2}\right);$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{22}^1 = -r. \quad (10)$$

Все компоненты тензора Риччи

$$R_{ik} = R_{ki} = \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l$$

равны нулю. Раскрывая $\nabla_k \nabla^k A^i$ согласно (6) и используя (10), получим следующие уравнения:

$$\left(\Delta - \frac{1}{h^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{3a}{h c^2} \frac{\partial}{\partial z}\right) A^0 - \frac{2a}{h^3 c^2} \frac{\partial A^3}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} j^0;$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{h^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{a}{h c^2} \frac{\partial}{\partial z}\right) A^1 - \frac{2}{r} \frac{\partial A^2}{\partial \theta} = -\frac{4\pi}{c} j^1; \quad (11)$$

$$\frac{1}{r} \left(\Delta - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{h^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{a}{h c^2} \frac{\partial}{\partial z}\right) (r A^2) - \frac{2}{r^3} \frac{\partial A^1}{\partial \theta} = -\frac{4\pi}{c} j^2;$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{h^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{a^2}{h^2 c^4} + \frac{a}{h c^2} \frac{\partial}{\partial z}\right) A^3 - \frac{2a}{h c^3} \frac{\partial A^0}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} j^3;$$

где $h^2 = g_{00}$; Δ - оператор Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Уравнения (11) определяют потенциалы A^i в собственной системе электронного кольца. Пусть электронное кольцо представляет собой бесконечно тонкое заряженное кольцо радиуса r_0 , образованное вращающимися с частотой ω_0 электронами. Тогда 4-ток $j^i(x^k)$ для электронного кольца, покоящегося в плоскости $z = 0$ собственной системы, равен

$$j^i(x^k) = \left(c \frac{Ne}{2\pi r_0} \delta(r - r_0) \delta(z), 0, \frac{Ne}{2\pi r_0} \omega_0 \delta(r - r_0) \delta(z), 0 \right); \quad (12)$$

где N - число электронов в кольце. Будем рассматривать фокусировку электронного кольца силами изображения в идеально проводящей цилиндрической трубе радиуса $b > r_0$, причем будем считать, что центр электронного кольца движется ускоренно вдоль оси трубы. В этом случае граничными условиями для компонент тензора электромагнитного поля F_{Λ} будут условия для переменного электромагнитного поля в лабораторной системе координат на поверхности идеально проводящего цилиндра

$$F_{\Lambda}^{03} = F_{\Lambda}^{02} = F_{\Lambda}^{23} = 0 .$$

Поскольку тензор электромагнитного поля F^{ik} в собственной системе кольца связан с тензором электромагнитного поля F_{Λ}^{mn} в лабораторной системе соотношением:

$$F^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial X^m} \frac{\partial x^k}{\partial X^n} F_{\Lambda}^{mn} ,$$

то, используя (1), получим, что на поверхности идеально проводящего цилиндра в собственной системе кольца граничные условия имеют вид

$$F^{03} = F^{02} = F^{23} = 0 . \quad (13)$$

Граничные условия (13) и заданное движение зарядов (12) однозначно определяют тензор электромагнитного поля F_{ik} . Поскольку 4-ток (12) не зависит от времени, а вся система аксиально симметрична, то уравнения (11) упрощаются, и интересующие нас уравнения для $A^0(x^k)$ и $A^2(x^k)$ принимают следующий вид:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{3a}{hc^2} \frac{\partial}{\partial z} \right) A^0 = - \frac{4\pi}{c} j^0; \quad (14)$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{a}{hc^2} \frac{\partial}{\partial z} \right) (r A^2) = - \frac{4\pi}{c} j^2.$$

Уравнения (14) для заданного 4-тока (12) с граничными условиями (13) имеют решение

$$A^0 = \begin{cases} \frac{2Ne}{b} \left(\frac{c^2}{ab} \right) \int_0^\infty \frac{J_1 \left(\frac{hc^2}{ab} u \right)}{h} J_1 \left(\frac{c^2}{ab} u \right) \left[K_0 \left(\frac{r}{b} u \right) - \frac{K_0(u)}{I_0(u)} I_0 \left(\frac{r}{b} u \right) \right] I_0(\rho u) u \, du; & r_0 < r < b \\ \frac{2Ne}{b} \left(\frac{c^2}{ab} \right) \int_0^\infty \frac{J_1 \left(\frac{hc^2}{ab} u \right)}{h} J_1 \left(\frac{c^2}{ab} u \right) \left[K_0(\rho u) - \frac{K_0(u)}{I_0(u)} I_0(\rho u) \right] I_0 \left(\frac{r}{b} u \right) u \, du; & r < r_0 \end{cases} \quad (15)$$

$$A^2 = \begin{cases} \frac{2Ne}{rb} \left(\frac{c^2}{ab} \right) \beta_0 \int_0^\infty J_0 \left(\frac{hc^2}{ab} u \right) J_0 \left(\frac{c^2}{ab} u \right) \left[K_1 \left(\frac{r}{b} u \right) - \frac{K_1(u)}{I_1(u)} I_1 \left(\frac{r}{b} u \right) \right] I_1(\rho u) u \, du; & r_0 < r < b \\ \frac{2Ne}{rb} \left(\frac{c^2}{ab} \right) \beta_0 \int_0^\infty J_0 \left(\frac{hc^2}{ab} u \right) J_0 \left(\frac{c^2}{ab} u \right) \left[K_1(\rho u) - \frac{K_1(u)}{I_1(u)} I_1(\rho u) \right] I_1 \left(\frac{r}{b} u \right) u \, du; & r < r_0 \end{cases} \quad (16)$$

где $p = \frac{r_0}{b}$; $\beta_0 = \frac{\omega_0 r_0}{c}$; J_n - функция Бесселя первого рода; I_n и K_n - модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода соответственно.

Аксиальная составляющая 4-силы, действующей на электроны кольца со стороны наведенных зарядов, равна

$$f_3^H = \frac{e}{c} F_{3k}^H u^k = \frac{e\gamma}{hc} \left(\frac{\partial A_0^H}{\partial z} + \frac{\omega_0}{c} \frac{\partial A_2^H}{\partial z} \right),$$

где $u^k = \frac{dx^k}{ds}$ - компоненты 4-скорости частицы; $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$;

$\gamma = [1 - (\frac{\omega_0 r_0}{hc})^2]^{-1/2}$; A_0^H и A_2^H , как ясно из (15) и (16), равны ($r \leq b$):

$$A_0^H = -\frac{2Ne}{b} \int_0^\infty \left(\frac{hc^2}{ab} \right) J_1 \left(\frac{hc^2 u}{ab} \right) J_1 \left(\frac{c^2 u}{ab} \right) \frac{K_0(u)}{I_0(u)} I_0(pu) I_0 \left(\frac{r}{b} u \right) u du;$$

$$A_2^H = \frac{2Ne}{b} \beta_0 \int_0^\infty r \left(\frac{c^2}{ab} \right) J_0 \left(\frac{hc^2 u}{ab} \right) J_0 \left(\frac{c^2 u}{ab} \right) \frac{K_1(u)}{I_1(u)} I_1(pu) I_1 \left(\frac{r}{b} u \right) u du.$$

При малых смещениях заряженной частицы от плоскости кольца $z = 0$ величину возвращающей силы определяет производная $\frac{\partial f_\Phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{hc}{\gamma} g_{33} f_3^H \right)$,

которая равна:

$$\frac{\partial f_\Phi}{\partial z} = \frac{2Ne^2}{b^3} \int_0^\infty \left\{ J_0 \left(\frac{c^2 u}{ab} \right) J_1 \left(\frac{c^2 u}{ab} \right) \left[\frac{K_0(u)}{I_0(u)} I_0^2(pu) - \beta^2 \frac{K_1(u)}{I_1(u)} I_1^2(pu) \right] - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{c^2}{ab} \right) u \left[J_1^2 \left(\frac{c^2 u}{ab} \right) \frac{K_0(u)}{I_0(u)} I_0^2(pu) - \beta^2 J_0^2 \left(\frac{c^2 u}{ab} \right) \frac{K_1(u)}{I_1(u)} I_1^2(pu) \right] \right\} u^2 du. \quad (17)$$

Продольное движение электронного кольца как целого должно удовлетворять условию предотвращения отрыва ускоряемых электронным кольцом ионов от электронного кольца. Для этого необходимо добиться того, чтобы ускорения электронов не превышали ускорений, испытываемых ионами. Проблема удержания ионов в потенциальной яме электронного кольца, движущегося с постоянным ускорением в собственной системе и находящегося в плоскости $z = 0$ собственной системы, рассмотрена в работе /6/, где получено, что при определенных условиях, накладываемых на электронно-ионный сгусток, ускорение электронного кольца, удовлетворяющее условию удержания ионов, в собственной системе кольца определяется неравенством

$$a < \frac{N e^2}{\pi g r_0 M} \frac{Z}{A},$$

где g - малый радиус тора (электронного кольцевого сгустка), M - масса покоя протона, Z и A - заряд иона и его атомный вес соответственно. Отсюда получаем, что

$$\left(\frac{a r_0}{c^2} \right) < \frac{N e^2}{\pi g M c^2} \frac{Z}{A}.$$

При ускорении протонов электронным кольцевым сгустком с числом частиц $N = 10^{13}$ и $g \approx 0,1$ см для величины $\left(\frac{a r_0}{c^2} \right)$ получаем следующую оценку:

$$\left(\frac{a r_0}{c^2} \right) < 10^{-2},$$

т.е. величина $\left(\frac{a r_0}{c^2} \right)$ является при ускорении существующих электронно-ионных сгустков малой, хотя и ускорение a при этом значительно.

Рассмотрим случай, когда малым параметром является $\left(\frac{a r_0}{c^2} \right)$. В этом случае для функций Бесселя можно использовать асимптотическое представление

$$J_n(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \left[P_n(u) \cos\left(u - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - Q_n(u) \sin\left(u - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right];$$

являющееся хорошим приближением для $J_0(u)$ и $J_1(u)$ при $u > 1$ ($P_n(u)$ и $Q_n(u)$ - функции Лежандра первого и второго рода соответственно).

Обозначая в (17) подынтегральное выражение через $\psi(u)$, запишем (17) в следующем виде:

$$\frac{\partial f \phi}{\partial z} = \frac{2Ne^2}{b^3} \int_B^\infty \psi(u) du + \frac{2Ne^2}{b^3} \int_0^B \psi(u) du,$$

где $B > \frac{ar}{c^2}$ (считаем, что $b \sim r_0$). В первом интеграле можно воспользоваться асимптотическим представлением функций Бесселя. Второй интеграл есть величина порядка $\left(\frac{ar_0}{c^2}\right)^3$. Поэтому, если производить разложение в (17) по степеням $\left(\frac{ar_0}{c^2}\right)$ до величин второго порядка по $\left(\frac{ar_0}{c^2}\right)$, то можно положить $B = 0$. Используя представление функций Лежандра $P_n(u)$ и $Q_n(u)$ в виде ряда, с точностью до величины второго порядка по $\left(\frac{ar_0}{c^2}\right)$ получим следующее выражение:

$$\frac{\partial f \phi}{\partial z} = - \frac{2Ne^2}{\pi r^3} \Phi_1(\rho) + \left(\frac{ar_0}{c^2}\right)^2 \frac{2Ne^2}{\pi r^3} \Phi_2(\rho), \quad (18)$$

где введены обозначения

$$\Phi_1(\rho) = \rho^3 \int_0^\infty \left[\frac{K_0(u)}{I_0(u)} I_0^2(\rho u) - \beta_0^2 \frac{K_1(u)}{I_1(u)} I_1^2(\rho u) \right] u^2 du; \quad (19)$$

$$\Phi_2(p) = \frac{p}{8} \int_0^{\infty} \left[\frac{K_0(u)}{I_0(u)} I_0^2(pu) - 5\beta_0^2 \frac{K_1(u)}{I_1(u)} I_1^2(pu) \right] du.$$

Первое слагаемое в (18) есть фокусирующий член, совпадающий с выражением для градиента фокусирующей силы в случае равномерного движения электронного кольца с током внутри идеально проводящей цилиндрической трубы /2,3/. Второе слагаемое связано с наличием ускорения электронного кольца как целого. Численные значения $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$ при различных p приведены в таблице (при $\beta_0 \approx 1$).

p	0,7	0,8	0,9
$\Phi_1(p)$	0,245	0,386	0,613
$\Phi_2(p)$	-0,024	-0,107	-0,152

Как видно из таблицы, $\Phi_2(p) < 0$ для приведенных значений p , причем $\Phi_2(p)$ по абсолютной величине, как и $\Phi_1(p)$, растет при $p \rightarrow 1$. Это означает, что наличие ускорения кольца как целого приводит к дополнительной фокусировке электронного кольца в направлении его движения силами изображения в идеально проводящей цилиндрической трубе, причем эффективность фокусировки возрастает при $p \rightarrow 1$. Дополнительная фокусировка связана с наличием $j^2(x^k)$ и ускорением кольца как целого, т.е. с магнитными эффектами при ускорении. В то же время электрическое поле, вызванное ускорением, является дефокусирующим. Из формулы (18) видно, что вклад электрического и магнитного полей, связанных с ускорением кольца как целого, в градиент фокусирующей силы оказывается противоположным по сравнению со случаем равномерного движения. Поскольку дополнительный член квадратично зависит от $\left(\frac{a r_0}{c^2}\right)$, являющегося малым параметром, то вклад его мал, и

наличие ускорения электронного кольца как целого при $(\frac{a r}{c^2}) \ll 1$ не приведет к отрицательным эффектам для фокусировки электронного кольца с током силами изображения в анизотропном экране типа "беличье колесо".

В заключение авторы выражают благодарность М.Г. Нехаевой за проведение численных расчетов на ЭВМ.

Литература

1. В. И. Векслер и др. Препринт ОИЯИ Р9-3440-2, Дубна, 1968.
2. А.Г. Бонч-Осмоловский и др. Препринт ОИЯИ, Р9-4135, Дубна, 1968.
3. Г.В. Долбилов. Препринт ОИЯИ, Р9-4737, Дубна, 1969.
4. А.Г. Бонч-Осмоловский и др. Препринт ОИЯИ, 2849-2, Дубна, 1966.
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. М., 1967.
6. И.Н. Иванов и др. Препринт ОИЯИ, Р9-5535, Дубна, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 апреля 1972 года.