

К-143

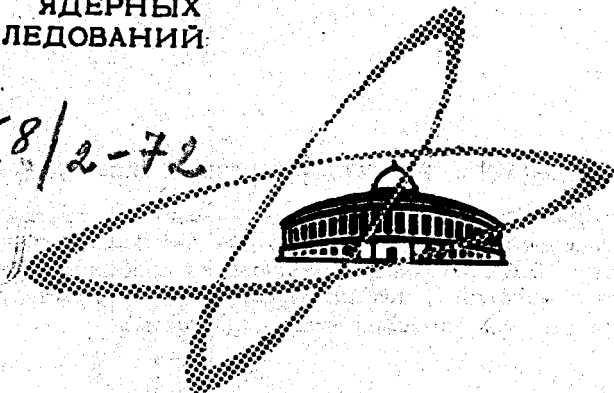
ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

1058/2-72

3/11-72

P9 - 6284



ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

Н.Ю.Казаринов, А.Б.Кузнецов, Э.А.Перельштейн,
С.Б.Рубин, В.Ф.Шевцов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ
В НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТИПА "ЗМЕЙКА"
ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО КОЛЬЦА

1972

P9 - 6284

Н.Ю.Казаринов, А.Б.Кузнецов, Э.А.Перельштейн,
С.Б.Рубин, В.Ф.Шевцов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ
В НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТИПА "ЗМЕЙКА"
ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО КОЛЬЦА

, Направлено в ж. "Particle Accelerators"

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Казаринов Н. Ю., Кузнецов А.Б., Перельштейн Э.А., Рубин Б.С.,
Шевцов В.Ф.

P9-6284

Нелинейные явления в неустойчивости типа "змеяка"
электронно-ионного кольца

Рассматриваются поперечные колебания электронно-ионного кольца с учетом нелинейности поляризационных сил. Показано существование нелинейных стационарных волн, а также нелинейная стабилизация неустойчивости типа "змеяка" в режиме малой надкритичности.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1972

Kazarinov N.Yu., Kuznetsov A.B., Perelstein E.A.,
Rubin S.B., Shevtzov V.F.

P9-6284

Nonlinear Effects in the Sinuous-Instability
of the Electron-Ion Ring

Transverse oscillations of the electron-ion ring are considered taking account of the nonlinearity of the polarization forces. The existence of the nonlinear stationary waves is pointed out as well as nonlinear stabilization of the sinuous-instability in the small supercriticality regime.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1972

Интерес к неустойчивости электронно-ионного кольца по отношению к изгибаниям без изменения формы поперечного сечения ("змеяка"), рассмотренной впервые Г.И. Будкером ^{/1/}, возобновился в последнее время ^{/2-4/}, поскольку эта неустойчивость может ограничивать набор энергии на единицу длины и число ускоряемых ионов в коллективном методе ускорения ^{/5/}.

В работах ^{/1-3/}, а также в работе ^{/6/}, где выяснялось стабилизирующее влияние внешней фокусировки на данную неустойчивость, расчеты выполнялись в предположении о линейности поляризационных сил, возникающих при разделении локальных центров масс (центров масс частиц на заданном азимуте) электронного и ионного колец. В действительности поляризационные силы - нелинейные. Например, вычисление поляризационных сил, возникающих при разделении двух прямолинейных шнуров эллиптического сечения с постоянной плотностью, показывает, что эти силы достигают максимального значения при расхождениях локальных центров масс на расстояния порядка полуосей. Характер поляризационных сил для двух шнуров кругового сечения равного радиуса иллюстрируется рисунком 1, где s - отношение расстояния между локальными центрами масс к радиусу, f - поляризационная сила в безразмерных единицах.

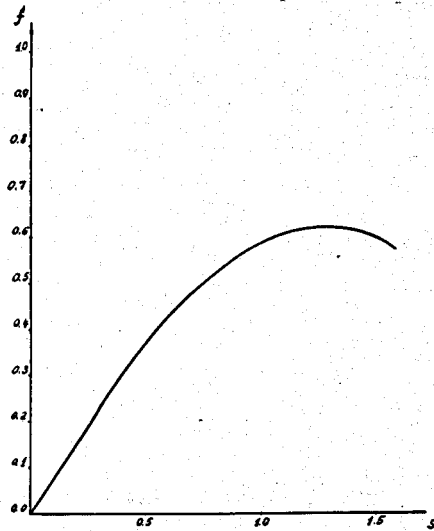


Рис. 1.

Мы предполагаем, что кривизна кольца и малые отличия распределения плотности от постоянного не меняют качественного характера поляризационных сил. Линейный рост их при малых разделениях центров масс ослабевает для смещений на расстояния, сравнимые с размерами поперечного сечения колец.

Для сечений пучков, имеющих плоскость симметрии и сохраняющих ее при разделении локальных центров масс, мы учтем это ослабление, добавляя к выражениям для поляризационных сил работ ^{/1,2,6/} дополнительный кубический член. Из качественных соображений ясно, что при уменьшении связи между электронным и ионным пучками увеличивается устойчивость их взаимных колебаний ^{/6/}. В этой работе мы покажем, что нелинейное ослабление поляризационных сил приводит к существованию нелинейной стационарной волны с конечной амплитудой, и, при определенных условиях, - к нелинейной стабилизации рассматриваемой неустойчивости.

1. Нелинейная стационарная волна

Перепишем уравнения для взаимных колебаний электронного и ионного шнуров ^{/6/}, вводя нелинейное ослабление поляризационных сил:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\omega_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \nu} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \nu^2} + \lambda^2 x_1 = a_1 (x - px^3) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = -a_2 (x - px^3), \quad (2)$$

где $x = x_2 - x_1$, x_1 и x_2 — соответственно координаты отклонения локальных центров масс электронного и ионного шнуров от положения равновесия, зависящие от времени t и азимутальной координаты ν ;
 ω_0 — частота обращения электронов во внешнем магнитном поле,
 a_1 , a_2 — квадраты частот колебаний электрона в поле ионов и иона в поле электронов соответственно, p — коэффициент, характеризующий нелинейность, λ^2 — градиент внешней фокусирующей силы. В стационарном состоянии $x_1 = x_2 = 0$. Когда внешняя фокусировка отсутствует, ищем решение системы уравнений (1-2) в виде нелинейной стационарной волны, считая x_1 и x_2 зависящими от одной переменной $z = \omega t - p\nu$, где ω — некоторая постоянная величина, p — целое число. После несложных преобразований из уравнений (1-2) получаем для величины x :

$$\frac{d^2 x}{dz^2} + \Omega^2 x - \mu x^3 = 0, \quad (3)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{a_1}{(\omega - n\omega_0)^2} + \frac{a_2}{\omega^2}, \quad \mu = p\Omega^2. \quad (4)$$

Уравнение (3) - суть уравнение Дюффинга и решение его /7/ :

$$x = C \operatorname{sn} [\sigma (z+h), k], \quad (5)$$

где C и σh - амплитуда и фаза, определяемые из начальных условий, а σ^2 и k^2 выражаются через C следующим образом:

$$k^2 = \frac{pC^2}{2 - pC^2} \quad (6)$$

$$\sigma^2 = \left(1 - \frac{pC^2}{2}\right) \cdot \Omega^2. \quad (7)$$

Решение (5) имеет смысл при $pC^2 \leq 1$. Используя свойство периодичности эллиптического синуса по аргументу с периодом $4K(k)$, где K - полный эллиптический интеграл первого рода, и требуя периодичности решения (5) по азимуту с периодом 2π , с помощью формул (4) и (7) получаем дисперсионное уравнение

$$\Omega^2 = \frac{a_1}{(\omega - n\omega_0)^2} + \frac{a_2}{\omega^2} = \frac{4}{\pi^2} \frac{K^2(k)}{\left(1 - \frac{pC^2}{2}\right)}, \quad (8)$$

из которого находим величину ω .

Правая часть (8) монотонно возрастает от 1 при $C = 0$ до ∞ при $pC^2 = 1$. Функция $\Omega^2(\omega)$ представляется схематически в виде двух характерных графиков (рис. 2,3). В первом случае имеется четыре точки пересечения кривой $\Omega^2(\omega)$ с прямой $f(\omega) = 1$ и возможны нелинейные стационарные волны с амплитудой C в пределах $0 \leq C \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$.

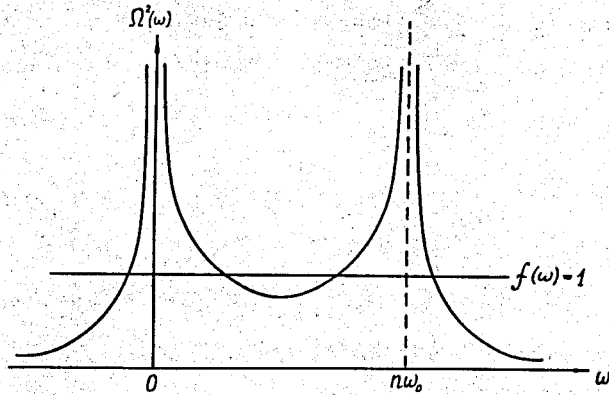


Рис. 2

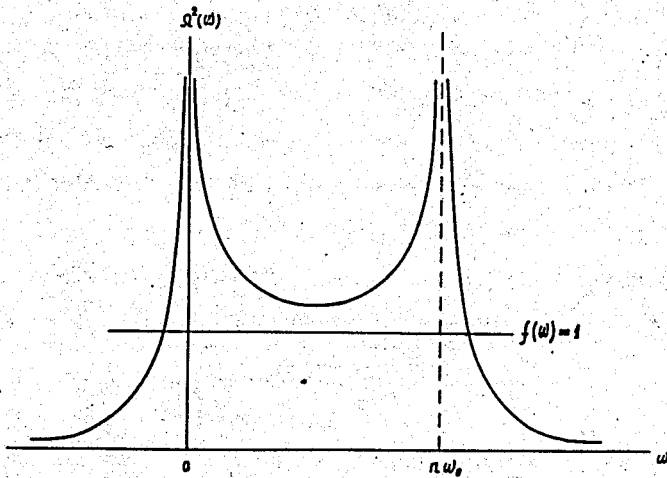


Рис. 3

Во втором случае минимум $\Omega^2(\omega)$ расположен выше прямой $f(\omega) = 1$ и существуют лишь такие нелинейные волны, у которых амплитуды больше минимальной, определяемой из условия

$$\Omega^2(\omega_{min}) = \frac{4}{\pi^2} \frac{K^2(k_{min})}{(1 - \frac{p C_{min}^2}{2})} \quad (9)$$

Выражение для относительного смещения x в случае $pC^2 - k^2 \ll 1$ и $\Omega^2(\omega_{min}) \approx 1$ либо $\Omega^2(\omega_{min}) < 1$, имеет вид

$$x = C \sin(\omega t - n\nu), \quad (10)$$

где ω - корень дисперсионного уравнения

$$\Omega^2(\omega) = 1 + \frac{3}{4} pC^2. \quad (11)$$

Если $C \rightarrow 0$, дисперсионное уравнение (8) переходит в соответствующее уравнение линейной теории /1/. Даже в том случае, когда линейное рассмотрение дает неустойчивость, мы получаем стационарные нелинейные волны конечной амплитуды.

В реальных пучках, где закон ослабления поляризационных сил сложнее, чем выбранный в нашей модели, полученные здесь результаты будут справедливы для не очень больших амплитуд, когда в разложении сил в ряд Тейлора можно ограничиться кубическим членом. Можно показать, что существуют стационарные волны в более общем случае, когда поляризационная сила представляется монотонно растущей функцией $U'(x)$. Дисперсионное уравнение для таких волн имеет

$$\text{вид} \quad \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - \Omega^2(\omega, n)U(x)}} = 1,$$

где E - произвольная постоянная, связанная с амплитудой волны, $x_{1,2}$ - решения уравнения

$$E = \Omega^2 U(x).$$

2. Развитие неустойчивости при малой надкритичности

Рассмотрим развитие во времени неустойчивости с учетом слабой нелинейности поляризационных сил. Ограничиваясь случаем, когда возбуждается лишь одна азимутальная гармоника с номером n и, кроме

того, инкремент неустойчивости в линейной теории γ_n мал по сравнению с действительной частью частоты колебаний ω_n (случай малой надкритичности), воспользуемся методом Крылова-Боголюбова /8/.

Указанные условия реализуются без внешней фокусировки для первой гармоники, когда параметры пучка выбраны вблизи границы области устойчивости /1,2/, так что возбуждается только эта гармоника

($\frac{a_2}{\omega_0^2} [1 + (\frac{a_1}{a_2})^{1/3}]^2 \geq 1$). При наличии внешней фокусировки возможность существования единственной неустойчивости гармоники с $n \geq 1$ следует из результатов работы /6/.

Для удобства вычислений в уравнениях (1-2) перейдем к новым безразмерным неизвестным функциям $u_{1,2}$ по формулам

$$x_{1,2} = a_0 e^{\gamma_n t} u_{1,2}(\tau), \quad (12)$$

где $t = \omega_0 t$ - безразмерное время, a_0 - константа, связанная с начальными отклонениями. Функции $u_{1,2}$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \frac{2\gamma_n}{\omega_0} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right) + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau \partial \nu} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \nu^2} + \frac{1}{\omega_0^2} (\gamma_n^2 + a_1 + \lambda^2) u_1 = \\ = \frac{a_1}{\omega_0^2} u_2 - \epsilon \frac{a_1}{\omega_0^2} (u_2 - u_1)^3 e^{\frac{2\gamma_n}{\omega_0} \tau} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + \frac{2\gamma_n}{\omega_0} \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \frac{1}{\omega_0^2} (\gamma_n^2 + a_2) u_2 = \frac{a_2}{\omega_0^2} u_1 + \epsilon \frac{a_2}{\omega_0^2} (u_2 - u_1)^3 e^{\frac{2\gamma_n}{\omega_0} \tau} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\epsilon = p a_0^2 \ll 1.$$

В линейном приближении ($\epsilon = 0$) решение системы (13) представляется в виде: $u_1 = \phi_1 \cos \psi_n + \phi_2 \sin \psi_n$

$$u_2 = \phi_3 \cos \psi_n + \phi_4 \sin \psi_n \quad (14)$$

$$\psi_n = \frac{\omega_n}{\omega_0} \tau - n \nu,$$

где функции ϕ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) - произвольное нетривиальное решение системы алгебраических уравнений:

$$[\gamma_n^2 + a_1 + \lambda^2 - (\omega_n - p\omega_0)^2] \phi_1 + 2\gamma_n(\omega_n - p\omega_0) \phi_2 - a_1 \phi_3 = 0 \quad (15.1)$$

$$-2\gamma_n(\omega_n - p\omega_0) \phi_1 + [\gamma_n^2 + a_1 + \lambda^2 - (\omega_n - p\omega_0)^2] \phi_2 - a_1 \phi_4 = 0 \quad (15.2)$$

$$-a_2 \phi_1 + (\gamma_n^2 + a_2 - \omega_n^2) \phi_3 + 2\gamma_n \omega_n \phi_4 = 0 \quad (15.3)$$

$$-a_2 \phi_2 - 2\gamma_n \omega_n \phi_3 + (\gamma_n^2 + a_2 - \omega_n^2) \phi_4 = 0. \quad (15.4)$$

Из условия существования нетривиального решения этой системы получается дисперсионное уравнение, представляющее собой обычное дисперсионное уравнение линейной теории /6/, из которого находят величины γ_n и ω_n :

$$\frac{a_1}{(\omega_n - p\omega_0)^2 - \gamma_n^2 - \lambda^2} + \frac{a_2}{\omega_n^2 - \gamma_n^2} + \frac{4\gamma_n^2 \omega_n (\omega_n - p\omega_0)}{[(\omega_n - p\omega_0)^2 - \gamma_n^2 - \lambda^2](\omega_n^2 - \gamma_n^2)} = 1 \quad (16)$$

$$(\omega_n - p\omega_0) (\gamma_n^2 - \omega_n^2 + a_2) + \omega_n [\gamma_n^2 - (\omega_n - p\omega_0)^2 + a_1 + \lambda^2] = 0.$$

Ранг матрицы, составленной из коэффициентов системы уравнений (15), равен двум, поэтому две функции из четырех ϕ_i выбираются произвольно. Предполагая, что комбинационные частоты, составленные из частот двух устойчивых и затухающей ветви колебаний не совпадают с частотой ω_n , ищем решение нелинейной системы уравнений (13), следуя методу Крылова-Боголюбова, в виде:

$$u_1 = C(\theta) \{ \phi_1 \cos [\psi_n + a(\theta)] + \phi_2 \sin [\psi_n + a(\theta)] \} + \epsilon \tilde{u}_1(C, \psi_n, t) \quad (17)$$

$$u_2 = C(\theta) \sin [\psi_n + a(\theta)] + \epsilon \tilde{u}_2(C, \psi_n, t),$$

где $\theta = \epsilon \tau$, C и a - медленно меняющиеся безразмерная амплитуда и фаза колебаний, ϕ_1 и ϕ_2 - решения алгебраической системы

линейного приближения; мы положили здесь $\phi_3 = 0$, $\phi_4 = 1$, при этом

$$\phi_1 = \frac{2\gamma_n \omega_n}{a_2}, \quad \phi_2 = \frac{\gamma_n^2 - \omega_n^2 + a_2}{a_2}. \quad (18)$$

Изменение во времени амплитуды и фазы описывается системой уравнений

$$\frac{dC}{d\tau} = \epsilon A(C, \theta) \quad (19)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \epsilon B(C, \theta),$$

где функции A и B находятся при выделении секулярных членов в системе уравнений (13).

Подставим выражения (17) в (13), заменим производные от амплитуды и фазы по формулам (19) и ограничимся первым порядком малости по ϵ . При условии $\frac{\gamma_n}{\omega_n} \ll 1$ экспоненциалы за время быстрых осцилляций функций \tilde{u}_1 и \tilde{u}_2 существенно не меняются. Домножая полученные уравнения на $\cos\psi_n$ и $\sin\psi_n$, усредняем их при фиксированном ν по быстрому времени, что соответствует усреднению по ψ_n . Требуем ограниченности функций \tilde{u}_1 и \tilde{u}_2 . Проведем вспомогательное рассмотрение неоднородной системы линейных уравнений, получающихся при добавлении в правые части (15,1-4) произвольных констант $E_{1,2,3,4}$. Как известно, для существования решения такой системы необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы совпадал с рангом матрицы системы (15) ^{/9/}, т.е. в нашем случае равнялся двум. Отсюда получаем условия существования решения

$$a_2 (E_1 \phi_2 + E_2 \phi_1) + a_1 E_3 = 0 \quad (20)$$

$$a_2 (E_2 \phi_2 - E_1 \phi_1) + a_1 E_4 = 0.$$

В усредненной системе линейных уравнений для функций \tilde{u}_1 и \tilde{u}_2 роль констант E_i выполняют члены, остающиеся в первом порядке по ϵ при подстановке (17) в (13). Потребуем, чтобы эти члены удовлетворяли соотношениям (20).

Из полученных таким образом уравнений находим величины A и B :

$$A = -C^3 \frac{1}{\omega_0} e^{\frac{2\gamma_n \tau}{\omega_0}} F(\omega_n, \gamma_n)$$

$$B = -\frac{3}{16} \frac{C^2}{\omega_0} \frac{(\gamma_n^2 + \omega_n^2)^2}{\omega_n a_2^3} e^{\frac{2\gamma_n \tau}{\omega_0}} \left\{ \frac{2a_2 \omega_n}{\omega_n - n\omega_0} [(\omega_n - n\omega_0)^2 - \gamma_n^2 - \lambda^2] + (\omega_n^2 + \gamma_n^2)^2 \right\} \quad (21)$$

$$F(\omega_n, \gamma_n) = \frac{3}{32} \frac{(\gamma_n^2 + \omega_n^2)^2}{\gamma_n \omega_n a_2^3} \{ 8a_2 \gamma_n^2 \omega_n^2 - (\omega_n^2 + \gamma_n^2)^2 (\gamma_n^2 - \omega_n^2 + a_2) \}.$$

Отметим, что функция A всегда отрицательна в силу выполнения дисперсионного уравнения (16). Подставляя (21) в (19) и интегрируя полученное уравнение с начальным условием $C(0) = 1$, имеем:

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon \frac{F(\omega_n \gamma_n)}{\gamma_n} (e^{\frac{2\gamma_n \tau}{\omega_0}} - 1)}} \quad (22)$$

Таким образом, амплитуда колебаний a изменяется по закону

$$a = \frac{a_0 e^{\gamma_n t}}{\sqrt{1 + \epsilon \frac{F(\omega_n \gamma_n)}{\gamma_n} (e^{2\gamma_n t} - 1)}} \quad (23)$$

Несмотря на малый параметр ϵ , коэффициент при экспоненциале в подкоренном выражении может быть гораздо больше единицы, т.к.

$$\frac{F(\omega_n \gamma_n)}{\gamma_n} \sim \frac{\omega_n^2}{\gamma_n^2} \gg 1, \text{ поэтому за времена } t \sim \frac{1}{\gamma_n} \text{ экспоненциаль-}$$

ный рост амплитуды прекращается, и она выходит на плато, достигая величины

$$\frac{2\gamma_n}{\omega_n} \left(\frac{a_2}{\omega_n^2} \right)^{3/2} \frac{\delta}{\sqrt{\frac{3}{8} p \left(1 - \frac{a_2}{\omega_n^2} \right)}}$$

где δ - размер малого сечения пучка.

При отсутствии внешней фокусировки в асимптотике взаимные колебания пучков переходят в нелинейную стационарную волну, близкую к нелинейной волне с максимальной амплитудой. В случае недокомпенсированного пучка $\left(\frac{a_1}{a_2} \ll 1 \right)$

$$\omega_1 = \omega_0 = a_2, \quad \gamma_1 = \omega_0 \sqrt{3} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{1/3}$$

и амплитуда величины $x_2 - x_1$ приближенно равна

$$4 \sqrt{\frac{2}{p}} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{1/6} \delta. \quad (24)$$

Минимальная амплитуда x нелинейной стационарной волны примерно в $2\sqrt{2}$ раз меньше предельной амплитуды (24). Нелинейный сдвиг частоты волны при насыщении колебаний и стационарной совпадают с точностью до множителя порядка единицы.

В случае перекомпенсированного пучка $\left(\frac{a_2}{a_1} \ll 1 \right)$ нарушается условие $\frac{\gamma_n}{\omega_n} \ll 1$, если усреднение вести по-прежнему на постоянном азимуте. Поэтому перейдем к новой угловой переменной $\nu' = \nu + \omega_0 t$, при усреднении будем считать $\nu' = \text{const}$ и произведем замену $x_1 \leftrightarrow x_2$. Тогда сохраняются все результаты предыдущего случая, если в соответствующих формулах заменить $\frac{a_1}{a_2} \rightarrow \frac{a_2}{a_1}$.

Близость амплитуды установившихся колебаний и амплитуды стационарной волны сохраняется и в промежуточном случае $\frac{a_2}{a_1} \sim 1$.

Приведём выражения для асимптотических значений амплитуд при наличии внешней фокусировки. В предельном случае недокомпенсированного пучка имеем для $\omega_n \approx n\omega_0 - \lambda$

$$\max(x_2 - x_1) = \frac{2\gamma_n a_2^{1/2}}{(\kappa\omega_0 - \lambda)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa\omega_0 - \lambda}{\lambda \frac{a_2}{a_1}}}\right)^2} \left[1 - \frac{a_2}{(\kappa\omega_0 - \lambda)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa\omega_0 - \lambda}{\lambda a_2}}\right)^2} \frac{a_1}{\lambda a_2}\right]^{-1/2} \sqrt{\frac{8}{3p}} \delta, \quad (25)$$

для перекомпенсированного пучка

$$\max(x_2 - x_1) = \frac{2\gamma_n a_2^{1/2}}{\left(\frac{a_2}{a_1 \kappa\omega_0}\right)^{2/3} [(\kappa\omega_0)^2 - \lambda^2]^{4/3}} \left[1 - \frac{a_2}{\left(\frac{a_2}{a_1 \kappa\omega_0}\right)^{2/3} [(\kappa\omega_0)^2 - \lambda^2]^{4/3}}\right]^{-1/2} \sqrt{\frac{8}{3p}} \delta.$$

Из общего выражения для амплитуды колебаний при насыщении, а также различных частных примеров (24-25) видно, что отношение амплитуды к характерному размеру пучка содержит малый параметр $\frac{\gamma_n}{\omega_n}$ и таким образом может быть достаточно малым.

В ы в о д ы

Нелинейное ослабление поляризационных сил при разделении локальных центров масс электронного и ионного шнуров, которое должно иметь место для реальных пучков, приводит к новым эффектам по сравнению с линейной теорией неустойчивости типа "змейки". Появляется нелинейная стационарная волна даже тогда, когда соответствующие возмущения

в линейной теории нарастают. При малой надкритичности в одномодовом приближении возможна нелинейная стабилизация неустойчивости, причем предельные амплитуды малы по сравнению с размером пучка. Для устойчивых ветвей колебаний линейной теории ослабление поляризационных сил приводит к нелинейному сдвигу частоты колебаний, оставляя амплитуду постоянной во времени. Сдвиг частоты, вычисленный по методу Крылова-Боголюбова, в первом порядке по параметру малости совпадает со значением сдвига нелинейной стационарной волны в этом же приближении.

Неустойчивые колебания в режиме насыщения при отсутствии внешней фокусировки переходят в нелинейную волну с амплитудой, близкой к минимальной.

При наличии внешней фокусировки неустойчивость закрывается в нелинейном режиме также при сравнительно малой амплитуде колебаний за времена порядка обратного инкремента линейной теории. Качественно такие же результаты были получены в эксперименте ^{/10/}, где при наличии внешней фокусировки наблюдалось последовательное возбуждение одиночных гармоник, насыщение которых происходило за очень короткие времена и не сопровождалось потерей частиц из пучка.

Таким образом, благодаря нелинейной стабилизации неустойчивости развитие ее не ведет к переходу параметров пучка (интенсивностей электронного и ионного пучков) в область линейной устойчивости.

Случай, когда параметры выбраны далеко от границы области устойчивости (относительный инкремент велик и одновременно возбуждается много гармоник), нуждается в дополнительном рассмотрении.

В заключение авторы благодарят участников семинаров ОНМУ ОИЯИ, ФТИ АН УССР и ИТЭФ за обсуждения и полезные замечания.

Л и т е р а т у р а

1. Г.И. Будкер. Атомная энергия, 5, 9 (1956).
2. П.Р. Зенкевич, Д.Г. Кошкарев. Резонансы связи поперечных колебаний двух кольцевых пучков. Препринт ИТЭФ №841, Москва, 1970.
3. А.Г. Бонч-Осмоловский, К.А. Решетникова. Препринт ОИЯИ Р9-6136, Дубна, 1971.
4. D.Mohl and A.M.Sessler. Optimum Electron Rings. Preprint LBL, ERAN-172, 1971
5. В.И. Векслер и др. Доклад на Международной конференции по ускорителям, США, Кембридж (1967); Атомная энергия 24, 317 (1968); Препринт ОИЯИ Р9-3440-2, Дубна, 1967.
6. Б.В. Чириков. Атомная энергия, 19, 239 (1965).
7. Н.Н. Моисеев. Асимптотические методы нелинейной механики, Наука, М., 1969.
8. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ФМ, М, 1963.
9. В.И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 3, ч. 1, Гостехиздат, МЛ, 1949.
10. H.A.Grunder and G.R.Lambertson. Transverse Beam Instabilities at Bevatron. Preprint LBL, UCRL-20691, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 февраля 1972 года.