СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р9 - 6318

А.Г.Бонч-Осмоловский

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

ВЛИЯНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И ФОКУСИРОВКУ КОЛЬЦА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

1972

Р9 - 6318

А.Г.Бонч-Осмоловский

ВЛИЯНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И ФОКУСИРОВКУ КОЛЬЦА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ

Бонч-Осмоловский А.Г. P9-6318

Влияние металлических плоскостей на устойчивость и фокусировку кольца релятивистских электронов

Рассмотрена возможность подавления радиационной неустойчивости, а также эффекты фокусировки при сжатии кольца релятивистских электронов вблизи металлических поверхностей. Обсуждается происхождение эффекта кривизны в эффективном показателе спада фокусирующего поля.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1972

Bonch-Osmolovsky A.G. P9-6318

Influence of Metallic Surfaces on the Stability and Focusing of Relativistic Electron Ring

The possibility of depressing the radiative instability and also focusing effects, when compressing the relativistic electron ring in the vicinty of metallic surfaces, are considered. The nature of the curvature effect in the effective index of the focusing field decay is discussed.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1972

В работах[1-3] было показано, что кольцо релятивистских электронов, находящееся в условиях, близких к свободному пространству (например, когда оно создается в адгезаторе или компрессоре), подвержено весьма сильной продольной неустойчивости гидродинамического характера, так называемой радиационной неустойчивости. В значительной части эта неустойчивость определяется мощным когерентным синхротронным излучением кольца и приводит к увеличению его малых размеров (см. подробнее[3]).

Возникает вопрос: нельзя ли существенно уменьшить влияние этой неустойчивости на кольцо в процессе его создания, если адиабатически сжимать кольцо между находящимися достаточно близко от него тонкими металлическими поверхностями? Известно[4], что в таких условиях синхротронное излучение, особенно наиболее опасная, когерентная (длинноволновая) его часть, существенно подавляется. Можно ожидать, что при этом и вещественная часть импеданса кольца в системе, определяющая излучение, и мнимая будут значительно уменьшены, а, следовательно, уменьшатся инкремент и пороговый разброс неустойчивости.

В работе[5] вопрос о влиянии металлических плоскостей на продольную неустойчивость обсуждался кратко и с иной точки зрения.

1. Импеданс кольца между металлическими поверхностями и ослабление продольной неустойчивости

Пусть тонкое кольцо релятивистских электронов радиуса R находится между бесконечными металлическими пластинами, расстояние между которыми равно d. Толщина пластины должна быть гораздо больше глубины скин-слоя для характерных частот возмущений, в данном случае для циклотронной $\omega_H \approx \frac{C}{R}$. Тогда для переменных во времени полей граничные условия на пластинах будут такими же, как для идеального проводника.

Импеданс кольца в системе связывает, по определению, компоненты Фурье с индексами Ω, n электрического поля возмущения и возмущения плотности в пучке (т.к. $\Omega = n\omega_H$, значок Ω ниже опускаем):

$$E_{\phi n} = \frac{v_\phi}{2\pi R}\sigma_n \cdot Z_n . \tag{1}$$

Здесь $E_{\phi n}$ – азимутальная гармоника электрического поля в кольце, v_ϕ – средняя скорость (невозмущенная) электронов, σ_n – гармоника линейной плотности заряда в кольце. Выражение для азимутального поля тонкого кольца между металлическими пластинами известно (см. /4,5/):

$$E_{\phi n} = \frac{2\pi^2 n 6_n}{d}\sum_{m=0}^{\infty}\{2J_n(\tau R)H_n^{(1)}(\tau R) - \beta_\phi^2[J_{n-1}(\tau R)H_{n-1}^{(1)}(\tau R) + J_{n+1}(\tau R)H_{n+1}^{(1)}(\tau R)]\}\quad \tau R = \sqrt{n^2\beta_\phi^2 - \pi^2(2m+1)^2\frac{R^2}{d^2}} . \tag{2}$$

В связи с тем, что вывод выражения (2) в литературе не приводится, для удобства он дан в приложении.

Используя (2), получим импеданс в виде

$$Z_n = Re\, Z_n + iJm\, Z_n \tag{3}$$

и

$$Re\, Z_n = \frac{4\pi^3 n R}{v_\phi d}\sum_{m=0}^{m'}\{2J_n^2(\tau R) - \beta_\phi^2[J_{n-1}^2(\tau R) + J_{n+1}^2(\tau R)]\} . \tag{3а}$$

$$Jm\, Z_n = \frac{4\pi^3 n R}{v_\phi d}\sum_{m=0}^{m'}\{2J_n(\tau R)N_n(\tau R) - \beta_\phi^2[J_{n-1}(\tau R)N_{n-1}(\tau R) + J_{n+1}(\tau R)N_{n+1}(\tau R)]\} -$$

$$- \frac{8\pi^2 n R}{v_\phi d}\sum_{m=m'}^{\infty}\{2I_n(\kappa R)K_n(\kappa R) - \beta_\phi^2[I_{n-1}(\kappa R)K_{n-1}(\kappa R) + I_{n+1}(\kappa R)K_{n+1}(\kappa R)]\} . \tag{3б}$$

В формулах (3а) и (3б) m' определяется из условия обращения τ в нуль, $\kappa R = \sqrt{\pi^2(2m+1)^2\frac{R^2}{d^2} - n^2\beta_\phi^2} = i\tau R$.

Выражение (3а) пропорционально мощности излучения заряда, вращающегося по окружности между бесконечными металлическими плоскостями. Соответствующий результат был получен Швингером (см. /4/).

Прежде чем анализировать (3), выполним предельный переход к свободному пространству, $d \to \infty$. Если $d \to \infty$, то вклад в суммы (3а) и (3б) дают члены с большими номерами $m \approx d/R$, так что можно перейти от суммирования к интегрированию. Положив $x = \frac{2\pi R}{d}m$, для $Re\, Z_n$ получим.

$$Re\, Z_n = \frac{2\pi^2 n}{v_\phi}\int_0^{n\beta_\phi}[2J_n^2(\tau R) - \beta_\phi^2(J_{n-1}^2(\tau R) + J_{n+1}^2(\tau R))]\,dx , \quad \tau R = \sqrt{n^2\beta_\phi^2 - x^2};$$

после использования $J_{n-1}^2(y) + J_{n+1}^2(y) = 2[J_n'^2(y) + \frac{n^2}{y^2}J_n^2(y)]$ и подстановки $x = n\beta\cos\theta$ окончательно:

$$Re\, Z_n = -\frac{2\pi^2 n^2}{c}\int_0^{\pi}[ctg^2\theta \cdot J_n^2(n\beta\sin\theta) + \beta^2 J_n'^2(n\beta\sin\theta)]\sin\theta\, d\Theta . \tag{4}$$

Это выражение эквивалентно известной формуле Шотта и совпадает с полученным в работе /1/. В (3б) переход к интегрированию и замена $x=\frac{2\pi R}{n\beta_\phi d}m$ дают:

$$
Jm Z_n = \frac{2\pi^2 n^2}{c}\{\int_0^1 dx[2J_n N_n - \beta_\phi^2(J_{n-1}N_{n-1} + J_{n+1}N_{n+1})] - \tag{5}
$$

$$
- \frac{2}{\pi}\int_1^\infty dx[2I_n K_n - \beta_\phi^2(I_{n-1}K_{n-1} + I_{n+1}K_{n+1})]\}.
$$

В первом интеграле аргумент функций Бесселя равен $n\beta\sqrt{1-x^2}$, во втором – $n\beta\sqrt{x^2-1}$. Для дальнейших преобразований используем интегралы Ханкеля (см. приложение):

$$
\frac{1}{2}\pi i J_n(ar) H_n(ar) = \int_0^\infty \frac{J_n^2(ay) y\, dy}{y^2 - r^2}, \qquad Jm\, r > 0; \tag{6а}
$$

$$
I_n(ak) K_n(ak) = \int_0^\infty \frac{J_n^2(ay) y\, dy}{x^2 + k^2}. \tag{6б}
$$

После подстановки этих выражений в (5) и некоторых преобразований получаем

$$
Jm Z_n = -\frac{8\pi n^2}{c}\int_0^\infty x' dx'[J_n^2(n\beta x') - \frac{\beta_\phi^2}{2}(J_{n-1}^2(n\beta x') + J_{n+1}^2(n\beta x')]\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+(x'^2-1)}.
$$

Интеграл по x равен

$$
\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+(x'^2-1)} = \begin{cases} \frac{\pi/2}{\sqrt{x'^2-1}}, & x' > 1 \\ 0, & x' < 1. \end{cases}
$$

Окончательно приводим (5) к виду:

$$
Jm Z_n = -\frac{4\pi^2 n^2}{c}[\int_1^\infty \frac{J_n^2(n\beta x)\sqrt{x^2-1}}{x}dx - \beta_\phi^2\int_1^\infty \frac{J_n'^2(n\beta x) x\, dx}{\sqrt{x^2-1}}]. \tag{7}
$$

Этот результат совпадает с полученным в /3/; следует заметить, что в данной работе мы пользуемся разложением Фурье с изменением знака у Ω и n по сравнению с работами /1,3/, в связи с чем и знак мнимой части импеданса теперь минусовый.

Возвращаясь к анализу формул (3), прежде всего отметим, что для всех n, удовлетворяющих условию

$$
n\beta_\phi < \frac{\pi R}{d}, \tag{8}
$$

излучения нет, и, соответственно, $Re Z_n = 0$.

Мнимая часть импеданса не равна нулю и можно получить аналитическое выражение при сильном неравенстве в (8). В формуле (3б) при этом первая сумма равна нулю, а во второй суммирование начинается с нуля. Так же, как и в (7), в этой сумме есть расходящееся выражение, связанное с собственным полем бесконечно тонкого кольца. Выделим его:

$$
Jm Z_n = -\frac{8\pi^2 nR}{v_\phi d}\sum_{m=0}^\infty\{\frac{2}{\gamma^2}I_n(x_m)K_n(x_m) + \beta_\phi^2[2I_n(x_m)K_n(x_m) - I_{n-1}(x_m)K_{n+1}(x_m) - \tag{9}
$$

$$
- I_{n+1}(x_m)K_{n+1}(x_m)]\};
$$

здесь $x_m \approx \pi(2m+1)\frac{R}{d} \gg 1$, $\gamma^2 = (1-\beta_\phi^2)^{-1}$.

Применим асимптотические разложения функций Бесселя; тогда после несложных преобразований окончательно получим, учитывая, что в первой сумме в (9) (расходящейся) суммирование надо вести до $k_z d \approx 1$ или $(2m+1)_{max} \approx \frac{d}{\pi a} \gg 1$, где a – малый размер кольца:

$$
Jm Z_n = -\frac{4\pi n}{v_\phi}[\frac{1}{\gamma^2}(C + ln\frac{2d}{\pi a}) + \beta_\phi^2(\frac{d}{\pi R})^2 \cdot 1{,}05], \tag{10}
$$

$$
C = 0{,}577...
$$

Это выражение несколько отличается от результата, приведенного в /5/ (для $E_{\phi n}$).

Второй случай, поддающийся аналитическому исследованию, имеет место при $n \approx \frac{\pi R}{d}$, так что $m' = 0$ и

$$\sqrt{\left| n^2 \beta^2 - \pi^2 \frac{R^2}{d^2} \right|} \ll n . \qquad (11)$$

Не будем учитывать малую вещественную часть и малый первый член в (3б), если $n \gtrsim \frac{\pi R}{d}$, и оценим мнимую часть импеданса, которая дается второй суммой в (3б). Выделим член с $m = 0$.

$$Im Z_n \approx - \frac{8 \pi^2 n R}{v_\phi d} \{ 2 I_n(x) K_n(x) - \beta_\phi^2 [I_{n-1}(x) K_{n-1}(x) + I_{n+1}(x) K_{n+1}(x)] + \sum_{m=1}^{\infty} \ldots \} \qquad (12)$$

Здесь, согласно (11), $x \ll n$. В первом члене (12) используем асимптотические разложения для больших индексов, так что

$$I_n(x) K_n(x) \approx \frac{1}{2n} \qquad 2 I_n K_n - I_{n-1} K_{n-1} - I_{n+1} K_{n+1} \approx - \frac{1}{n^3} . \qquad (13)$$

В сумме, стоящей в (12), так как мы считаем, что $(2m+1)^2 \frac{\pi^2 R^2}{d^2} \gg n^2$, $m \geq 1$, можно использовать асимптотические разложения. Соответствующий ряд для $I_n K_n$ имеет вид:

$$I_n(x) K_n(x) \approx \frac{1}{2x} \left[1 - \frac{4n^2 - 1}{8 x^2} + \frac{3}{2} \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{8^2 x^2} \ldots \right]. \qquad (14)$$

Этот ряд дает хорошую аппроксимацию даже для $x \approx (2 \div 3) n$. Используя (13) и (14) в (12) и произведя необходимые упрощения, приходим к результату:

$$Im Z_n = - \frac{4 \pi n}{v_\phi} \left[\frac{1}{\gamma^2} \left(C + \ln \frac{2d}{\pi a} \right) - 1{,}95 \left(\frac{d}{\pi R} \right)^2 \right]. \qquad (15)$$

Как видно из этой формулы, для $n \approx \frac{\pi R}{d}$ импеданс сильно уменьшен по сравнению с (10), либо даже меняет знак на положительный (при $\gamma \gg 1$). В последнем случае для гармоник $n \lesssim \frac{\pi R}{d}$ продольная неустойчивость вообще не имеет места.

С дальнейшим ростом n появляется вещественная часть импеданса и снова отрицательная мнимая часть, причём эти величины постепенно приближаются к характеристикам импеданса в свободном пространстве при $n \gg \frac{\pi R}{d}$. Сравним импеданс кольца, расположенного вблизи металлических плоскостей ((10) или (15)), с импедансом кольца в свободном пространстве. Последний в упрощенной форме равен (см./3/):

$$Z_n \Big|_{d \to \infty} \approx - \frac{4 \pi^2}{c} 0{,}26\, n^{1/3} (1 + i/\sqrt{3}) . \qquad (16)$$

Сравнение (16) с (10) или (15) показывает, что уменьшение импеданса происходит с уменьшением d и при заданном γ лишь до определенной величины ($Im Z_n$ в γ^2 раз меньше $|Z_n|_{d \to \infty}$). Например, при $\gamma = 20$ практически весь эффект уменьшения достигается при $\frac{R}{d} \approx 3$. С точки зрения неустойчивости это означает, что введение металлических поверхностей при $\frac{R}{d} \gtrsim 3$ уменьшает инкремент и порог неустойчивости для наиболее опасных длинноволновых возмущений ($n < \frac{\pi R}{d}$) примерно в γ раз, т.е. в данном случае на порядок.

2. О фокусировке кольца при сжатии вблизи металлической поверхности

Когда кольцо релятивистских электронов сжимается вблизи металлических поверхностей, что, как показано выше, полезно с точки зрения уменьшения продольной неустойчивости, может возникнуть эффект влияния металлических поверхностей на фокусировку кольца. Обычно такая фокусировка обеспечивается бочкообразным магнитным полем и с учётом собственных полей характеризуется эффективным показателем спада $n_{эфф}$ (см./6/).

При отражении заряженного кольца в боковых металлических плоскостях возникает дефокусирующий эффект, тем более сильный, чем ближе к кольцу металл. Для нейтрализованного кольца, естественно, этот эффект отсутствует. Дефокусирующий эффект должен существенно уменьшаться, если происходит также и токовое отражение, поскольку для релятивистских электронов эффект магнитных взаимодействий с током отражения должен быть сильным. Когда может возникнуть токовое отражение для реальных[x/] металлов? Очевидно, лишь в случае нестационарности магнитного поля кольца, возникающей, в частности, при его сжатии. Если скорость сжатия $v = \frac{dR}{dt}$ нерелятивистская, то нетрудно оценить характерные частоты изменения магнитного поля во времени.

$$f \approx \frac{1}{T} \approx \frac{2v}{d} .$$

Когда глубина скин-слоя, соответствующая f, гораздо меньше толщины пластины (или расстояния до пластин, если они имеют большую толщину), то магнитное поле в пластины практически не проникает и ситуация приближается к случаю идеального металла, когда нормальная составляющая магнитного поля равна нулю на его поверхности.

Таким образом, можно утверждать, что если выполнено условие

$$\delta = \frac{c}{2\pi\sqrt{\sigma f}} \ll h \text{ или } \frac{d}{2} , \tag{17}$$

σ – проводимость металла, h – толщина пластины, то токовое отражение имеет место, т.е. на радиусе кольца в металле возбуждается эффективный ток обратного направления, который можно представить в виде воображаемого кольца на расстоянии d от реального.

С учётом как зарядового, так и токового отражения мы и проведем вычисление поправки к показателю спада фокусирующего магнитного поля. Наиболее важно и интересно найти Δn_z, который можно определить следующим образом.

Кольцо электронов сжимается между металлическими плоскостями (или поверхностями с сохранением отношения R/d), при этом на электроны кольца действует сила Лоренца от отображенных колец, каждая пара которых находится от него на расстоянии md, $m = 1, 2, \ldots$ симметрично

x/ Для идеального металла токовое отражение имеет место, так как даже стационарный ток вызывает отражение из-за нестационарного процесса в момент возникновения и бесконечно большой постоянной затухания.

по разные стороны. Тогда градиент f_z силы в z -направлении (перпендикулярном плоскости колец) и определяет искомую поправку к показателю спада. z – компонента силы Лоренца от одного кольца на расстоянии z от его плоскости и радиусе R равна

$$f_z = \frac{e^2 N k E(k)}{\pi R z \gamma_\phi^2} - \frac{e^2 N z k}{2\pi R^3} \beta_\phi^2 [E(k) - K(k)] . \tag{18}$$

Здесь N – полное число электронов в кольце, $k^2 = \frac{1}{1 + z^2/4R^2}$, $E(k)$ и $K(k)$ – полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно. При получении (18) использованы выражения электрического и магнитного поля тонкого кольца на расстояниях, гораздо бо́льших малых размеров его сечения (см., например, /7/).

Показатель спада поля колец изображения, по определению, равен:[x/]

$$\Delta n_z = - \frac{2}{m \gamma_\phi \omega_H^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\partial f_z^m}{\partial z} \Big|_{z = md} . \tag{19}$$

Выполняя дифференцирование по z в формуле (18) и вводя обозначения:

$$\frac{dE}{dk^2} = - \frac{D(k)}{2}, \quad p = \frac{md}{2R} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}, \quad \nu = \frac{e^2}{mc^2} \cdot \frac{N}{2\pi R} , \tag{20}$$

получим:

$$\Delta n_z = - \frac{8\nu}{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \Big\{ \frac{1}{\gamma_\phi^2} \frac{R^3}{m^3 d^3} \cdot p k [k^4 p^2 D(k) - (1 + 2p^2) k^2 E(k)] - \frac{\beta_\phi^2}{4} k^3 [2E(k) - K(k)] \Big\} . \tag{21}$$

Учитывая отражение первого порядка $(m = 1)$, при условии $\frac{d^2}{4R^2} \ll 1$, $p^2 \ll 1$, $k^2 \approx 1$ и используя разложения

$$D(k) \approx \ln \frac{8R}{d} - 1 ; \quad E(k) \approx 1 ; \quad K(k) \approx \ln \frac{8R}{d} ,$$

x/ Верхний предел суммирования в этой сумме по членам магнитного взаимодействия ограничен значением, когда перестает выполняться условие (17).

приходим к следующему результату:

$$\Delta n_z \simeq \frac{\nu}{\gamma}\left[\frac{4R^2}{d^2}\cdot\frac{1}{\gamma_\phi^2} - 2\beta_\phi^2\left(\ln\frac{8R}{d} - 2\right)\right]. \tag{22}$$

В общем виде учесть отражения всех порядков в (21) сложно; для оценки можно воспользоваться тем, что вклад членов высшего порядка быстро убывает. Для примера вычислим члены до третьего порядка включительно, предполагая, что $\frac{9}{4}\frac{d^2}{R^2} \ll 1$. Тогда, суммируя $\Delta n_z^{(1)}$, $\Delta n_z^{(2)}$ и $\Delta n_z^{(3)}$, получим:

$$\Delta n_z \approx \frac{\nu}{\gamma}\left[\frac{31}{9}\cdot\frac{R^2}{d^2}\cdot\frac{1}{\gamma_\phi^2} - 2\beta_\phi^2\left(\ln\frac{16R}{3d} - 2\right)\right]. \tag{23}$$

Этот результат лишь незначительно отличается от (22). Первый член (23) отвечает дефокусирующему действию электростатического поля изображения, ослабленному магнитным взаимодействием токов в γ_ϕ^2 раз. Такое ослабление связано с обычным эффектом Беннета для прямолинейных пучков. Отметим,что при отсутствии токового отражения для интенсивно заряженного пучка эффект дефокусировки вблизи стенки весьма значителен. Второй член в (23), характерный для данной криволинейной конфигурации тока, является типичным следствием эффекта кривизны, связанным с различным поведением в пространстве электрического и магнитного полей кольца (в прямолинейном пучке и то и другое поля одинаково меняются с расстоянием от оси пучка, с чем и связан "чистый" эффект Беннета). В релятивистском случае ($\gamma_\phi^2 \gg 1$) этот член может превысить первый, и тогда поля изображения дают фокусирующий эффект. Сходный эффект кривизны при рассмотрении полей изображения был найден также для кольца, расположенного коаксиально с внешним металлическим цилиндром и движущегося вдоль его оси /8/.

По существу, этот эффект имеет ту же природу, что и известные поправки к показателю спада n за счёт собственного поля кольца /6/, только вместо $\frac{R}{d}$ там фигурирует $\frac{R}{a}$, где a – размер сечения кольца.

Выражаю благодарность Ю.И. Алексахину за замечание, связанное с возможным вблизи стенки дефокусирующим эффектом.

Приложение

Чтобы найти азимутальную составляющую электрического поля кольца при заданном возмущении плотностей заряда и тока (2), нужно решить уравнения для потенциалов, которые для компонент Фурье $\Phi_n(r,z)$, $A_{\phi n}(r,z)$, $A_{rn}(r,z)$ имеют следующий вид:

$$\Delta_r \Phi_n - \frac{n^2}{r^2}\Phi_n + \frac{n^2\omega^2}{c^2}\Phi_n + \frac{d^2\Phi_n}{dz^2} = -4\pi\sigma_n\,\delta(r-R)\,\delta(z). \tag{П.1}$$

$$\Delta_r A_{\phi n} - \frac{n^2+1}{r^2}A_{\phi n} + \frac{n^2\omega_H^2}{c^2}A_{\phi n} + \frac{2in}{r^2}A_{\phi n} + \frac{d^2A_{\phi n}}{dz^2} = -\frac{4\pi}{c}v_\phi\sigma_n\,\delta(r-R)\delta(z)$$

$$\Delta_r A_{rn} - \frac{n^2+1}{r^2}A_{rn} + \frac{n^2\omega_H^2}{c^2}A_{rn} - \frac{2in}{r^2}A_{rn} + \frac{d^2A_{rn}}{dz^2} = 0. \tag{П.2}$$

Запишем δ – функции в виде:

$$\delta(r-R) = R\int_0^\infty J_n(\varkappa r)J_n(\varkappa R)\,\varkappa\,d\varkappa, \tag{П.3}$$

$$\delta(z) = \frac{2}{d}\sum_{m=0}^\infty \cos\frac{(2m+1)\pi z}{d}. \tag{П.4}$$

(П.4) означает, что решения можно искать в виде рядов Фурье по z в интервале $-\frac{d}{2}\le z\le\frac{d}{2}$, при этом граничные условия на поверхности металлических пластин будут удовлетворены.

Подставляя (П.3) и (П.4) в (П.1), нетрудно получить частное решение уравнения для скалярного потенциала:

$$\Phi_{nm} = 2\pi^2 R\sigma_n\, i \begin{cases} J_n(\tau r) H_n^{(1)}(\tau R), & r < R \\ J_n(\tau R) H_n^{(1)}(\tau r), & r > R. \end{cases} \qquad \tau^2 = \frac{n^2\omega_H^2}{c^2} - \frac{\pi^2(2m+1)^2}{d^2} \qquad (\text{П.5})$$

При выводе (П.5) использован интеграл Ханкеля[9]:

$$\frac{1}{2}\pi i J_n(\tau r) H_n^{(1)}(\tau R) = \int_0^\infty \frac{x J_n(xr) J_n(xR)}{x^2 - \tau^2}\, dx\,. \qquad (\text{П.6})$$

Следует заметить, что интеграл в (П.6) имеет смысл, если τ имеет положительную мнимую часть, отличную от нуля. В реальном физическом пространстве всегда существует конечное затухание, что и обеспечивает выполнение этого условия.

Система связанных уравнений для компонент векторного потенциала легко решается аналогичным методом, и решения выражаются через функции Бесселя с индексами $n-1$ и $n+1$.

Полученные частные решения уравнений Даламбера удовлетворяют всем граничным условиям, а также условиям излучения при $r \to \infty$. Таким образом, эти решения являются также и общими.

Выражая азимутальную компоненту электрического поля в месте расположения кольца $(z = 0, r = R)$ через потенциалы $E_{\phi n} = -\frac{in}{r}\phi_n + \frac{in\omega_H}{c} A_{\phi n}$, приходим к формуле (2).

Литература

1. А.Г. Бонч-Осмоловский, Э.А. Перельштейн. Препринт ОИЯИ Р9-4426, Дубна, 1969. Изв. вузов. Радиофизика, т. XIII, №7, 1089 (1970).
2. И.Л. Коренев, Л.А. Юдин. Изв. вузов. Радиофизика, т. XIV, 1268 (1971).
3. А.Г. Бонч-Осмоловский, В.Г. Маханьков, В.Н. Цытович, Б.Г. Щинов. Препринт ОИЯИ, Р9-5622, Дубна, 1971.
4. J.Nodvick, D.Saxon. Phys.Rev. 96, 180 (1954).
5. C.Pellegrini, A.Sessler, UCRL-18103, p.442, Berkeley (1968).
6. И.Н. Иванов и др. Препринт ОИЯИ, Р9-4132, Дубна, 1968.
7. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. "Электродинамика сплошных сред", ГИТТЛ, Москва, 1957.

8. А.Г. Бонч-Осмоловский и др. Препринт ОИЯИ, Р9-4135, Дубна, 1968.
9. Г.Н. Ватсон. "Теория бесселевых функций". ИЛ, Москва, 1949.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 марта 1972 года.