

Б-817

2/кн-71

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

2633/2-71

P9 - 5857



А.Г. Бонч-Осмоловский, Ю.С. Суровцев

О СТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ  
ЗАРЯЖЕННОГО САМОФОКУСИРУЮЩЕГОСЯ  
ПУЧКА С БОЛЬШИМ ТОКОМ

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

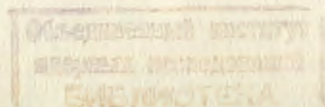
1971

P9 - 5857

**А.Г. Бонч-Осмоловский, Ю.С. Суровцев**

**О СТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ  
ЗАРЯЖЕННОГО САМОФОКУСИРУЮЩЕГОСЯ  
ПУЧКА С БОЛЬШИМ ТОКОМ**

*Направлено в ЖТФ*





1. Со времени опубликования работы Беннета<sup>/1/</sup> много внимания уделялось проблеме так называемого линейного пинча, т.е. самофокусирующегося релятивистского электронно-ионного пучка с весьма большим током. Упомянем здесь лишь наиболее важные работы Альвфена<sup>/2/</sup>, Будкера<sup>/3/</sup>, Линхарта<sup>/4/</sup> и более поздние Яркового<sup>/5/</sup>, Хаммера и Ростера<sup>/6/</sup>.

Интерес к этим образованиям особенно возрос в последнее время в связи с экспериментами с сильноточными электронно-ионными пучками.

В перечисленных выше работах были предложены или обсуждались различные модели стационарных состояний самофокусирующихся пучков, причем общей чертой для них (за исключением<sup>/5/</sup>) является несамосогласованное рассмотрение ионного компонента в виде некоторого компенсирующего неподвижного фона. Это приводит фактически к ограничению самосогласованных решений классом "подобных" распределений, когда  $n_i = f n_e$ , где  $f$  - некоторая постоянная, не зависящая от координат,  $n_i$  и  $n_e$  - плотности соответственно ионного и электронного компонентов пучка.

Такой подход представляется оправданным, если речь идет о характерных временах существования стационарных состояний, меньших периода ионных колебаний в образующейся в пучке потенциальной яме для ионов, или о квазинейтральных состояниях. Между тем, период колебаний ионов

$$T_i \approx \frac{a}{c} \sqrt{\frac{m_i}{m_e \nu_0 (1-f)}}$$

где  $a$  — поперечный размер пучка,  $\nu_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} n_0$  — погонный электрон, при  $\nu_0 \geq 1$  и  $f < 1$   $T_i$  составляет  $10^{-8}$  —  $10^{-9}$  сек, что значительно меньше времен существования, представляющих практический интерес. Поэтому, следуя модели, предложенной Ярковым<sup>/5/</sup> (рассмотренной им подробно при  $\nu_0 \ll 1$ ), мы изучим ниже некоторые свойства заряженных пучков при учёте колебаний ионов в рамках задачи с самосогласованным полем.

2. Пусть в системе координат  $r, \theta, z$  существует электронно-ионный пучок, однородный по  $z$  и  $\theta$  с произвольным пока числом частиц на единицу длины. Найдем самосогласованные поля, т.е. будем искать совместные решения уравнений Максвелла и кинетического бесстолкновительного уравнения. Решение последнего является произвольной интегрируемой по импульсам функцией от интегралов движения: гамильтониана  $H$ , момента обобщенного азимутального импульса  $M_\theta$  и обобщенного импульса  $P_z$ . Эту функцию мы выберем в виде<sup>/5/</sup> (для простоты положим  $m_e = c = e = 1$ ):

$$f_{e,i} = \frac{\kappa_{e,i}^2}{8\pi^2} \delta(H^{(e,i)} - H_{e,i}) \delta(P_z^{(e,i)} - P_{z,e,i}). \quad (1)$$

Будем рассматривать лишь поля, создаваемые пучком  $\{\vec{A}\} = (0, 0, A_z)$ . Гамильтониан частицы в самосогласованном поле имеет вид

$$H^{(e,i)} = \sqrt{m_{e,i}^2 + P_r^2 + \frac{1}{r^2} M_\theta^2 + (P_z^{(e,i)} \pm A_z)^2} \mp \phi, \quad (2)$$

здесь значки "e" и "i" относятся соответственно к электрону и иону:

$$P_r = p_r, \quad \frac{1}{r} M_\theta = p_\theta, \quad P_z^{(e,i)} = p_z \mp A_z,$$

где  $p_r, p_\theta, p_z$  — компоненты импульса частицы.

Самосогласованные потенциалы  $\phi$  и  $\mathbf{A}_z$  удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta \phi = -4\pi(\rho_e + \rho_i), \quad (3)$$

$$\Delta \mathbf{A}_z = -4\pi(j_{ze} + j_{zi}),$$

где плотности заряда и тока определяются формулами

$$\rho_{e,i} = \mp \int f_{e,i} \frac{1}{r} dM_\theta dP_r dP_z^{(e,i)},$$

$$j_{ze,i} = \mp \int v_z^{(e,i)} f_{e,i} \frac{1}{r} dM_\theta dP_r dP_z^{(e,i)},$$

$v_z - z$  - компонента скорости частицы. После интегрирования имеем:

$$\rho_{e,i} = \mp \frac{\kappa_{e,i}^2}{4\pi} (H_{e,i} \pm \phi) \sigma[(H_{e,i} \pm \phi)^2 - (P_{ze,i} \pm A_z)^2 - m_{e,i}^2],$$

$$j_{ze,i} = \mp \frac{\kappa_{e,i}^2}{4\pi} (P_{ze,i} \pm A_z) \sigma[(H_{e,i} \pm \phi)^2 - (P_{ze,i} \pm A_z)^2 - m_{e,i}^2]. \quad (4)$$

В дальнейшем будем исследовать частное решение (3)-(4) с совпадающими границами электронного и ионного компонентов пучка.

Введем среднеквадратичный разброс поперечного импульса электронов  $p_\perp^2 = p_r^2 + p_\theta^2$  ( $x = \frac{r}{a}$ ):

$$\epsilon_\perp^2(x) = \langle (p_\perp - \langle p_\perp \rangle)^2 \rangle = \langle p_\perp^2 \rangle = [H_e + \phi(x)]^2 - [P_{ze} + A_z(x)]^2 - 1. \quad (5)$$

Аналогичное выражение можно написать для ионов.

На границе пучка (см. (4)) разброс поперечного импульса равен нулю; это обстоятельство связывает величины интегралов движения  $H_0, H_1, P_{z0}, P_{z1}$ , оставляя произвольными два из них, например,  $H_0$  и  $H_1$ . Таким образом, состояние пучка определяется набором параметров  $v_0, f, H_0, H_1$ .

Кроме этого, в дальнейшем будем рассматривать и другой набор параметров  $v_0, f, \gamma_{max}, H_1$ , где  $\gamma_{max} = (H_0 + \phi)_{max}$  определяет максимальную кинетическую энергию электронов в пучке, равную работе поля, затраченной при создании пучка.

Пределы изменения степени нейтрализации  $f$  установим из условия существования стационарного состояния, которое определяется требованием, чтобы сила Лоренца, действующая на частицы на границе пучка, была направлена внутрь последнего:

$$F_x^{0,1}(x)|_{x=1} = \frac{1}{2[H_{0,1} \pm \phi(x)]} \frac{d}{dx} \epsilon^{2,1}(x)|_{x=1} \leq 0. \quad (6)$$

3. Анализ уравнений Максвелла совместно с выражениями для плотностей заряда и тока (4) показывает, что существует 2 класса возможных решений для потенциалов и, соответственно, два типа стационарного состояния пучка в зависимости от того, обращается  $\epsilon^2(x)$  (см. (5)) в нуль во внутренней области пучка или нет. Эти две возможности мы рассмотрим отдельно.

#### Сплошной пучок

Будем предполагать, что  $\epsilon^2(x) \neq 0$  при  $x < 1$ . Тогда решения для потенциалов поля имеют вид:

$$\phi(x) = \frac{\kappa_0^2 H_0 - \kappa_1^2 H_1}{\kappa_0^2 + \kappa_1^2} [I_0(\lambda x) - 1], \quad (8)$$

$$A_x(x) = \frac{\kappa_0^2 P_{x0} - \kappa_1^2 P_{x1}}{\kappa_0^2 + \kappa_1^2} [I_0(\lambda x) - 1], \quad (9)$$

где  $\lambda^2 = a^2 (\kappa_0^2 + \kappa_1^2)$ ,  $x = \frac{r}{a}$ . Считая заданными линейные плотности, получаем уравнения для определения  $\kappa_0^2$ ,  $\kappa_1^2$ ;

$$\nu_0 \kappa_1^2 + \nu_1 \kappa_0^2 = a^2 \kappa_0^2 \kappa_1^2 \frac{H_0 + H_1}{4}, \quad (10)$$

$$\nu_0 - \nu_1 = \frac{a^2}{2} (\kappa_0^2 H_0 - \kappa_1^2 H_1) \frac{I_1(\lambda)}{\lambda}. \quad (11)$$

Дальнейший анализ проведем при следующих предположениях:

$$a) \quad H_1 \gg H_0, \quad H_1 \gg \phi. \quad (12)$$

Тогда нетрудно показать, что  $\kappa_0^2 \gg \kappa_1^2$ ,  $f \gg \frac{\kappa_1^2}{\kappa_0^2}$ .

$$b) \quad P_{x0} \gg \frac{\kappa_1^2}{\kappa_0^2} P_{x1}.$$

Это предположение при учёте а) означает, что ионный ток пренебрежимо мал по сравнению с электронным. Тогда для полного тока пучка, пользуясь формулами (4) и (9), получаем:

$$J = \frac{1}{2} P_{x0} \lambda I_1(\lambda). \quad (13)$$

(Здесь единица измерения тока равна  $\frac{mc^3}{e} = 17000 \text{ а}$ ).

Уравнения (10) и (11) упрощаются:

$$\nu_1 = a^2 \kappa_1^2 \frac{H_1}{4}, \quad (14)$$

$$\lambda^2 = \frac{2\nu_0}{H_0} \left[ 2f + (1-f) \frac{\lambda}{I_1(\lambda)} \right].$$

Верхний предел нейтрализации определяется условием обращения в нуль силы, действующей на ионы на границе пучка. Оказывается, что для нерелятивистских ионов  $(H_1 - m_1 \ll m_1)$  и  $v_0 \gg 1$ :

$$f_{max} \approx 1 + 0 \left( \frac{H_0}{H_1} \sqrt{\frac{H_0}{v_0}} \right). \quad (15)$$

Вблизи  $f \approx f_{max}$  свойства пучка весьма близки к описанным в работе /6/. В частности, при  $f \lesssim f_{max}$   $\lambda = \sqrt{\frac{4v_0}{\gamma_0}} f$  и свойства пучка таковы:

$$\frac{\gamma_{max}}{\gamma_0} \approx 1 + \sqrt{\frac{v_0}{\gamma_0}} \frac{1-f}{\sqrt{f}},$$

$$i_x(x) \approx i_x(0) I_0 \left( \sqrt{\frac{4v_0}{\gamma_0}} f x \right), \quad (16)$$

$$\langle v_x(x) \rangle \approx v_x(0) I_0 \left( \sqrt{\frac{4v_0}{\gamma_0}} f x \right),$$

$$J \approx \beta_0 \sqrt{\gamma_0 v_0} f.$$

Поперечный разброс  $\epsilon_0^2(x)$  при  $f = f_{max}$  максимален в центре пучка и плавно уменьшается к границе.

При  $f \leq 1$  максимум  $\epsilon_0^2(x)$  смещается в область  $x > 0$  и соответственно в центре пучка образуется минимум  $\epsilon_0^2$ ; по мере уменьшения  $f$  точка максимума  $\epsilon_0^2$  приближается к границе пучка с одновременным уменьшением  $\epsilon_0^2$  в центре пучка. При некоторой нейтрализации  $f = f_1^*$   $\epsilon_0^2|_{x=0} = 0$ . Это значение  $f_1^*$  нетрудно найти, используя полученные решения (8), (9) и (14):

$$f_1^* = \frac{\lambda}{I_1(\lambda)} \cdot \frac{I_0(\lambda) + 1}{2H_0 [H_0 I_0(\lambda) + \sqrt{(H_0^2 - 1) I_0^2(\lambda) + 1}] - [2 - \frac{\lambda}{I_1(\lambda)}] [I_0(\lambda) + 1]}. \quad (16)$$



При  $\lambda \ll 1$  ( $\nu_0 \ll 1$ ) формула (16) дает обычный результат

$$f_1^* = f_{min} = \frac{1}{H_0^2} = \frac{1}{\gamma_0^2}.$$

Другой предельный случай соответствует достаточно большим  $\lambda$ , так что  $I_0(\lambda) \approx I_1(\lambda) \gg \lambda$  ( $\frac{\nu_0}{\gamma_0} \gg 1$ ); при этом  $\lambda \approx \ln \frac{2\nu_0}{\gamma_0 \beta_0}$ ,  $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{H_0^2}} > 0$  и

$$f_1^* = \frac{\ln^2 \frac{2\nu_0}{\gamma_0 \beta_0}}{4\nu_0 \gamma_0 (1 + \beta_0)}. \quad (17)$$

Для второго набора параметров ( $\gamma_{max}$  вместо  $H_0$ )  $f_2^*$  определяется формулой:

$$f_2^* = \frac{\lambda}{I_1(\lambda)} \cdot \frac{I_0(\lambda) [I_0(\lambda) + 1]}{2\gamma_{max} [\gamma_{max} + \sqrt{\gamma_{max}^2 - 1 + I_0^2(\lambda)}] + [\lambda \frac{I_0(\lambda)}{I_1(\lambda)} - 2][I_0(\lambda) + 1]}. \quad (18)$$

При малых  $\nu_0$  снова получаем  $f_2^* = f_{min} = \frac{1}{\gamma_{max}^2}$ , при

$$I_0(\lambda) \approx I_1(\lambda) \gg \gamma_{max} (\nu_0 \gg 1):$$

$$\lambda \approx \sqrt{(\gamma_{max} - 1)^2 + 4\nu_0} - (\gamma_{max} - 1).$$

Тогда

$$f_2^* = \frac{1}{4\nu_0} [\sqrt{(\gamma_{max} - 1)^2 + 4\nu_0} - (\gamma_{max} - 1)]^2. \quad (18')$$

Если задается  $H_0$ , то при больших  $\nu_0$  для первого набора параметров получается сильно релятивистский пучок ( $\gamma|_{x=1} \approx 2\nu_0$ ), поэтому минимальная нейтрализация (17) значительно меньше значения для второ-

го набора параметров (см. (18)). Например, для  $\nu_0 = 30$ ,  $N_0 = 2$  формула (17) дает  $f_1^* \approx 0,024$ , а при  $\gamma_{max} = 2$  и  $\nu_0 = 30$  из (18) следует  $f_2^* \approx 0,83$ . Свойства сильно релятивистских пучков вблизи  $f^*$  резко отличаются от почти нейтральных пучков при  $\nu_0 \gg 1$ : кинетическая энергия электронов, плотности заряда и тока существенно меняются по сечению пучка. Например, для  $N_0 = const$  эти величины пропорциональны  $I_0(\lambda x)$ , а продольная скорость электронов  $\langle v_z(x) \rangle = \frac{j_{ze}(x)}{\rho_e(x)} \approx const$ . Полный ток в пучке в этом случае равен  $J = \beta_0 \nu_0$ . Отметим, что принятые ранее условия а) в рассмотренных предельных случаях означают:

$$\gamma|_{x=1} \ll \frac{m_1}{m_0} . \quad (19)$$

Если вычислить силу на поверхности пучка в условиях минимальной нейтрализации, то оказывается, что она конечна и отрицательна. Это обстоятельство, а также то, что при  $f = f^*$   $\epsilon^2(0) = 0$ , ставит вопрос о возможности существования, в рассматриваемой модели, трубчатого состояния пучка при отсутствии зарядов в центральной области.

### Трубчатый пучок

В используемой модели с функцией распределения (1) трубчатое состояние может существовать только с совпадающими внутренними границами обоих компонентов, так как нетрудно показать, что в случае несовпадения границ на одной из них (с большим радиусом) не могут выполняться необходимые условия равновесия.

Пусть радиус внутренней, свободной от зарядов, области пучка равен  $d$ ,  $0 \leq d \leq 1$ , тогда решения уравнений (3), (4) при граничных условиях равенства нулю потенциалов и их нормальных производных при  $x = d$  таковы:

$$\phi(x) = \frac{2\nu_0(1-f)}{\lambda d \Delta'(1,d)} [\lambda d \Delta(x,d) - 1], \quad (20)$$

$$A_z(x) = P_{z0} [\lambda d \Delta(x,d) - 1],$$

где  $\Delta(x,d) = K_0(\lambda x) I_1(\lambda d) + I_0(\lambda x) K_1(\lambda d),$

$$\Delta'(1,d) = \frac{d}{dx} \Delta(x,d) \Big|_{x=1}.$$

При получении (20) использованы условия а) и б), при этом

$$\nu_1 \approx \frac{a^2 \kappa^2}{4} (1-d^2) H_1, \quad (21)$$

$$\lambda^2 = \frac{2\nu_0}{H_0} \left[ \frac{2f}{1-d^2} + \frac{\lambda(1-f)}{d \Delta'(1,d)} \right].$$

Для второго набора параметров в полученных формулах

$$H_0 + \phi \Big|_{x=1} = \gamma_{max} = \text{const}.$$

Условиями существования стационарного состояния пучка являются, как и прежде, обращение в нуль разбросов поперечного импульса электронов и ионов на обеих границах и неположительность нормальной составляющей силы Лоренца на внешней границе. Для обсуждаемой модели пучка с резкими границами нормальная составляющая силы Лоренца на внутренней границе всегда равна нулю.

Совместное решение уравнений  $\epsilon_{\bullet}^2 \Big|_{x=d} = \epsilon_{\bullet}^2 \Big|_{x=1} = 0$  и  $\epsilon_{\dot{\bullet}}^2 \Big|_{x=d} = \epsilon_{\dot{\bullet}}^2 \Big|_{x=1} = 0$ , при этом  $P_{x0,1}^2 = H_{0,1}^2 - m_{0,1}^2$ , показывает, что релятивистский (по электронам) пучок существует только при

$$\lambda d \Delta(1, d) = 1,$$

что означает  $d = 1$  и  $\lambda(1-d) = \frac{2\nu_0}{H_0}$ . Таким образом, пучок существует в виде бесконечно тонкой трубки с сингулярными плотностями на границе. Полный ток пучка тогда равен  $J = \beta\nu_0$ . Конечная толщина трубки в рассматриваемом случае возможна лишь для нерелятивистского пучка.

Пределы нейтрализации определяются из обращения в нуль на границе силы, действующей на электроны, - нижний предел и обращения в нуль силы, действующей на ионы - верхний предел. Для  $H_0 = \text{const}$  и  $\gamma_{\text{max}} = \text{const}$  результаты соответственно таковы:

$$\frac{1}{H_0^2} \leq f \leq 1 + \frac{P_{x0} P_{x1}}{H_0 H_1}, \quad (22)$$

$$\frac{1}{\gamma_{\text{max}}^2} \leq f \leq 1 + \frac{P_{x1} \sqrt{\gamma_{\text{max}}^2 - 1}}{H_1 \gamma_{\text{max}}}. \quad (23)$$

Сравнение формул (18) и (23) указывает на то, что трубчатый пучок может существовать при меньших нейтрализациях, чем сплошной пучок, и в этом смысле состояние трубчатого пучка при  $f < f_2^*$  (см. (18)) является продолжением заряженного состояния сплошного пучка. Поэтому можно ожидать, что найденный нижний предел степени нейтрализации (23) правильно характеризует состояние самофокусирующегося релятивистского пучка с максимальным зарядом на единицу длины.

Для случая  $H_0 = \text{const}$  нижний предел нейтрализации для трубчатого состояния (22) лежит выше  $f_1^*$  (см. (17)). Как будто бы возникает парадокс, связанный с тем, что уменьшением нейтрализации нельзя достигнуть предельного стационарного состояния, когда сила, действующая на электроны на внешней границе, равна нулю. На самом деле,

нижний предел нейтрализации (22) не зависит от  $\nu_0$  и определяется для тонкого трубчатого пучка, когда потенциалы  $\phi$  и  $A_x$  практически равны нулю, значением максимальной кинетической энергии электронов  $U_{max}$ . Естественно, что поскольку в предельном состоянии сплошного пучка (17)  $U|_{x=1} \approx 2\nu_0$ , то продолжением состояния пучка в область  $f$ , меньших (17), является трубчатый пучок с  $H_0 > 2\nu_0$ .

Существование двух различных классов состояний заряженного самофокусирующего пучка - сплошного и трубчатого - связано с использованием модели идеально монохроматического пучка при выборе функции распределения частиц в виде (1). Такие функции распределения всегда дают резкие границы пучка (см. (4)) со скачкообразным обращением в нуль на них плотностей заряда и тока. Это приводит, в частности, также к скачкообразному переходу решения сплошного пучка в трубчатое, т.к. при  $d=0$  существует только решение в форме (8)-(9). При  $f > f^*$  оба типа решений существуют независимо.

Процесс вытеснения электронов из внутренней области при  $\nu_0 \gg 1$ , наблюдающийся в решении сплошного пучка при уменьшении нейтрализации, ниже  $f^*$  может быть описан лишь при использовании трубчатого состояния. Это связано с тем, что при  $f=f^*$  плотность электронов обращается в нуль только к одной точке ( $x=0$ ) и в любой малой окрестности принимает конечное значение.

Следует ожидать, что при построении моделей сильноточных релятивистских пучков с функциями распределения, размытыми по интегралам движения, должно существовать единственное решение для стационарного состояния, свойства которого вблизи минимальной нейтрализации близки тем, которые описываются решением для трубчатого пучка, а при увеличении  $f$  - решением для сплошного пучка.

Авторы приносят искреннюю благодарность А.А. Коломенскому, А.Н. Лебедеву и Я.Б. Файнбергу за ценные замечания, В.П. Саранцеву и К.В. Ходатаеву за интерес к работе и обсуждение.



Л и т е р а т у р а

1. W. Bennett. Phys.Rev., 45, 890 (1934); Phys.Rev.,98,1584(1955).
2. H. Alfvén, Phys.Rev., 55, 425 (1939).
3. Г.И. Будкер. АЭ, №5, 9 (1956).
4. J.G. Linhart. "Plasma physics", Amsterdam, 1960.
5. О.И. Ярковой. Препринт ОИЯИ 2180, Дубна, 1965.
6. D. Hammer, N. Rostoker. Phys. of Fluids, 13, 1831 (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел  
9 июня 1971 года.