

С 345М

Р-823

3/2-71

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Р 9-5645

Дубна

1394/2-71



С.Б. Рубин

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

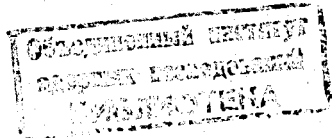
О КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ПЛОСКОГО СИЛЬНОТОЧНОГО
ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО ПУЧКА

1971

P9-5645

С.В. Рубин

О КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ПЛОСКОГО СИЛЬНОТОЧНОГО
ЭЛЕКТРОННО-ИОННОГО ПУЧКА



При теоретическом определении параметров стационарных самосогласованных электронно-ионных пучков большую трудность представляет нахождение их пространственных границ. Поэтому интересно найти простой случай, для которого получается замкнутое решение, не требующее сложных расчётов. В таком решении может оказаться достаточно просто определить как движение отдельных частиц, так и вычислить разные средние характеристики, описывающие пучок как целое.

Хорошим примером, дающим возможность провести полное кинетическое рассмотрение, является неограниченный ионно-электронный слой, в котором в л-системе электроны имеют направленное движение, а ионы совершают около них колебания в поперечном направлении и слабо дрейфуют в продольном. Аналогичный пример в гидродинамическом приближении рассматривался Линхартом и Шохом/1/.

1.

Пусть электроны имеют направленную скорость по оси oy и пусть все переменные (поля, плотности частиц и тока) зависят только от z . В таком пучке компоненты векторного потенциала $A_x = A_z = 0$. Компоненты поля равны

$$E_z = -\frac{\partial \phi(z)}{\partial z}, \quad H_x = -\frac{\partial A_y(z)}{\partial z} \quad (1)$$

и из уравнений движения частиц следует наличие двух интегралов движения:

$$P_0 = \sqrt{m^2 c^2 + P_x^2 + \left(P_y - \frac{e}{c} A_y\right)^2 + P_z^2} + \frac{e}{c} \phi = \text{const}, \quad (2)$$

$$P_y = m \gamma \dot{y} + \frac{e}{c} A_y = \text{const}, \quad (3)$$

где (P_x, P_y, P_z) - обобщенный импульс, P_0 - гамильтониан частицы, $\gamma = [1 - \frac{v^2}{c^2}]^{-1/2}$.

Если взять функцию распределения электронов в виде

$$f = s \delta(P_0 - a) \delta(P_y - Q), \quad (4)$$

где s - нормировочная константа, a, Q - константы, то распределения плотности частиц и токов, вычисленные обычным способом с помощью функции распределения (4), получаются в виде (см. приложение):

$$n = n(z) = 2 \pi s [a - \frac{e}{c} \phi(z)] \sigma(\chi), \quad (5)$$

$$j_x = j_z = 0, \quad j_y = 2 \pi c s [Q - \frac{e}{c} A_y(z)] \sigma(\chi), \quad (6)$$

где $\sigma(\xi)$ - единичная функция и

$$\chi(z) = (a - \frac{e}{c} \phi)^2 - (Q - \frac{e}{c} A_y)^2 - m^2 c^2. \quad (7)$$

Функции распределения вида (4) использовались Капчинским, Морозовым, Ткаличем, Ярковым (см./2/). (4) показывает, что в пучок входят только частицы, имеющие постоянную полную энергию и постоянный обобщенный продольный импульс.

Из (6) видно, что действительно удовлетворяется исходное условие $A_x = A_z = 0$, при котором имеют место интегралы (2), (3). Система уравнений замыкается, если еще добавить уравнения, определяющие потенциалы через плотности тока и заряда, т.е. уравнения Максвелла.

В (5), (6) входит величина $\sigma(\chi)$, показывающая, что слой электронов, вообще говоря, может обрываться при некоторых граничных значениях z , т.е. имеет конечную толщину. Сама величина χ имеет смысл квадрата поперечного кинетического импульса частицы, поэтому

граничное условие (7) означает, что поперечный импульс на границе обращается в нуль, т.е. частица либо после прихода в граничную точку уходит обратно от границы внутрь слоя, либо бесконечно медленно приближается к граничной точке.

Ясно, однако, что для одних только электронов без наличия внешних полей система не имеет решения с границами на конечном расстоянии. Другая ситуация будет, если в слое имеют еще ионы.

Функцию распределения ионов можно также выбрать в форме (4), например с константами \tilde{s} , \tilde{a} , \tilde{Q} . В дальнейшем все величины, относящиеся к ионной компоненте пучка, будут отмечаться знаком "тильда". Тогда для плотности ионов и ионного тока получаются такие же уравнения, как и (5) - (7) (со значками "тильда").

Потенциалы определяются из уравнений

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = -4\pi \left[2\pi s e \left(a - \frac{e}{c} \phi \right) \sigma(\chi) + 2\pi \tilde{s} \tilde{e} \left(\tilde{a} - \frac{\tilde{e}}{c} \phi \right) \sigma(\tilde{\chi}) \right], \quad (8)$$

$$\frac{d^2 A_y}{dz^2} = -\frac{4\pi}{c} \left[2\pi c e s \left(Q - \frac{e}{c} A_y \right) \sigma(\chi) + 2\pi \tilde{s} \tilde{e} \tilde{c} \left(\tilde{Q} - \frac{\tilde{e}}{c} A_y \right) \sigma(\tilde{\chi}) \right]. \quad (9)$$

Можно теперь пытаться искать условия существования единого электронно-ионного слоя с общей границей для электронной и ионной компонент. Пусть его границы (ясно, что слой симметричен относительно плоскости $z=0$) определяются координатами $z = \pm z^*$.

Внутри слоя, т.е. при $-z^* < z < z^*$, уравнения (8), (9) имеют вид:

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} - g \phi = -8\pi^2 (c s a + \tilde{e} \tilde{s} \tilde{a}) \quad (10)$$

$$\frac{d^2 A_y}{dz^2} - g A_y = -8\pi^2 (e s Q + \tilde{e} \tilde{s} \tilde{Q}) \quad (11)$$

$$g = \frac{8\pi}{c} (e^2 s + \tilde{e}^2 \tilde{s}). \quad (12)$$

Вне слоя правая часть в (8), (9) равна нулю, т.к.

$$[\chi(z)]_{|z| > z^*} \equiv 0 \quad \text{и} \quad [\tilde{\chi}(z)]_{|z| > z^*} \equiv 0.$$

После "сшивания" решений на границе с учётом непрерывности потенциалов и их нормальных производных и условий на бесконечности, в которых учитывается, что $H_x(z)$ и $E_z(z)$ по разные стороны от слоя должны иметь противоположные знаки^{x/}, для потенциалов внутри слоя получаются выражения

$$\phi(z) = \frac{c}{\epsilon} \left(\frac{Z \bar{s} \bar{a} - s a}{Z^2 \bar{s} + s} \right) [1 + F(z)] \quad (13)$$

$$A_y(z) = \frac{c}{\epsilon} \left(\frac{Z \bar{s} \bar{Q} - s Q}{Z^2 \bar{s} + s} \right) [1 + F(z)] \quad (14)$$

$$F(z) = \frac{\text{ch}(gz)}{gz \text{ sh}(gz^*) - \text{ch}(gz^*)}, \quad (15)$$

где $\epsilon = |e|$, Z - кратность заряда иона.

Теперь согласно (5), (6), получаются явные выражения для n , j_y и аналогичные выражения для \bar{n} , \bar{j}_y . Таким образом, задача определяется семью параметрами: $a, \bar{a}; Q, \bar{Q}; s, \bar{s}; z^*$. Эти параметры связаны двумя соотношениями

$$\chi(z^*, a, Q, s) = 0, \quad \tilde{\chi}(z^*, \bar{a}, \bar{Q}, \bar{s}) = 0 \quad (16)$$

(в силу симметрии слоя $\chi(z)$, $\tilde{\chi}(z)$ - чётные функции z), т.е. задание 5-и параметров определяет структуру слоя.

^{x/} Если слой в целом нейтрален, то $E(z) = 0$ при $|z| > z^*$.

II.

Удобно ввести более "технические" параметры, например, полное число электронов N и ионов \bar{N} в "единичном элементе слоя", имеющем объем $V = 1 \times 1 \times 2z^* \text{ см}^3$, полные токи электронов $I = -e c \beta_0 N$ и ионов $\bar{I} = e Z c \bar{\beta}_0 \bar{N}$, где $\beta_0, \bar{\beta}_0$ - средние направленные скорости электронов и ионов. Тогда выражения

$$N = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-z^*}^{z^*} n dz \quad (17)$$

$$-e c \beta_0 N = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{-z^*}^{z^*} j_y dz \quad (18)$$

и аналогичные для $\bar{N}, \bar{\beta}_0$ дают связь вновь введенных параметров $N, \bar{N}, \beta_0, \bar{\beta}_0$ со старыми.

Не ограничивая общности, можно выбрать $\bar{\beta}_0 = 0$ и для простоты положить $Z = 1$. Если ввести далее обозначения

$$\mu = \frac{m}{\bar{m}}, \quad k = \frac{\bar{N}}{N}, \quad \xi = \frac{\bar{s}}{s}, \quad (19)$$

то (16) с учётом (7), (12)-(15), (17), (18) приведет к виду:

$$[\xi + k + (1-k)x]^2 - \beta_0^2 (\xi + x)^2 = (gz^*)^2 \left(\frac{g}{2\pi N r_0} \right)^2 \quad (20)$$

$$\left[\frac{\xi + k}{\xi} - (1-k)x \right]^2 - \beta_0^2 (1-x)^2 = (gz^*)^2 \left(\frac{g}{2\pi N r_0 \mu} \right)^2,$$

где еще обозначено $x = gz^* \text{cth}(gz^*)$, r_0 - классический радиус электрона.

Согласно сказанному выше, в (20) входят семь параметров, следовательно, после задания 5 исходных нужно искать решения системы (20) для двух остальных. Удобно за исходный набор принять параметры N, k, ξ, β_0 ($\bar{\beta}_0$ уже ранее было принято равным нулю). Неизвестными тогда оказываются толщина слоя $2z^*$ и параметр g (связанный с s и \bar{s}), для которых при правильном выборе значений исходных параметров должны получиться действительные положительные решения.

Если исключить из (20) величины gz^* и g , то получится квадратное уравнение относительно x .

$$x^2(1-\mu^2)[(1-k)^2 - \beta_0^2] + 2x(\xi + \mu^2)\left[\frac{\xi+k}{\xi}(1-k) - \beta_0^2\right] + (\xi^2 - \mu^2)\left[\left(\frac{\xi+k}{\xi}\right)^2 - \beta_0^2\right] = 0. \quad (21)$$

Оказывается, что для "реального существования слоя" числовые значения исходных параметров должны быть такими, чтобы (21) имело хотя бы один корень, больший единицы. Пусть, например, значение корня есть $x_1 > 0$. Тогда произведение gz^* , оба сомножителя которого по своему физическому смыслу должны быть положительны, определится из решения трансцендентного уравнения

$$x_1 = p \operatorname{cth} p, \quad (22)$$

где $p = gz^*$. Это уравнение имеет нужное решение, если только $x_1 > 1$. Тогда значение g , а, следовательно, затем, наконец, и z^* , определяется после подстановки x_1 и p в одно из уравнений (20):

$$g = \frac{2\pi N \Gamma_0 \mu}{p} \left\{ \left[\frac{\xi+k}{\xi} - (1-k) p \operatorname{cth} p \right]^2 - \beta_0^2 (1-p \operatorname{cth} p)^2 \right\}^{1/2} \quad (23)$$

$$z^* = \frac{p}{g}.$$

После выполнения всей процедуры, если числовые значения параметров оказались допустимыми, получаются следующие выражения для плотностей частиц и токов внутри слоя $-z^* \leq z \leq z^*$

$$n = \frac{N}{2z^*(1+\xi)} \left[k + \xi + (1-k) \frac{p}{\operatorname{sh} p} \operatorname{ch}(gz) \right], \quad (24)$$

$$\bar{n} = \frac{N}{2z^*(1+\xi)} [k+\xi - \xi(1-k) \frac{P}{\text{sh } p} \text{ch}(gz)], \quad (25)$$

$$\bar{j}_y = - \frac{c \in N\beta}{2z^*(1+\xi)} [\xi + \frac{P}{\text{sh } p} \text{ch}(gz)], \quad (26)$$

$$\bar{j}_y = \frac{c \in N\beta_0 \xi}{2z^*(1+\xi)} [1 - \frac{P}{\text{sh } p} \text{ch}(gz)]. \quad (27)$$

Так как в выражения для потенциалов (13), (14) входят величины $a, \bar{a}; Q, \bar{Q}; s, \bar{s}$ (назовем их "кинетическими параметрами"), то для окончательного решения задачи необходимо выразить эти параметры через N, k, ξ, β_0 . Если ввести безразмерные величины

$$\Gamma = \frac{a}{mc}, \quad \bar{\Gamma} = \frac{\bar{a}}{m\bar{c}}, \quad \rho = \frac{Q}{mc}, \quad \bar{\rho} = \frac{\bar{Q}}{m\bar{c}},$$

то с учётом (5), (6), (12)-(15), (17), (18) получится следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \mu\Gamma + \bar{\Gamma} + \frac{(\xi+k)\mu}{\xi\beta_0} \rho + \frac{(\xi+k)\mu}{\xi} \bar{\rho} &= 0 \\ -\mu\Gamma + \xi\bar{\Gamma} + \frac{(k-1)\mu}{\beta_0} \rho - \frac{k-1}{\beta_0} \bar{\rho} &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mu\rho + \bar{\rho} &= - \frac{2\pi\beta_0(1+\xi)N\mu r_0}{pg}, \\ -\mu\rho + \xi\bar{\rho} &= - \frac{2\pi\beta_0(1+\xi)N\mu r_0}{pg} (p^2 - p \text{cth } p). \end{aligned}$$

Детерминант системы $D = \mu^2(1+\xi)^2$ и, таким образом, значения "кинетических параметров" всегда можно найти. Нормировочные коэффициенты функции распределения будут

$$s = \frac{c g^2}{8 \pi^2 \epsilon (1 + \xi)}, \quad \bar{s} = s \xi \quad (29)$$

и окончательные выражения для потенциалов принимают вид:

$$\phi = \frac{2 \pi (1 - k) N \epsilon}{p g} \left[p^2 - p \operatorname{cth} p + p \frac{\operatorname{ch}(g z)}{\operatorname{sh} p} \right], \quad (30)$$

$$A_y = - \frac{2 \pi \beta_0 N \epsilon}{p g} \left[p^2 - p \operatorname{cth} p + p \frac{\operatorname{ch}(g z)}{\operatorname{sh} p} \right]. \quad (31)$$

III.

Как было отмечено выше, основные параметры, вообще говоря, должны лежать в некоторых пределах для того, чтобы получилось реальное решение. То есть можно поставить "вопрос о существовании" подобного стационарного решения.

Используя разложение $\operatorname{cth} p$ на рациональные дроби, уравнение (22) можно записать в виде

$$x_1^{-1} - 1 = 2 p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + n^2 \pi^2}. \quad (32)$$

Отсюда видно, что действительные решения для p возможны, если только $x_1 > 1$.

Ограничимся далее поиском решений, для которых $k = \xi$. Тогда оказывается, что (по крайней мере для $\gamma < \frac{1}{\mu^2}$) существование корня $x_1 > 1$ возможно только, если $1 \geq k \geq \frac{1}{\gamma^2}$ (38), т.е. соответствует будкеровскому условию. Соответствующие решения легко построить. Рассмотрим два конкретных случая.

1) Пусть $k = \xi = \frac{b}{\gamma_0}$, где $\gamma_0 \gg 1$, b - некоторое число, такое, что $1 \leq b \ll \gamma_0$, т.е. заряд электронов в пучке сравнительно слабо компенсирован ионами.

2) Полностью компенсированный пучок: $k = \xi = 1$, $\gamma_0 \gg 1$. В первом случае из (21) получается с точностью до членов порядка $\frac{1}{\gamma_0^2}$, μ^2 и выше $x_1 = 1 + \frac{1}{2b\gamma_0}$ (второй корень оказывается отрицательным и не должен приниматься во внимание). Тогда из (32) имеем $p \approx gz^* = \sqrt{\frac{3}{2b\gamma_0}}$, из (23): $g \approx 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} N r_0 \mu \sqrt{\gamma_0} b$, откуда

$$z^* \approx \frac{p^2}{2\pi\mu N r_0} = \frac{3}{4\pi N r_0 \mu b \gamma_0}.$$

Поэтому для плотностей частиц и токов, учитывая, что $k = \frac{\bar{N}}{N}$ и $k = \xi \ll 1$, находим

$$n \approx \frac{N}{2z^*} \text{ch}(gz), \quad j_y \approx -\frac{c \in N \beta_0}{2z^*} \text{ch}(gz)$$

$$\bar{n} \approx \frac{\bar{N}}{2z^*} [2 - \text{ch}(gz)], \quad \bar{j}_y \approx \frac{c \in \bar{N} \beta}{2z^*} [1 - \text{ch}(gz)].$$

"Кинетические константы" легко находятся из (28).

Для второго случая получается $x_1 \approx 1 + \frac{1}{2\gamma_0^2}$, $p \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\gamma_0}$, $g = 2\pi\sqrt{6} N r_0 \mu \gamma_0$, $z^* \approx \frac{1}{6\pi N r_0 \mu \gamma_0^2}$ (при $N = 10^{14}$ толщина слоя $2z^* \approx \frac{8}{\gamma_0^2}$).

Далее получаем $n = \bar{n} = \frac{N}{2z^*} = \text{const}$

$$j_y \approx -\frac{c \in N \beta_0}{4z^*} (1 + \text{ch}(gz)), \quad \bar{j}_y \approx \frac{c \in N \beta_0}{4z^*} (1 - \text{ch}(gz)).$$

Наконец, для потенциалов и полей имеем:

$$\phi \equiv 0, \quad A_y \approx -\frac{\beta_0 \in}{3 r_0 \mu} \left[\text{ch}(gz) - 1 + \frac{1}{\gamma_0^2} \right]$$

$$H_x \approx 2\pi\sqrt{6} \beta_0 \in N \gamma_0 \text{sh}(gz).$$

IV.

Можно сделать еще следующее замечание. Аналогичное приведенному выше простое рассмотрение применимо к случаю, когда слой ускоряется в поперечном направлении в постоянном поле E . При этом он оказывается поляризованным, однако решение для стационарного состояния и здесь получается с помощью интегралов типа $cP_0 = \text{const}$, $P_y = \text{const}$, которые имеют место, если сделать переход в собственную ускоренную систему координат. В данном случае имеется в виду мёллеровская система координат, см. /3/. Функция распределения типа (4) приводит снова к простым замкнутым выражениям для потенциалов и плотностей.

Однако анализ параметрических зависимостей в данном случае усложняется из-за того, что теперь границы электронного и ионного слоев уже не совпадают.

В заключение отметим, что приведенная работа была выполнена в 1967 году. Однако в настоящее время сильно повысился интерес к теории и эксперименту с сильноточными пучками и появилось много работ на эту тему. Рассмотренное решение может оказаться полезным для изучения вопроса о стационарных состояниях таких пучков, а также как простая исходная модель при рассмотрении вопросов устойчивости.

Приложение

Приведем для удобства ход вычисления, например, компоненты плотности тока j_y . Из обычного соотношения $j_y = e \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(P_x, P_y, P_z; \bar{r}) dP_x dP_y dP_z$, с учётом (2), (3), получим (α , Q - константы):

$$j_y = \text{ces} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_y - \frac{e}{c} A_y(z)}{P_0 - \frac{re}{c} \phi(z)} \delta(\sqrt{m^2 c^2 + P_x^2 + (P_y - \frac{e}{c} A_y)^2 + P_z^2} + \frac{e}{c} \phi - \alpha) \times$$

$$\delta(P_y - Q) dP_x dP_y dP_z = \text{ces} (Q - \frac{e}{c} A_y) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(\sqrt{m^2 c^2 + (Q - \frac{e}{c} A_y)^2 + P_x^2 + P_z^2} + \frac{e}{c} \phi - \alpha)}{\sqrt{m^2 c^2 + (Q - \frac{e}{c} A_y)^2 + P_x^2 + P_z^2}} dP_x dP_z.$$

После замены $P_x = R \cos \theta$, $P_z = R \sin \theta$, $dP_x dP_y = R dR$ имеем:

$$j_y = \text{ces} \left(Q - \frac{e}{c} A_y \right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\delta(\sqrt{B^2(z) + R^2} + \frac{e}{c} \phi(z) - a)}{\sqrt{B^2(z) + R^2}} R dR,$$

где

$$B^2(z) = m^2 c^2 + \left(Q - \frac{e}{c} A_y \right)^2.$$

С учётом обычной формулы преобразования выражения $\delta(f(x))$ имеем:

$$\delta(\sqrt{B^2 + R^2} + \frac{e}{c} \phi - a) = \frac{\delta(R - R_1)}{\left| \frac{R_1}{\sqrt{B^2 + R_1^2}} \right|} + \frac{\delta(R - R_2)}{\left| \frac{R_2}{\sqrt{B^2 + R_2^2}} \right|},$$

где

$$R_{1,2} = \pm \sqrt{\left(a - \frac{e}{c} \phi \right)^2 - B^2}.$$

Так как $R_2 < 0$ и лежит вне области интегрирования, то второй член не дает вклада в интеграл.

Получается

$$j_y = 2\pi \text{ces} \left(Q - \frac{e}{c} A_y \right) \int_0^{\infty} \delta(R - R_1) dR = \begin{cases} 2\pi \text{ces} \left(Q - \frac{e}{c} A_y \right), & \text{если } \left(a - \frac{e}{c} \phi \right)^2 - B^2 > 0 \\ 0, & \text{если } \left(a - \frac{e}{c} \phi \right)^2 - B^2 \leq 0, \end{cases}$$

т.е. с учётом (7),

$$j_y = 2\pi \text{ces} \left(Q - \frac{e}{c} A_y \right) \sigma(\chi).$$

Л и т е р а т у р а .

1. J.C. Linhart, A. Schoch. *Nuclear Instruments and Methods*, 4, 332 (1959).
2. О.И. Ярковой. *ЖТФ* XXXII , 1285 (1962); О.И. Ярковой. *Препринт ОИЯИ*, 2180, Дубна 1965.
3. А.Г. Бонч-Осмоловский, Э.А. Перельштейн, Н.Б. Рубин, С.Б. Рубин, О.И. Ярковой. *Препринт ОИЯИ* 2649-2, Дубна 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел

26 февраля 1971 года.