ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р9 - 6136

А.Г.Бонч-Осмоловский, К.А.Решетникова

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТИПА "ЗМЕЙКИ" ДВУХКОМПОНЕНТНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО КОЛЬЦА АЗИМУТАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

1971

Р9 - 6136

А.Г.Бонч-Осмоловский, К.А.Решетникова

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТИПА "ЗМЕЙКИ" ДВУХКОМПОНЕНТНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО КОЛЬЦА АЗИМУТАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Направлено в ЖТФ

Бонч-Осмоловский А.Г., Решетникова К.А. P9-6136

О стабилизации неустойчивости типа "змейки" двухкомпонентного релятивистского кольца азимутальным магнитным полем

В работе на основе гидродинамической модели двух шнуров рассмотрена неустойчивость типа "змейки" в присутствии азимутального магнитного поля. Показано, что при достаточно большой величине последнего области устойчивости существенно изменяются. В частности, неустойчивость может быть стабилизирована при значительных плотностях пучков.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1971

Bonch-Osmolovsky A.G., Reshetnikova K.A. P9-6136

On Stabilization of the Kink-Instability of the Two-Component Relativistic Ring by the Azimuthal Magnetic Field

The kink-instability is considered for the case of presence of the azimuthal magnetic field basing on the hydrodynamical model of two strings. It is shown that at sufficiently high value of the magnetic field the stability regions are changed essentially. In particular the instability can be stabilizes at significant beam densities.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1971

При изучении релятивистского стабилизированного пучка Будкером /1/ была кратко рассмотрена двухпучковая неустойчивость на основе простейшей модели двух заряженных шнуров - электронного и ионного, связанных линейными силами притяжения и испытывающих деформации в виде "змеек". Детальный анализ был затем дан Чириковым /2/; некоторые обобщения недавно получены Зенкевичем и Кошкаревым /3/.

Эта неустойчивость может проявиться в экспериментах как с электронно-ионными кольцами /4/, так и с линейными самофокусирующимися электронными пучками /5/. Поэтому возможность ее стабилизации на линейной стадии представляет определенный интерес.

В данной работе в рамках гидродинамической модели Будкера-Чирикова будет показано, что в присутствии достаточно большого азимутального магнитного поля область устойчивости существенно расширяется в сторону больших значений плотностей пучков.

1. Пусть кольцо радиуса R находится во внешнем однородном магнитном поле с компонентами H_z и $H_\phi = \frac{\kappa}{r}$ x/.

x/ Не представляет особого труда рассмотреть случай, когда кольцо находится в слабофокусирующем и азимутальном полях, анализ дает практически те же результаты.

Считая, как в /1/, что тонкое кольцо состоит из двух пучков – электронного и ионного – с одинаковыми неизменными сечениями и равномерными по сечению плотностями, напишем следующую систему уравнений для поперечных движений пучков как целое (в пренебрежении собственным магнитным полем, т.е. при $\frac{\nu_e}{\gamma} \ll 1$):

$$\begin{aligned}
\ddot{r}_e &= \frac{v_{\phi e}^2}{r} - \Omega_e^2 (r_e - r_i) + \omega_H v_\phi - \omega_e \dot{z}_e , \\
\ddot{z}_e &= - \Omega_e^2 (z_e - z_i) + \omega_e \dot{r}_e , \\
\ddot{r}_i &= - \Omega_i^2 (r_i - r_e) + \omega_i \dot{z}_i , \\
\ddot{z}_i &= - \Omega_i^2 (z_i - z_e) - \omega_i \dot{r}_i .
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь в уравнениях для электронов $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \omega_H \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{d}{dt}\Big|_i = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_i$,

$$\omega_H = \frac{eH_z}{mc\gamma}, \quad \gamma = (1 - \beta_\phi^2)^{-1/2}, \quad \Omega_e^2 = \frac{2\pi n_i e^2}{m\gamma}, \quad \Omega_i^2 = \frac{2\pi n_e e^2}{M},$$

n_i, n_e – плотности ионов и электронов, M, m – соответствующие массы покоя, $\omega_e = \frac{eH_\phi}{mc\gamma}$, $\omega_i = \frac{eH_\phi}{Mc}$.

В условиях внешней фокусировки (например, в бочкообразном поле H_z) n_i может меняться в пределах $0 \le n_i \le n_e$, в условиях самофокусировки $\frac{n_e}{\gamma^2} \le n_i \le n_e$.

Полагая, что электроны и ионы испытывают малые отклонения от положения равновесия ($r_e = r_i = R$, $z_e = z_i = 0$) и представляя эти отклонения пропорциональными $r_e' \approx z_e' \approx e^{i(n\theta - \omega t)}$ $r_i' \approx z_i' \approx e^{-i\omega t}$, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$A^2 - A(\nu^2 - Q_i^2) - p^2(n-\nu)^2(\nu^2 - Q_i^2)^2 - 2p^2\frac{m\gamma}{M}\nu(n-\nu)Q_e^2 Q_i^2 + \tag{2}$$

$$+ p^4\left(\frac{m\gamma}{M}\right)^2\nu^2(n-\nu)^2 - p^2\left(\frac{m\gamma}{M}\right)^2\nu^2[Q_e^2 - (n-\nu)^2][1 + Q_e^2 - (n-\nu)^2] = 0.$$

Здесь $Q_e = \dfrac{\Omega_e}{\omega_H}$, $Q_i = \dfrac{\Omega_i}{\omega_H}$, $p = \dfrac{\omega_e}{\omega_H} = \dfrac{H_\phi}{H_z}$, $\nu = \dfrac{\omega}{\omega_H}$,

$$A = (\nu^2 - Q_i^2)[(n-\nu)^2 - Q_e^2] - Q_i^2 Q_e^2. \tag{3}$$

Уравнение (2) представляет собой алгебраическое уравнение 8-го порядка относительно ν и в случае устойчивости должно иметь восемь действительных корней.

Если $H_\phi = 0\ (p = 0)$, то уравнение (2) переходит в два уравнения 4-го порядка, исследованные впервые в /1,2/, а именно:

$$A = 0, \tag{4}$$

$$A - \nu^2 + Q_i^2 = 0. \tag{5}$$

Уравнение (4) фактически описывает неустойчивость прямолинейного пучка (при $H_{||} = 0$), (4) и (5) совместно – неустойчивость кольцевого пучка в однородном магнитном поле H_z.

Дополним несколько результаты /2,3/, приведя данные о границе области устойчивости в практически важном случае, когда $Q_e \simeq Q_i = Q$. Тогда из уравнения (4) можно получить:

$$Q^2 \le \frac{n^2}{8}. \tag{6}$$

Для уравнения (5) аналогичной простой формулы нет. При $n = 1$ это уравнение дает устойчивость при любых Q, при $n \ge 2$ граница лежит ниже, чем (6). Соответствующие данные для нескольких значений n приведены в следующей таблице.

Q^2 \ n	1	2	3
уравн. (4)	1/8	1/2	9/8
уравн. (5)	-	0,29	0,9

Вернемся к анализу неустойчивости в присутствии H_ϕ -поля. Будем считать, что

$$p < \frac{M}{m\gamma}. \tag{7}$$

Это предположение фактически означает, что мы пренебрегаем влиянием магнитного поля на ионы. Тогда в уравнении (2) тремя последними членами можно пренебречь. Позднее мы к этому пункту вернемся.

Уравнение (2) в этом случае будет иметь вид (8)

$$[(n-v)^2(v^2-Q_i^2)-v^2Q_e^2]^2-(v^2-Q_i^2)[(n-v)^2(v^2-Q_i^2)-v^2Q_e^2]-p^2(n-v)^2(v^2-Q_i^2)^2=0.$$

Представляет также интерес дисперсионное уравнение для прямолинейного пучка, находящегося в продольном магнитном поле H. В предположении (7) оно сводится к следующей паре уравнений 4-го порядка:

$$(\omega^2-\Omega_i^2)(ku-\omega)(ku-\omega\pm\omega_H)=\omega^2\Omega_e^2. \tag{9}$$

Здесь k - волновой вектор возмущения, u -скорость электронов.

Простые рассуждения приводят к выводу, что определяющим для анализа устойчивости является уравнение (9) со знаком +. Введем для удобства снова безразмерные величины, поделив (9) на $(ku)^2$:

$$(v^2-Q_i^2)(1-v)(1-v+p)=v^2Q_e^2. \tag{10}$$

Теперь

$$v=\frac{\omega}{ku},\qquad Q_{i,e}=\frac{\Omega_{i,e}}{ku},\qquad p=\frac{\omega_H}{ku}.$$

В результате качественного анализа уравнений (8) и (10) можно сделать следующие заключения: стабилизирующее действие магнитного поля увеличивается с ростом его величины, но существует резонанс общего вида:

$$\Omega_i = ku \quad , \quad \text{или} \quad \Omega_i = n\omega_H \ , \tag{11}$$

когда, по крайней мере при условии (7), стабилизирующее действие поля исчезает. Соотношение (11) означает, что частота колебаний ионов в системе покоя электронов $(\Omega_i - ku)\gamma_{||}$ равна нулю.

Аналитическое решение можно получить в асимптотическом случае, когда $\Omega_i^2 \gg k^2 u^2$, или $\Omega_i^2 \gg n^2 \omega_H^2$. Границы области устойчивости определяются уравнениями (8) и (10) совместно с условиями обращения в нуль первых производных от них.

Производя в этих двух парах уравнений упрощения ($Q_i^2 \gg v^2$), можно получить:

Криволинейный пучок: $$p_{min} \approx 4\frac{Q_e^2}{Q_i^2}, \qquad \frac{Q_e^2}{Q_i^2} > 1 . \tag{12}$$

Прямолинейный пучок: $$\frac{p_{min}^2}{1 + p_{min}} \approx 4\frac{Q_e^2}{Q_i^2} . \tag{13}$$

Формула (12) дает неплохой результат и при $Q_i = Q_e$: точный расчет дает 3,8 вместо 4,0 согласно (12).

На рис. 1 и 2 представлены результаты численных расчетов областей устойчивости для криволинейного пучка (уравнение (8), $n = 1$, рис.1) и для прямолинейного пучка (уравнение (10), рис. 2). По осям координат отложены величины Q_e^2 , Q_i^2 , пропорциональные плотностям ионной и электронной компонент пучка соответственно. Области устойчивости заштрихованы для примера при $p = 10$, двойная штриховка определяет область устойчивости без азимутального (или продольного) магнитного поля. Ход кривых для $n = 2,3,\ldots$ на рис. 1 не показан, в основном он тот же, что для $n = 1$, лишь область неустойчивости при $Q_i > n$ ограничена в общем случае осью абсцисс и прямой $n^2(Q_e^2 + 1) = Q_i^2$.

Учет членов в уравнениях (8,10), пропорциональных $\frac{m\gamma}{M}$, приводит в практически достижимых полях (7) к незначительным изменениям рис. 1 и 2, в основном в окрестности точки резонанса (11).

В заключение заметим, что в случае движущегося как целое кольца при релятивистской энергии направленного движения, пропорциональной $\gamma_z = (1-\beta_z^2)^{-1/2}$, в исходных уравнениях поле H_ϕ должно быть заменено на $H_\phi \cdot \gamma_z$ /6/.

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность И.А.Золиной, М.Г.Нехаевой за проведенные численные расчеты и Н.А.Филипповой за помощь в оформлении рукописи.

Литература

1. Г.И.Будкер. Атомная энергия, 5, 9 (1956).
2. Б.В.Чириков. Атомная энергия, 19, 239 (1965).
3. П.Р.Зенкевич, Д.Г.Кошкарев. Препринт ИТЭФ №841, Москва, 1970.
4. В.И.Векслер и др. Атомная энергия, 24, 317 (1968).
5. W.I.Link. IEEE Trans. Sci., 14, 777 (1967);
S.E.Graybill, S.V.Nablo. IEEE Trans. Sci., 14, 782 (1967);
F.C.Ford et al. Bull. Amer. Phys. Soc., 12, 961 (1967).
6. А.Г.Бонч-Осмоловский. Препринт ОИЯИ, Р9-5299, Дубна, 1970, ЖТФ, XLI, 1345 (1971).

Рукопись поступила в издательский отдел
25 ноября 1971 года.

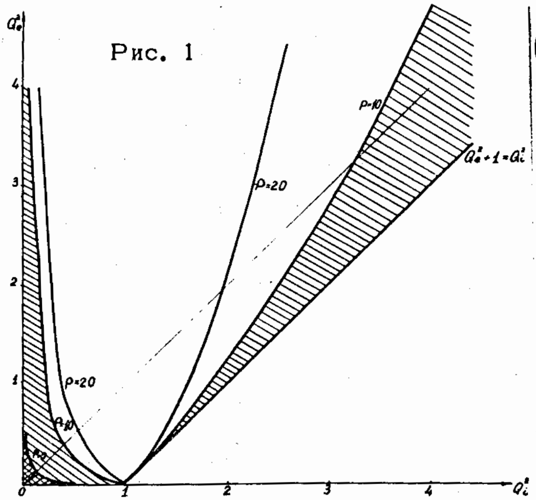

Рис. 1

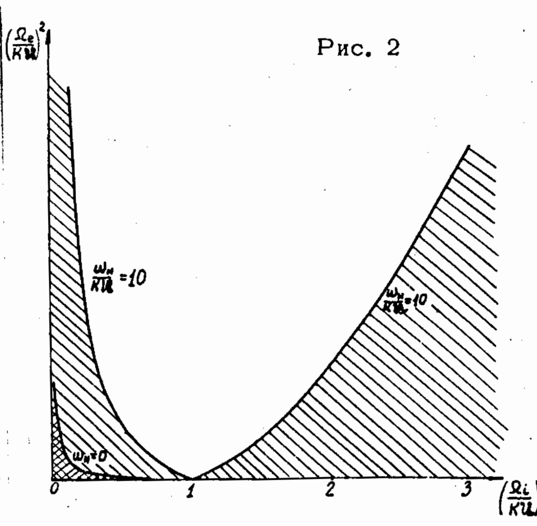

Рис. 2