

С 345 л 1

15/11-71

К-562

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P9 - 6027

3886/2-71



А.Д.Коваленко, Д.Париш, П.И.Рыльцев,  
В.П.Саранцев

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ  
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В СИЛУНД  $\epsilon$

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

1971

P9 - 6027

А.Д.Коваленко, Д.Париш, П.И.Рыльцев,  
В.П.Саранцев

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ  
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В СИЛУНД  $\epsilon$

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

В общем случае уравнения движения релятивистского пучка частиц имеют вид<sup>1/</sup>:

$$\frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{dr}{dt} \right) = r \gamma \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \eta \left[ E_r + B_z r \frac{d\theta}{dt} - B_\theta \frac{dz}{dt} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \gamma \frac{d\theta}{dt} \right) = \eta \left[ E_\theta + B_z \frac{dz}{dt} - B_r \frac{dr}{dt} \right] r \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{dz}{dt} \right) = \eta \left[ E_z + B_\theta \frac{dr}{dt} - B_r r \frac{d\theta}{dt} \right],$$

где  $\gamma$  — лоренц-фактор электронов,  $\eta = \frac{e}{m_0}$  — отношение заряда электрона к его массе покоя.

Для промежуточных выкладок удобно ввести новую переменную

$$\gamma \frac{d}{dt} = \frac{d}{dr}, \quad (1a)$$

тогда уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = r \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \eta \left[ \gamma E_r + B_z r \frac{d\theta}{d\tau} - B_\theta \frac{dz}{d\tau} \right]$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( r^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right) = \eta \left[ \gamma E_\theta + B_r \frac{dz}{d\tau} - B_z \frac{dr}{d\tau} \right] r \quad (16)$$

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \eta \left[ \gamma E_z + B_\theta \frac{dr}{d\tau} - B_r r \frac{d\theta}{d\tau} \right].$$

Будем считать отличными от нуля  $E_z$  и  $B_z$  - компоненты внешнего поля, а также  $E_r$  и  $B_\theta$  - компоненты собственного поля пучка. Последние в приближении круглого пучка с равномерной по сечению плотностью,двигающегося преимущественно вдоль оси  $z$ , имеют вид:

$$E_r = \frac{J}{2\pi\epsilon_0} \frac{dz}{dt} \cdot \frac{1}{r}; \quad B_\theta = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}. \quad (2)$$

В этих выражениях  $J$  - ток пучка,  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  - диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума,  $r$  - радиус пучка.

В параксиальном приближении, используя обычную методику, систему уравнений (16) можно свести к виду:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{\eta^2}{4} B_z^2 \cdot r = \frac{\eta J}{2\pi\epsilon_0} \frac{dz}{d\tau} \left[ \gamma^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{r}, \quad (3)$$

$$\frac{\eta^2}{4} B_z \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} r^2 + \frac{d^2 z}{d\tau^2} = \eta E_z \gamma + \frac{\eta \mu_0 J}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\tau}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи решения системы (3).

$$1. \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0; \quad E_z \gg \frac{\mu_0 J}{2\pi\gamma} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dr}$$

Второе уравнение системы (3) принимает вид:

$$\frac{d^2 z}{dr^2} = \eta E_z \cdot \gamma, \quad (4)$$

где  $\gamma = 1 + \frac{\eta}{c^2 \cdot r^2} (E_z \cdot z + \phi_0)$ . Здесь  $\phi_0$  - потенциал инжекции.

После несложных выкладок приводим первое уравнение системы (3) к виду:

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \nu_z^2 \cdot R = \frac{\beta}{R \operatorname{sh} \xi}, \quad (5)$$

где

$$R = \frac{r}{r_0}; \quad \nu_z = \frac{B_z \cdot c}{2E_z}; \quad \beta = \frac{c \cdot J}{2\pi\epsilon_0 \eta E_z^2 \cdot r_0^2}$$

$$\xi = \frac{\eta \cdot E_z}{c} r = \operatorname{Arch} \gamma.$$

Из (5) видно, что для ограничения влияния сил пространственного заряда необходимо увеличивать параметр  $\nu_z$  по сравнению с  $\beta$ .

Анализ уравнения (5) проведем в два этапа:

А. Рассмотрим в окрестности некоторой точки  $\xi = \xi_c$ , какие колебания возникают в системе и какими будут их амплитуды, считая при этом, что коэффициент при  $\frac{1}{R}$  в этой малой окрестности не меняется.

На рис. 1 даны значения амплитуд при различных  $\nu_z^2 = k \gamma_0^2 \frac{B_z^2}{J} \operatorname{sh} \xi_c$

для некоторых  $R'_0$ . Видно, что если  $\nu_1^2 < \frac{1}{2}$ , то фокусирующая сила недостаточна для удержания пучка. Видно также, что при больших значениях  $\nu_1^2$  происходит "перефокусировка", например, при  $\nu_1^2 = 1,0$  и  $R'_0 = 0$ , получаем  $R = \frac{r}{r_0} \approx 0,50$ , т.е. средний радиус пучка меньше  $r_0$ .

При этих же допущениях можно рассмотреть проблему ненулевого фазового объема. Если фазовый объем имеет конечное значение, в уравнении появится слагаемое, пропорциональное этому объему  $\mu$ :

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \nu_1^2 R = \frac{\beta \xi}{R} + \frac{\mu^2}{R^3}. \quad (6)$$

Если принять  $\beta \xi = \text{const}$ , то это уравнение можно также проинтегрировать. На рис. 2 приведены амплитуды колебаний в зависимости от  $\mu^2$ . На рис. 3 построены те же кривые, только при изменении  $\nu_1^2$ . Видно, что учёт фазового объема приводит к раскату колебаний пучка. Из рис. 3 видно также, что колебания, направленные в сторону уменьшения радиуса пучка, практически не меняются с ростом  $\nu_1^2$ .

Б. Линеаризуем уравнение (5), вводя новую функцию:

$$y = \left( \frac{\text{sh } \xi}{\beta} \right)^{1/2} \cdot R, \quad (7)$$

при этом уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - \text{cth } \xi \cdot \frac{dy}{d\xi} + \left( \frac{3}{4} \text{cth}^2 \xi - \frac{1}{2} + \nu^2 \right) y = \frac{1}{y}. \quad (8)$$

Для значений  $\xi > 0,03$  (что соответствует энергии  $e \phi_0 > 250$  эв) с достаточной точностью можно написать:

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - \text{cth } \xi \cdot \frac{dy}{d\xi} + \nu^2 y = \frac{1}{y}, \quad (9)$$

откуда следует, что  $y = \frac{1}{\nu}$  - есть решение уравнения (8) в данном приближении.

Поэтому мы вправе положить

$$y = y_0 (1 + \delta), \quad (9a)$$

где  $\delta \ll 1$ ,  $y_0 = \text{const}$ , т.е. рассмотреть изменения  $y$  около некоторого равновесного значения. Далее, производя замену

$$\frac{1}{1 + \delta} \approx 1 - \delta,$$

после некоторых выкладок получаем

$$\frac{d^2 \rho}{d\xi^2} - \text{ctg } \xi \frac{d\rho}{d\xi} + \left( \nu^2 + \frac{1}{y_0^2} \right) \rho = 0; \quad \rho = \delta + \frac{\nu^2 - \frac{1}{y_0^2}}{\nu^2 + \frac{1}{y_0^2}}. \quad (9b)$$

В этом линейном уравнении коэффициент при  $\rho$  порядка  $2\nu^2$ , но  $y_0$  не обязательно совпадает со значением  $\frac{1}{\nu}$ . Если обозначить

$\text{ch } \xi = x$ ,  $\nu^2 + \frac{1}{y_0^2} = \omega^2$ , получим

$$(x^2 - 1) \frac{d^2 \rho}{dx^2} + \omega^2 \rho = 0; \quad (10)$$

т.е. имеем уравнение Лежандра (см. <sup>13/</sup> уравнение 2.231) с комплексным индексом. Если индекс обозначить через  $\lambda$ , то

$$\lambda^2 + \lambda + \omega^2 = 0; \quad \lambda = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \omega^2}.$$

Так как  $\omega \gg 1$ , то

$$\lambda \approx -\frac{1}{2} \pm i\omega. \quad (10a)$$

Согласно <sup>/3/</sup>, общее решение уравнения (10) имеет вид

$$\rho = (x^2 - 1) [C_1 P'_\lambda + C_2 Q'_\lambda], \quad (10b)$$

где  $P'_\lambda$ ,  $Q'_\lambda$  - присоединенные функции Лежандра первого и второго рода степени  $\lambda$  и порядка  $l$ .

Таким образом, линеаризованное уравнение (5) имеет решение, колеблющееся около значения  $y_0$ . Рассчитать основные параметры колебаний можно по табличным данным, например <sup>/4/</sup>.

## II. Дрейфовый унасток - $E_x = 0$ ; $B_x = 0$ .

В этом случае второе уравнение системы (3) принимает вид:

$$\frac{d^2 z}{dr^2} = \frac{\eta \cdot \mu_0 \cdot J}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dr}. \quad (11)$$

Интегрируя (11) один раз, получим:

$$\frac{dz}{dr} - \frac{dz}{dr} \Big|_0 = \frac{\eta \mu_0 J}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (12)$$

Сравним левую и правую части (12) "на уровне  $e$ ", т.е. когда  $\frac{r}{r_0} = e^{-1}$ .

Если  $\frac{dz}{dt} \Big|_0 = \frac{\eta \mu_0 J}{2\pi \gamma_0}$ , то  $\frac{dz}{dt} = 0$ , что означает запирание системы. Выражение для предельного тока можно записать следующим образом:

$$J_{\text{пред.}}(\alpha) = \frac{2\pi c}{\eta \cdot \mu_0} \sqrt{\gamma_0^2 - 1} \approx 8,5 \cdot 10^3 \sqrt{\gamma_0^2 - 1}. \quad (13)$$

Для потенциала запирания получается выражение:

$$\phi_0(\beta) \approx 3,6 \cdot 10^3 J^2 \quad (\text{кВ}). \quad (14)$$



Например, для  $J = 5$  ка,  $\phi = 90$  кв. Если потенциал инжекции меньше, частицы "на уровне  $e$ " не смогут пройти через дрейфовый участок.

### III. Дрейфовый участок с продольным магнитным полем

$$E_z = 0; B_z \neq 0; \frac{\partial B_z}{\partial z} \neq 0.$$

Исходное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{\eta^2}{4} B_z \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} \cdot r^2 = \frac{\eta \mu_0 J}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dz}{dr}. \quad (15)$$

Не зная пока как меняется  $r$ , можно делать только весьма приближенную оценку. Умножаем уравнение (15) на  $dz/dr$  и интегрируем (без правой части):

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4} \eta^2 \int r^2 B_z \frac{dB_z}{dz} \frac{dz}{dr} = 0.$$

Рассмотрим поведение этого интеграла в окрестности некоторого радиуса  $r$ . Как и в предыдущем случае, скорость исчезает, если в выражении

$$\left( \frac{dz}{dr} \right)^2 - \left( \frac{dz}{dr} \right)_0^2 + \frac{1}{4} \eta^2 r^2 B_z^2 = 0$$

достигается равенство

$$\left( \frac{dz}{dr} \right)_0 = \frac{\eta}{2\gamma_0} B_z r; \quad \sqrt{\gamma_0^2 - 1} = \frac{\eta}{2c} B_z r,$$

что даст в пересчёте на потенциал

$$\phi_0 \approx 44 B_z^2 [\text{кгс}] \cdot r_{\text{cp}}^2 [\text{см}] [\text{кВ}]. \quad (15a)$$

Например, для  $B_z = 1$  кгс.  $r = 1$  см, получим  $\phi_0 \approx 44$  кв, т.е. порядок запирающего напряжения такой же, как и в предыдущем случае.

#### IV. Участок с переменным магнитным полем $\frac{\partial B_z}{\partial z} \neq 0$

Рассмотрим движение одной частицы в переменном магнитном поле при задании распределения индукции на оси ускорителя функцией:

$$B_z = B_0 \frac{1 + th \omega z}{2} = B_0 \frac{1 + th \xi}{2}. \quad (16)$$

Здесь  $\omega = \frac{\lambda}{D}$  - параметр,  $D$  - диаметр входного отверстия,  $\lambda$  - постоянная, определяемая геометрией системы. Параксиальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2 r}{d\xi^2} + \nu^2 \left( \frac{1 + th \xi}{2} \right)^2 r = 0; \quad \nu^2 = \frac{\eta^2 B_0^2}{4c^2 \omega^2 (\gamma^2 - 1)}. \quad (17)$$

Если  $x = th \xi$ , то уравнение примет вид:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 r}{dx^2} - 2x \frac{dr}{dx} + k^2 \frac{1+x}{1-x} r = 0, \quad k^2 = \frac{\nu^2}{4}. \quad (17a)$$

Мы видим, что в районе  $x \approx 0$ , где происходит максимальное изменение индукции, движение определяется опять-таки функциями Лежандра. Если же положить

$$x = \int \frac{1 + th \xi}{2} d\xi = \frac{1}{2} \ln(\ell^{2\xi} + 1), \quad 0 \leq x \leq \infty$$

$$y = \theta \cdot r, \quad \theta = \sqrt{1 - e^{-2x}}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad \text{то} \quad (17b)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\nu^2 - 1 + \frac{1}{\theta^4}) y = 0.$$

Коэффициент при  $y$  имеет значение

$$\nu^2 - 1 + \frac{1}{\theta^4} \geq \nu^2,$$

причём знак равенства быстро достигается. Поэтому можно утверждать, что на конце интервала изменения  $x$  решения ведут себя как простые тригонометрические функции.

Для более точного определения поведения решений можно, например, поступить следующим образом. В уравнении (17а) разбить коэффициент при  $r$  :

$$(k^2 + 2k^2 \frac{x}{1-x})r ,$$

и второе слагаемое перенести в правую часть. Тогда слева получится уравнение Лежандра в стандартной форме, с решениями которого можно составить интегральное уравнение типа Вольтерра. Для наших целей достаточно рассмотреть эту задачу качественно.

В уравнении (17в) за независимую переменную можно взять  $\theta$  . Если вернуться к  $r$  , то можно написать

$$\theta(\theta^2 - 1)^2 \frac{d^2 r}{d\theta^2} + (\theta^2 - 1)(3\theta^2 - 1) \frac{dr}{d\theta} + \nu^2 \theta^3 r = 0. \quad (17c)$$

Для  $\nu^2 = 1$  это - уравнение Лежандра для функций конуса степени  $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$  , причём решения даются в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\theta^2 - 1}} R_\lambda \left( \frac{1 + \theta^2}{1 - \theta^2} \right).$$

Как видно, аргумент функций меняется в пределах

$$1 < \frac{1 + \theta^2}{1 - \theta^2} < \infty$$

и согласно общей теории функции имеют бесконечное множество нулей. Первый нуль функции  $R_\lambda$  , однако, находится довольно далеко за пределами переходного участка.

Если в качестве независимой переменной в уравнении (17с) взять

$$r = \frac{1 + \theta^2}{1 - \theta^2}$$

или для перехода к гипергеометрическому уравнению

$$t = \frac{r+1}{2}, \quad 1 < t < \infty$$

и далее  $r = (r+1)^a y, a = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-\nu^2})$ , то из (17с) получим

$$t(t-1) \frac{d^2 y}{dt^2} + [(2 + \sqrt{1-\nu^2})t + (1 + \sqrt{1-\nu^2})] \frac{dy}{dt} + \frac{1 + \sqrt{1-\nu^2}}{2} y = 0. \quad (17д)$$

Обозначив параметры полученного уравнения через  $a, b, c$ , получаем:

$$a, b = \frac{1 + \sqrt{1-\nu^2}}{2} \pm i \frac{\nu}{2}, \quad c = 1 + \sqrt{1-\nu^2}.$$

Отсюда видно, что если  $\nu^2 < 1$ , то уравнение удовлетворяется функциями конуса, причём даже при  $\nu^2 = 1$  фокусирующий эффект мал. Если же  $\nu^2 > 1$ , то в трансформации

$$r = (r+1)^a y$$

появляется мнимый показатель, т.е. новые колебания. Поскольку при неизменных остальных параметрах  $\nu^2 \equiv \frac{k}{\gamma^2 - 1}$ , то условие  $\nu^2 \leq 1$  определит верхний предел для  $\gamma = \gamma_8$ . Если  $\gamma > \gamma_8$ , то переходной участок "прозрачен" для пучка, фокусирующий эффект мал. С другой стороны, входная скорость должна быть больше скорости запираания. Поэтому можно построить рабочий график, где указана полоса, внутри которой следует выбрать рабочее напряжение.

На рис. 4 дается пример такого графика применительно к параметрам ускорителя СИЛУНД. Средняя кривая дает рабочее напряжение, нижняя определяется напряжением запираания, а верхняя - фокусирующим действием переходного участка в зависимости от протяженности поля.

Авторы выражают благодарность Ю.С. Дерендяеву и Ю.Л. Обухову за полезные дискуссии, а также И. Золиной и Н. Филипповой за проведенные численные расчёты.

## Литература

1. Г. Брук. "Циклические ускорители заряженных частиц". Атомиздат, М, 1970 г.
2. В. Глазер. "Основы электронной оптики". ГИТТЛ, Москва, 1957 г.
3. Э. Камке. "Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям". Наука, Москва, 1965 г.
4. М.И. Журина, Л.Н. Кармазина. Таблицы функций Лежандра. Изд. АН СССР, Москва, 1962 г.

Рукопись поступила в издательский отдел

8 сентября 1971 года.

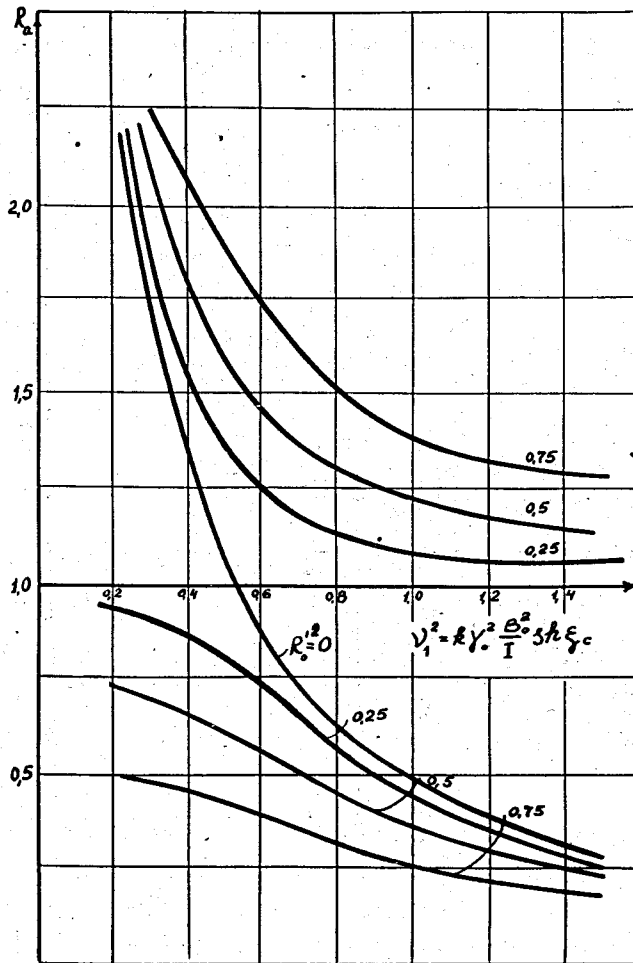


Рис. 1. Амплитуды колебаний пучка при нулевом фазовом объеме.

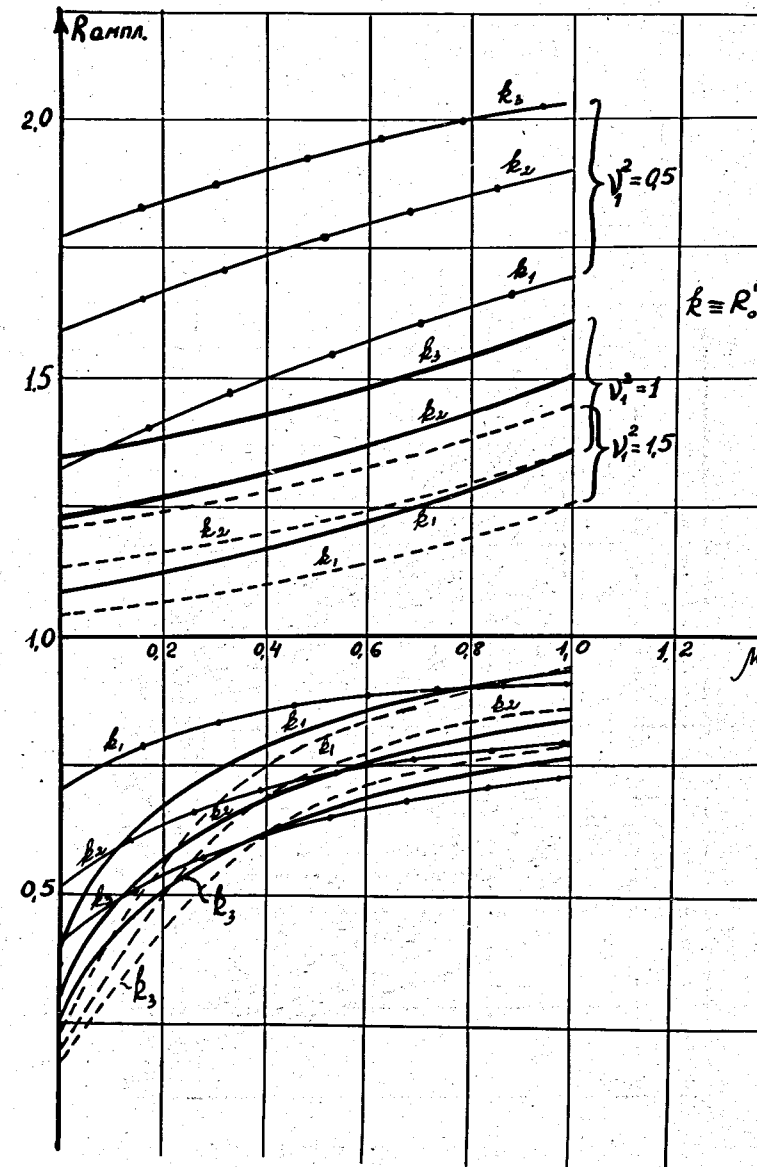


Рис. 2. Амплитуды колебаний в зависимости от величины фазового

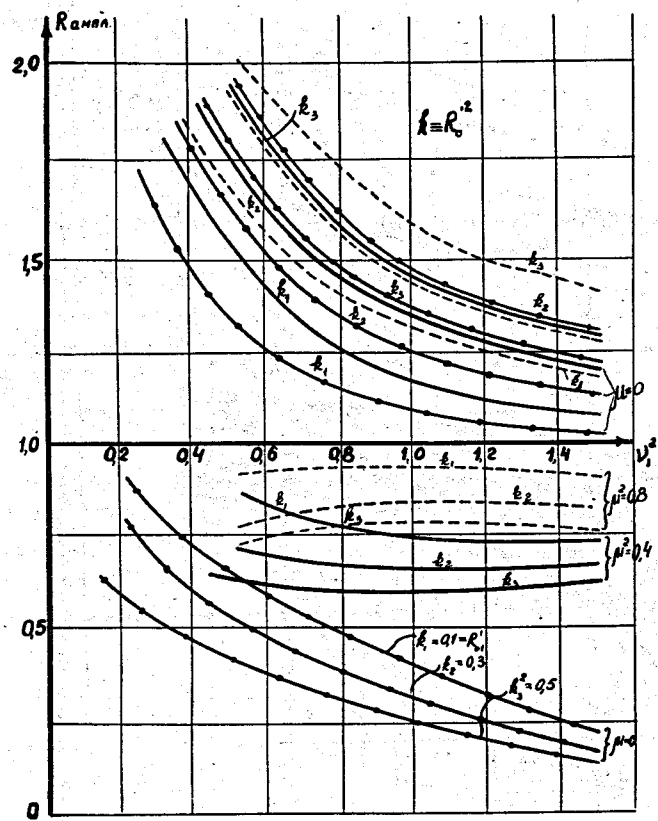


Рис. 3. Амплитуды колебаний в зависимости от  $v_1^2$ .

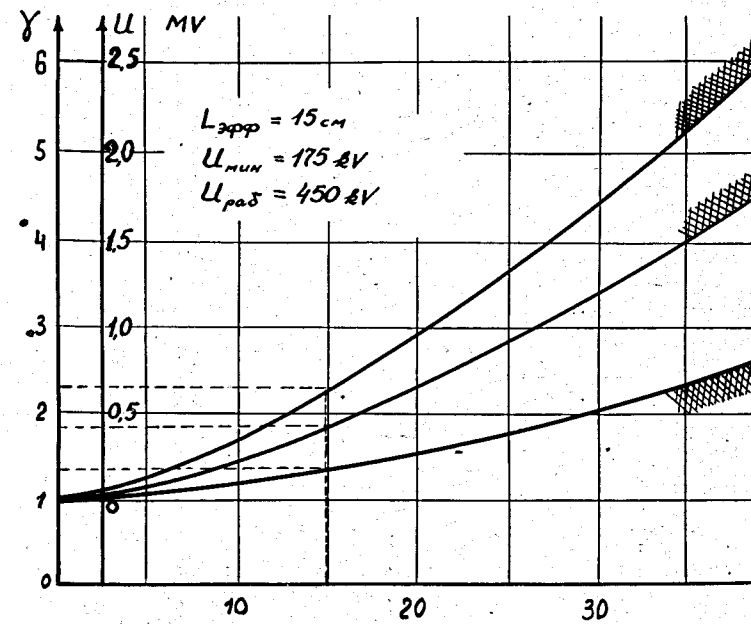


Рис. 4. Кривые выбора параметров системы.