

3/12-71

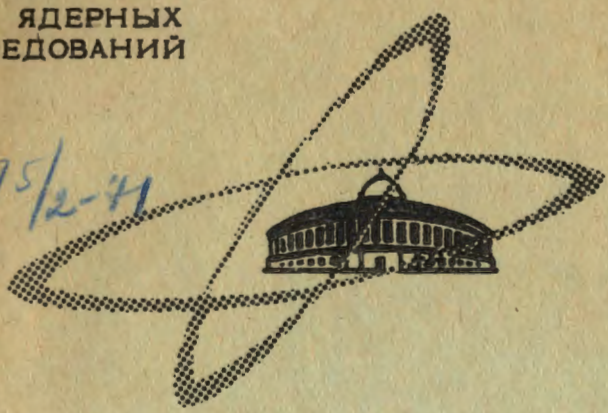
Б-817

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

P9-5622

1395/2-71



А.Г. Бонч-Осмоловский, В.Г. Маханьков,
В.Н. Цытович, Б.Г. Шинов

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ РАЗВИТИЯ
РАДИАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕЦ

1971

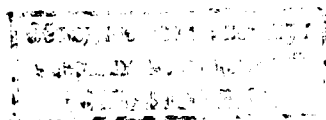
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ
ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

P9-5622

А.Г. Бонч-Осмоловский, В.Г. Маханьков,
В.Н. Цытович, Б.Г. Шинов

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ РАЗВИТИЯ
РАДИАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕЦ

Направлено в "Plasma Physics"



§1. В в е д е н и е

В интенсивно развиваемых сейчас вариантах коллективного метода ускорения ^{/1,2/} используются заряженные кольца релятивистских электронов. Как известно, такие кольца могут быть использованы для ускорения ионов, если они создают достаточно глубокую потенциальную яму пространственного заряда. Эта потенциальная яма увеличивается при увеличении числа электронов, однако с ростом числа увеличивается и электростатическая сила отталкивания электронов. Фактически единственной возможностью ее компенсации являются магнитные силы притяжения параллельно движущихся токов (эффект Беннета), которые достигают величины порядка кулоновских сил расталкивания лишь при релятивистских скоростях частиц. В этом плане использование релятивистских электронов является принципиальным для развиваемых коллективных методов ускорения.

При этом возникает вопрос о том, не существует ли универсальной неустойчивости релятивистских заряженных колец, принципиально связанной с наличием релятивистских электронов? В принципе такая неустойчивость могла бы "разбрасывать" электроны по энергиям и тем самым уменьшать глубину потенциальной ямы, создаваемой кольцом. Действительно, если электроны кольца удерживаются на круговых орбитах внешним магнитным полем, то радиус орбиты каждого из них определяется его энергией, т.е. разброс по энергиям приводит к разбросу по радиу-

сам, а следовательно, кольцо "разбухает" (малый радиус сечения кольца возрастает). Глубина потенциальной ямы обратно пропорциональна малому радиусу кольца $\approx \frac{1}{a}$.

Известно, что кольцевые пучки релятивистских электронов могут интенсивно излучать электромагнитные волны — так называемое синхротронное излучение. Однако наряду с этим возникает и синхротронная неустойчивость^{/3/}, суть которой в общем случае состоит в том, что электроны, образующие кольцо, усиливают электромагнитные волны. Механизм синхротронной неустойчивости несколько различен для волн, меньших малого радиуса $\lambda \ll a$ ^{/4/}, и при обратном неравенстве $\lambda \gg a$ ^{/5/}. В первом случае можно говорить о процессах индуцированно-го синхротронного излучения и поглощения волн независимо отдельными релятивистскими электронами. Баланс этих процессов приводит к лазер-эффекту для синхротронного излучения. Во втором случае фактически все частицы кольца излучают когерентно, и, таким образом, речь идет о когерентной радиационной неустойчивости. Поскольку все частицы одновременно участвуют в развитии неустойчивости, она носит в данном случае гидродинамический характер. По своей природе она близка к неустойчивости отрицательной массы^{/6/}, известной для циклических ускорителей. В действительности так называемый импеданс релятивистского электронного кольца (величина, фигурирующая в теории отрицательной массы^{/6/}) всегда является комплексной величиной. Только мнимая часть этого импеданса учитывается в теории отрицательной массы, так как в обычных ускорителях реальное излучение электромагнитных волн из-за наличия камеры невозможно. Вещественная часть импеданса, описывающая процессы синхротронного излучения (формула Шотта), определяет процессы излучения в условиях, когда кольцо находится далеко

от стенок камеры $x/$. Более того, ясно, что вещественная и мнимая части импеданса неотделимы, т.к. связаны дисперсионным соотношением и обязаны одному и тому же радиационному процессу. Процесс когерентной синхротронной неустойчивости при $\lambda \gg a$ с учётом как действительной, так и мнимой части импеданса будет краткости ради в дальнейшем называться радиационной неустойчивостью. Нужно думать, что именно радиационная неустойчивость, будучи гидродинамической, может представить наибольшую "опасность" для коллективных методов ускорения. Однако ясно, что отделение когерентной части неустойчивости от некогерентной является несколько искусственным (см. также ниже). Строгое рассмотрение промежуточной области приводит к большим математическим трудностям, связанным с необходимостью учёта тонких эффектов структуры распределения электронов по малому радиусу. Предельные же случаи $\lambda \ll a$ и $\lambda \gg a$ допускают сравнительно простой анализ. При $\lambda \gg a$ хорошей аппроксимацией является приближение бесконечно тонкого кольца ^{/5/}. Реально длины волн больше $\lambda_{\min} \approx R \left(\frac{mc^2}{\epsilon} \right)^3 \ll a$ т.е. имеется как когерентная, так и не когерентная неустойчивость. Практически $\lambda \gtrsim a$ выполняется лишь для первых 6-10 гармоник циклотронной частоты. Развитие неустойчивости на этих гармониках в силу ее гидродинамической природы наиболее быстрое. Поэтому представляется оправданным в качестве первого приближения рассмотрение динамики развития неустойчивости первых 10 гармоник в приближении бесконечно тонкого кольца. Решение строго нелинейной задачи численными методами оказывается вполне возможным. Этому и посвящено настоящее исследование.

$x/$ В камерах типа резонатора и прямого волновода возможно синхротронное излучение на отдельной резонансной линии. В дальнейшем мы будем рассматривать более интересный с точки зрения эксперимента случай свободного пространства.

Нужно отметить, что линейная теория радиационной неустойчивости, рассмотренная в ^{/5/}, не может ответить на вопрос о том, насколько опасным с энергетической точки зрения является развитие такой неустойчивости. В принципе возможна нелинейная стабилизация, ограничивающая уровень колебаний (или бунчировку кольца) на весьма низком уровне. Подробная аналитическая нелинейная теория радиационной неустойчивости была развита в ^{/7/}. Однако она либо описывает предельные случаи (вблизи порога или на начальной стадии), либо дает лишь оценку амплитуд полей на нелинейной стадии. Промежуточные режимы, в которых и могла бы возникнуть нелинейная стабилизация, не допускают простых аналитических решений. Последнее связано с гидродинамическим характером неустойчивости и фактическим отсутствием малого параметра в задаче. Нужно думать поэтому, что проводимое здесь решение точной нелинейной задачи (численными методами) позволяет впервые выявить ясную картину развития гидродинамической неустойчивости. Полученные результаты носят более общий характер и легко обобщаются на другие гидродинамические неустойчивости, широко известные в физике плазмы. Одной из существенных проблем гидродинамических неустойчивостей является механизм появления необратимых процессов на нелинейной стадии развития неустойчивости. Настоящий расчёт позволяет выявить и проиллюстрировать возникновение некоторых таких необратимостей. Расчёт подтверждает нелинейные оценки амплитуды полей, развивающихся на нелинейной стадии радиационной неустойчивости, полученные в ^{/7/}, однако возникают численные коэффициенты $\approx 0,1-0,2$, указывающие на то, что фактически поля оказываются несколько меньшими. Ввиду отсутствия малого параметра такие численные коэффициенты удастся выявить лишь с помощью численных расчётов. Поскольку в дальнейшем необходимо сопоставление численных расчётов с аналитическими, развитыми для линейной стадии в ^{/5/}, а нелинейной в ^{/7/}, необходимо дать краткое резюме этих результатов.

§2. Результаты аналитических теорий

При построении теории используются малые параметры

$$\frac{a}{R} \ll 1 \quad \text{и} \quad v/\gamma \ll 1, \quad (1)$$

где a и R - малый и большой радиусы электронного кольца, $v = \frac{e^2}{mc^2}$.

$\frac{N}{2\pi R}$ - погонный электрон, N - полное число частиц в кольце, γ - релятивистский фактор азимутального движения электронов. Точная нелинейная задача сводится к одномерной в фазовом пространстве θ ,

ω - азимутального угла и соответствующего обобщенного импульса.

При этом рассматриваются только продольные (вдоль движения) возмущения и связь поперечного движения с продольным пренебрегается. Условие когерентности может быть записано для азимутального номера гармоники возмущения:

$$n \ll R/a. \quad (2)$$

В линейном приближении неустойчивость имеет порог, связанный с затуханием Ландау; соответствующее пороговое значение разброса частот обращения частиц в пучке равно

$$\Delta\omega_{kp} \approx \bar{\omega} n^{-1/3} \sqrt{v/\gamma}, \quad \bar{\omega} \approx \frac{c}{R}. \quad (3)$$

Если начальный разброс в пучке гораздо меньше $\Delta\omega_{kp}$, то гидродинамический инкремент неустойчивости имеет вид:

$$\gamma_n \approx \bar{\omega} n^{2/3} \sqrt{v/\gamma}. \quad (4)$$

Вблизи же порога

$$\gamma_n \approx n (\Delta\omega - \Delta\omega_{kp}). \quad (5)$$

Можно предположить, что в процессе развития неустойчивости в результате нарастания электромагнитных полей возмущения энергетический разброс частиц в пучке возрастает, и пучок эволюционирует до разброса (3).

Процесс эволюции, характерные времена, уровни возбуждаемых электромагнитных полей, характеристики конечного состояния пучка описываются в рамках нелинейной теории, учитывающей взаимодействие гармоник полей возмущения между собой. Аналитические решения, найденные в ^{17/}, соответствуют двум предельным случаям: монохроматического пучка $\Delta\omega \ll \Delta\omega_{кр}$ и пучка вблизи порога $\Delta\omega \lesssim \Delta\omega_{кр}$.

В первом случае, когда на всей рассматриваемой стадии процесса

$$\Delta\omega \ll \Delta\omega_{кр}, \quad (6)$$

можно применить метод усреднения основных характеристик пучка по орбите, используя первые моменты функции распределения. Такой подход позволяет оценить только темп развития неустойчивости, уровни возбуждаемых полей и потери направленной энергии пучка на начальной стадии развития неустойчивости.

Характерное время процесса равно по порядку величины

$$\Delta t \approx \frac{1}{\gamma_n} \ln \left[\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_{кр}} \cdot \frac{N}{\Delta n} \right]. \quad (7)$$

Здесь N - полное число частиц в пучке, Δn - начальная флюктуация линейной плотности ($\times 2\pi R$) частиц и все величины берутся при $n \approx n_{max}$.

Амплитуда поля наиболее неустойчивой гармоники с $n \approx n_{max}$ может быть оценена следующим образом:

$$\xi_n \approx \frac{n^{1/3} mc^2 \nu}{eR} \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_{кр}} \right). \quad (8)$$

И, наконец, относительная потеря средней энергии направленного движения такова:

$$\frac{\Delta H}{H} \approx \frac{1}{n^{1/3}} (\nu/\gamma)^{1/2} \left(\frac{\Delta \omega}{\Delta \omega_{кр}} \right)^2. \quad (9)$$

Из последней формулы вытекает, что по крайней мере на гидродинамической стадии развития неустойчивости изменение средней направленной энергии пучка незначительно.

Развивая аппарат одномодового приближения в условиях, когда $\Delta \omega \ll \Delta \omega_{кр}$, можно получить более точные уравнения для изменения полей возмущения во времени, а также уравнение, описывающее трансформацию начальной функции распределения. В частности, показано /7/, что до тех пор, пока применимо условие (6), изменение функции распределения не влияет на величину инкремента неустойчивости, равного гидродинамическому (4).

Во втором случае ($\Delta \omega \lesssim \Delta \bar{\omega}_{кр}$) система находится в условиях квазистационарного режима, т.е. инкремент значительно меньше частоты колебаний

$$\gamma_n \ll \text{Re } \Omega - n \bar{\omega}. \quad (10)$$

Это позволяет в общем аппарате разложения нелинейного взаимодействия по амплитуде колебаний получить ряд количественных выводов. Для энергии околороговой моды колебаний можно получить, учитывая лишь эффект самодействия этой моды, простое дифференциальное уравнение, которое может в принципе описывать взрывную неустойчивость данной моды, либо давать верхнюю границу энергии колебаний. Для амплитуды поля колебаний следует оценка

$$\xi_n \approx n^{1/3} \frac{m c^2 \nu}{e R} \cdot \sqrt{1 - \frac{\Delta \omega}{\Delta \omega_{кр}}}. \quad (11)$$

Здесь $\Delta \omega \lesssim \omega_{кр}$, n - номер околороговой моды.

Был проведен учёт корреляционного уширения резонансов путем частичного суммирования рядов теории возмущений и показано, что в условиях, когда в начальном состоянии в системе имеется определенный уровень возбужденных колебаний, инкремент неустойчивости существенно уменьшается. Построение полной картины развития неустойчивости во времени с учётом нелинейных взаимодействий затруднено, что фактически связано с отсутствием малого параметра в наиболее интересном промежуточном режиме. Именно в этой области нелинейное взаимодействие гармоник не является малым и имеет тот же порядок, что и линейное их нарастание. Сравнивая (8) и (11), видим, что эта область характеризуется значением амплитуд возбуждаемых полей, полученных путем экстраполяции предельных выражений

$$\xi_n \lesssim \frac{m c^2 \nu}{e R} n^{1/3} . \quad (12)$$

Фактически, как отмечалось выше, численный расчёт приводит к несколько меньшим значениям ξ_n .

§3. Постановка задачи численного исследования неустойчивости

Нелинейные уравнения, описывающие изменение во времени гармоник возмущения, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} + i n a w \psi_n + \sum_{n_1} \sigma_{n-n_1} \frac{\partial \psi_{n_1}}{\partial w} \int \psi_{n-n_1}(w_1) dw_1 = 0 . \quad (13)$$

Здесь ψ_n — гармоника функции распределения, причем $\int \psi_n dw = n_n 2\pi R$, n_n — флуктуация линейной плотности числа частиц в пучке. По определению, σ_n связывает гармонику электрического поля возмущения и флуктуацию плотности числа частиц:

$$e \xi_n = \sigma_n p_n . \quad (14)$$

Вывод явного выражения для σ_n приведен в приложении. Далее:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dw} \approx \frac{\omega - \bar{\omega}}{w} = - \frac{1}{2\pi R^2 m \gamma} . \quad (15)$$

В пределах применимости используемого метода система уравнений (13) конечна и состоит из $2n_m + 1$ уравнений, где n_m - максимальный номер азимутальной гармоники, которую еще можно рассматривать в модели тонкого пучка. Мы будем рассматривать эволюцию и взаимодействие длинноволновых возмущений вплоть до n_m , полагая, что более высокие гармоники возбуждаются крайне слабо (некогерентная часть поля). В соответствии с этим положим $\psi_{n > n_m} = 0$.

Далее необходимо задать начальные условия, т.е. функции $\psi_n(w)$ в начальный момент времени. Мы будем исходить из начального состояния с весьма малым уровнем полей возмущения, т.е. $\psi_{n \neq 0} \ll \psi_0$. Функцию $\psi_0(w)$ зададим в форме распределения Гаусса вида

$$\psi_0(w) \Big|_{t=0} = \frac{N}{\sqrt{2\pi} w_0} e^{-\frac{w^2}{2w_0^2}} , \quad (16)$$

w_0 - начальный разброс в пучке. Поскольку на начальном этапе предполагается справедливой линейная теория, то начальные значения $\psi_{n \neq 0}(w)$ можно выразить через $\psi_0(0, w)$. Это легко сделать с помощью уравнений (13) в пренебрежении нелинейными членами и предполагая, что выполнено дисперсионное соотношение линейной теории^{x/}.

^{x/} При этом предполагалось, что на начальной стадии эволюции амплитуды возмущений нарастают по экспоненциальному закону с показателем экспоненты, равным инкременту линейной теории.

Тогда получим

$$\Psi_n(w)|_{t=0} = i \frac{\sigma_n A_n \psi_0}{\gamma_n + a n w}. \quad (17)$$

Здесь A_n - малые численные коэффициенты, характеризующие распределение амплитуд начальных возмущений по n . В соответствии с тем, что было сказано выше о возбуждении высоких гармоник ($n > n_m$), спектр значений A_n выбирается таким образом, чтобы A_n при $n \approx n_m$ были бы значительно меньше амплитуд первых гармоник. Перейдем к безразмерному виду в уравнениях (13) - (17). Введем

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= \frac{w}{\langle w \rangle}, \quad \langle w \rangle = m c R \gamma; \quad \bar{t} = \gamma_1 t; \\ \bar{\psi}_0(\bar{w}) &= \frac{\bar{w}_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\bar{w}_0^2 - \bar{w}^2}{2}}; \quad \bar{\psi}_n = \psi_n \frac{\langle w \rangle}{N}; \\ \bar{\sigma}_n &= \sigma_n \frac{N}{\gamma_1 \langle w \rangle}; \quad \bar{a} = a \frac{\langle w \rangle}{\gamma_1}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Теперь имеем следующий вид уравнений (13):

$$\frac{\partial \bar{\psi}_n}{\partial \bar{t}} + i n \bar{a} \bar{w} \bar{\psi}_n + \sum_{n_1} \bar{\sigma}_{n-n_1} \frac{\partial \bar{\psi}_{n_1}}{\partial \bar{w}} \int_{-\pi \frac{\langle w \rangle}{w_0}}^{\pi \frac{\langle w \rangle}{w_0}} \bar{\psi}_{n-n_1}(\bar{w}_1) d\bar{w}_1 = 0. \quad (19)$$

В процессе эволюции должны выполняться следующие соотношения, соответствующие законам сохранения числа частиц и полной энергии системы (черточки теперь будем опускать):

$$\int \psi_0(w, t) dw = 1,$$

$$\sum_n n^{1/3} \frac{|\tilde{\mathcal{E}}_n|^2}{4\pi} + \int_{-\pi}^{\infty} \left(1 + \frac{w}{\pi}\right)^{1/2} \psi_0(w, t) dw = \text{const}.$$

§4. Методика численных расчётов

Численно необходимо найти решение задачи Коши для системы 21 квазилинейного уравнения в частных производных (19) с начальными условиями (18). Эта система получается в результате разложения в ряд Фурье по $e^{in\theta}$ функции распределения $\psi(\theta, w, t)$ и поля $\tilde{\mathcal{E}}(\theta, t)$, входящих в исходное уравнение, аналогичное одномерному уравнению Власова для бесстолкновительной плазмы. Последнее уравнение отличается от нашего не только заменой декартовой координаты $x (-\infty < x < +\infty)$ на периодическую $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$, а скорости v на обобщенный момент w , но и существенно иной связью между $\tilde{\mathcal{E}}_n(t)$ и $\int \psi_n(w, t) dw$.

Одномерное уравнение Власова решалось численно в ряде работ (см., например, ^{/8,9/}). В этих работах применялось разложение $\psi_n(w, t)$ в ряд по полиномам Эрмита от w , и при достаточном числе членов ряда в любой конечный момент времени приближенное решение сходится к существующему (в классе C) точному ^{/10/}. С ростом времени необходимо увеличивать число членов ряда ^{/9/}. Нас интересует не только начальная стадия эволюции, но и возможность выхода системы на стационарный режим. Поэтому расчёт требуется провести на весьма длительном отрезке времени, что приводит к необходимости учёта очень большого числа (≈ 100) членов ряда по w .

В этой работе для решения поставленной задачи мы применяем метод конечных разностей.

В действительной области мы можем переписать систему (19) в следующем компактном векторном виде:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + A \frac{\partial \psi}{\partial w} = a. \quad (21)$$

Здесь ψ , a — векторы с компонентами

$$\psi = \{ \psi'_0, \psi'_1, \dots, \psi'_{10}, \psi''_1, \dots, \psi''_{10} \}, \quad \psi_n = \psi'_n + i \psi''_n;$$

$$a = \{ 0, a_w \psi''_1, \dots, 10 a_w \psi''_{10}, -a_w \psi'_1, \dots, -10 a_w \psi'_{10} \};$$

а $A = A(t, \psi)$ — 21×21 матрица, элементами которой являются линейные комбинации $\int \psi'_n dw$ и $\int \psi''_n dw$ с соответствующими численными коэффициентами.

В силу свойств фурье-компонент $\psi'_n = \psi'_{-n}$, $\psi''_n = -\psi''_{-n}$ матрица A является симметричной, поэтому ее собственные значения вещественны. Таким образом, система (21) — гиперболического типа, и поскольку матрица A зависит от ψ , система (21) является квазилинейной (в математическом смысле). Как начальные данные, так и коэффициенты в уравнениях непрерывно дифференцируемы. При этом (см., например, /11/) решение задачи Коши существует и единственно в некотором слое (t_0, w) , где момент времени t_0 определяется обращением в ∞ производной по w от искомой функции. Как показывает численный эксперимент, эти производные остаются ограниченными в процессе счета. Зависимость матрицы A от ψ может привести к тому, что в процессе эволюции система будет стремиться к единственному нетривиальному стационарному состоянию независимо от выбираемых начальных данных.

Перейдем к описанию выбранной разностной схемы. Основное требование к разностной схеме: необходимо, чтобы приближенное решение, полученное из разностных уравнений, при измельчении шагов сетки стремилось к решению исходного дифференциального уравнения.

Известно ^{/12/}, что для строгого доказательства сходимости необходимо доказать аппроксимацию и устойчивость разностной схемы.

Возьмем прямоугольную сетку с шагами по времени τ и по $w - h$. Обозначим: $\psi_k^m = \psi(kh, m\tau)$. После предварительного анализа мы остановились на неявной схеме, взяв следующее выражение для производных:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_k^{m+1/2} \approx \frac{\psi_k^{m+1} - \psi_k^m}{\tau},$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial w}\right)_k^{m+1/2} \approx \frac{\beta(\psi_{k+1}^{m+1} - \psi_{k-1}^{m+1}) + (1-\beta)(\psi_{k+1}^m - \psi_{k-1}^m)}{2h}.$$

Тогда разностное уравнение, соответствующее (21), имеет вид

$$\psi_k^{m+1} = \psi_k^m - \frac{\kappa A^{m+1/2}}{2} [\beta(\psi_{k+1}^{m+1} - \psi_{k-1}^{m+1}) + (1-\beta)(\psi_{k+1}^m - \psi_{k-1}^m)] + \tau a_k^{m+1/2},$$

$$\kappa = \frac{\tau}{h}, \quad a_k^{m+1/2} = \frac{a_{k+1}^{m+1} + a_{k-1}^{m+1} + a_{k+1}^m + a_{k-1}^m}{4}, \quad (22)$$

$$A^{m+1/2} = \frac{A^{m+1} + A^m}{2}.$$

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора по двум переменным, нетрудно убедиться, что выбранная схема аппроксимирует при $h \rightarrow 0$ уравнение (21) с остаточным членом первого порядка, умноженным на коэффициент $2\beta - 1$. В случае $\beta = \frac{1}{2}$ схема - второго порядка точности. Если β немного больше $\frac{1}{2}$, то аппроксимация близка ко второму порядку.

Исследуем устойчивость схемы. Как обычно, полагая $\psi_k^m = \lambda^m e^{ik\phi}$, найдем собственные значения λ_i , отвечающие собственным значениям μ_i матрицы A , $i = 1, 2, \dots, 2l$. Необходимым требованием устойчивости является $|\lambda_i| \leq 1$. Подставляя ψ_k^m в (22), имеем

$$\lambda_i = \frac{1 - i(1 - \beta) \kappa \mu_i \sin \phi}{1 + i \beta \kappa \mu_i \sin \phi}, \quad (23)$$

отсюда видно, что $|\lambda_i| \leq 1$, если $\beta \geq 1/2$, т.е. схема будет всегда устойчива при $\beta \geq 1/2$. Элементы матрицы A зависят от t , следовательно, μ_i в процессе счёта меняются не только по абсолютной величине, но могут изменять знак. Существенно поэтому, что, как следует из (23), устойчивость не зависит от знака μ_i .

На каждом слое по времени мы получаем систему разностных уравнений, которую будем решать методом итераций. Вместо (22) тогда получим

$$\begin{aligned} \psi_k^{m+(q+1)} = \psi_k^m - \frac{\kappa A^{m+(-\frac{q}{2})}}{2} [\beta (\psi_{k+1}^{m+(q)} - \psi_{k-1}^{m+(q)}) + (1-\beta)(\psi_{k+1}^m - \psi_{k-1}^m)] \\ + \tau a_k^{m+(-\frac{q}{2})}, \quad A^{m+(-\frac{q}{2})} = \frac{A^{m+(q)} + A^m}{2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь q - номер итерации и $q = 0$ соответствует значению ψ на предыдущем слое.

Условие устойчивости схемы (24) приводит к дополнительным ограничениям на отношение шагов κ . Действительно, подставив в схе-

му (24) $\psi^{m+(q)} = \lambda^{m+(q)} e^{ik\phi}$, мы получим уравнение, связывающее $\lambda^{(q+1)}$ и $\lambda^{(q)}$:

$$\lambda^{(q+1)} = 1 - i \kappa \mu_1 (\beta \lambda_i^{(q)} + (1-\beta)) \sin \cdot b.$$

Отсюда видно, что начиная со второй итерации $|\lambda_i| \leq 1$, если $\kappa |\mu_1| \leq \frac{\sqrt{2\beta-1}}{\beta}$, $\beta > 1/2$. Итак, условием, обеспечивающим устойчивость, будет $x/$:

$$\kappa = \frac{\tau}{h} \leq \frac{\sqrt{2\beta-1}}{\beta} \cdot \frac{1}{\max_i |\mu_i|}.$$

Вычисляя μ_1 , мы всегда можем изменением β добиться выполнения указанного условия.

Однако в процессе счёта было замечено, что при $t \approx 5$ на гладкие до сих пор функции начинают накладываться небольшие осцилляции по w . По-видимому, они относятся к разностным эффектам. Мы пробовали увеличивать и уменьшать (изменением β) точность аппроксимации, переходили на другие схемы типа предиктор-корректор и так называемую схему "счёт-пересчёт". Осцилляции неизменно появляются. И все же влияние их не очень существенно. Для 90% точек на кривой $\psi_0(w, t)$ в конце счёта при $t = 8,0$ разброс не превышает 1% относительно точек кривой, приведенной в следующем параграфе. Из оставшихся 10% имеется лишь несколько точек с относительным разбросом, достигающим до 5%.

Заметим также, что указанные осцилляции совсем не проявляются в интегралах эволюции, соответствующих физическим законам сохранения, которые сохраняются с большой точностью в течение всего счёта.

^{x/} Данная схема использовалась В.В. Русановым для расчёта задач газовой динамики^{13/}. Там же можно найти подробности доказательства устойчивости.

§5. Результаты численного счёта и их обсуждение

Для расчётов были выбраны следующие параметры, наиболее интересные с точки зрения ведущихся экспериментов ^{/1,2/}: $\sqrt{\frac{\nu}{\gamma}} = \frac{1}{15}$, $\frac{R}{a} = 10$; и два значения начального разброса по энергии $\bar{w}_0 = 5; 10$.

В целях изучения зависимости окончательных результатов от выбора начальных данных рассматривались следующие два варианта начального распределения энергии возмущения по амплитудам гармоник (см. рис. 1 (а,б) и табл. 1).

Кроме того, использовались значения комплексного импеданса σ_n согласно таблице приложения.

Начнем обсуждение результатов численного расчёта с поведения полной энергии поля $W_E = \sum_n n^{1/3} \frac{|\xi_n|^2}{4\pi}$ во времени $\bar{t} = \gamma_1 t$. На рис. 2а представлен график $W_E(\bar{t})$ для $\bar{w}_0 = 5$. Рост энергии вследствие неустойчивости на начальной стадии с хорошей точностью аппроксимируется кривой $W_E \approx e^{2\bar{\gamma}\bar{t}}$, где $\bar{\gamma}$ — средний по гармоникам инкремент, совпадающий с полученным аналитически.

Заметное отличие от линейной теории возникает при $\bar{t} \approx 2,7$ и $W_E \approx 0,2 \cdot 10^{-2}$. В этой области экспоненциальный закон нарастания изменяется, и при $\bar{t} \approx 3,35$, $W_E \approx 0,7 \cdot 10^{-2}$ появляется первый "загиб" или максимум на графике энергии, однако после небольшого уменьшения энергия продолжает расти до $\bar{t} \approx 4$ и $W_E \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$, здесь возникает второй максимум, после которого энергия значительно уменьшается, достигая при $\bar{t} \approx 5$ значения $W_E \approx 0,3 \cdot 10^{-2}$, т.е. в два раза меньшего, чем в первом максимуме. Дальнейшее поведение энергии поля во времени носит осциллирующий характер со средним значением $W_E \approx 0,8 \cdot 10^{-2}$, что свидетельствует о насыщении рассматриваемой неустойчивости.

Таблица 1

n		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	$A_n \times 10^3$	1,4	1,54	2,2	2,4	2,85	1,6	0,9	0,4	0,2	0,06
	$A_n \times 10^5$	70	35	25	18	15	8,8	3,0	1,6	0,6	0,05
b	$A_n \times 10^4$	15	29	15	8,0	3,4	0,8	0,16	0,032	8×10^{-3}	$4,2 \times 10^{-3}$
	$A_n \times 10^5$	70	48	15	5,4	1,35	0,2	0,019	$1,3 \times 10^{-3}$	6×10^{-4}	5×10^{-5}

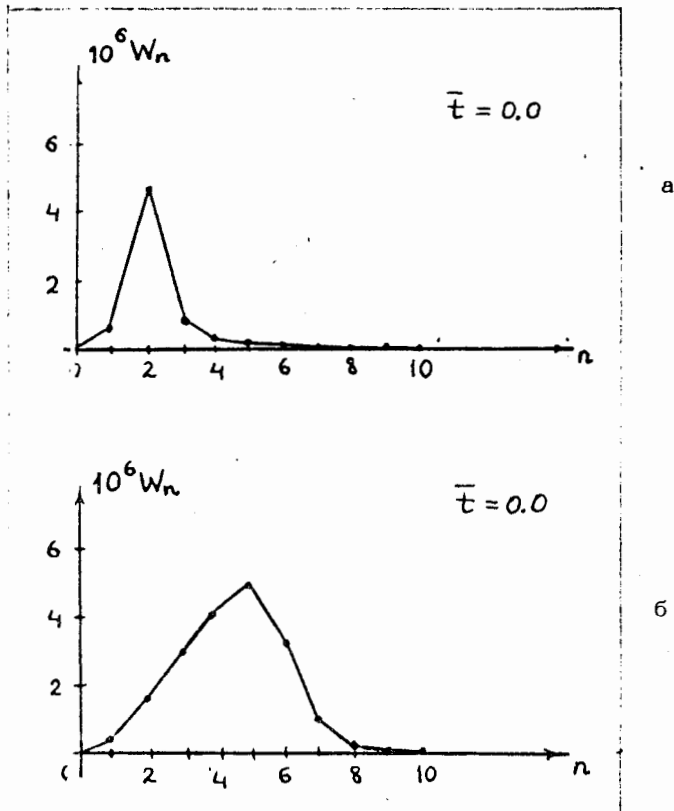
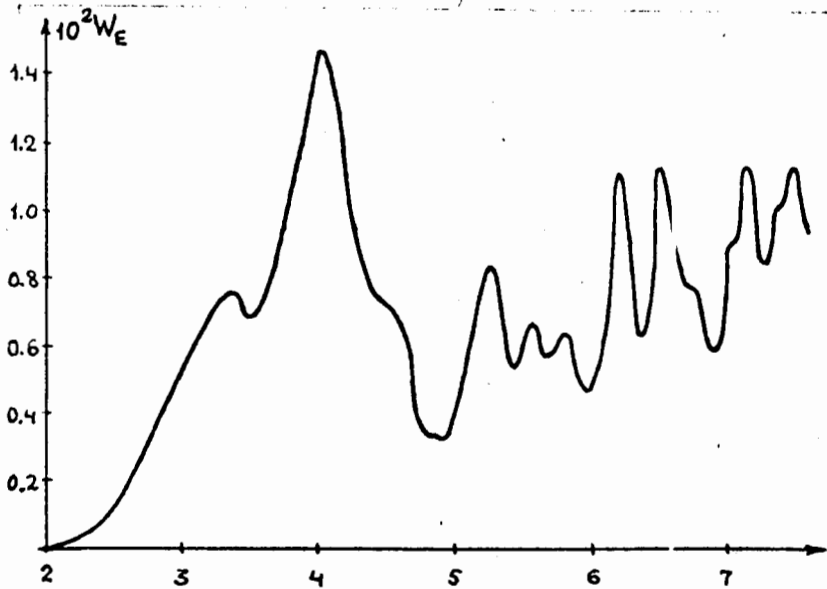
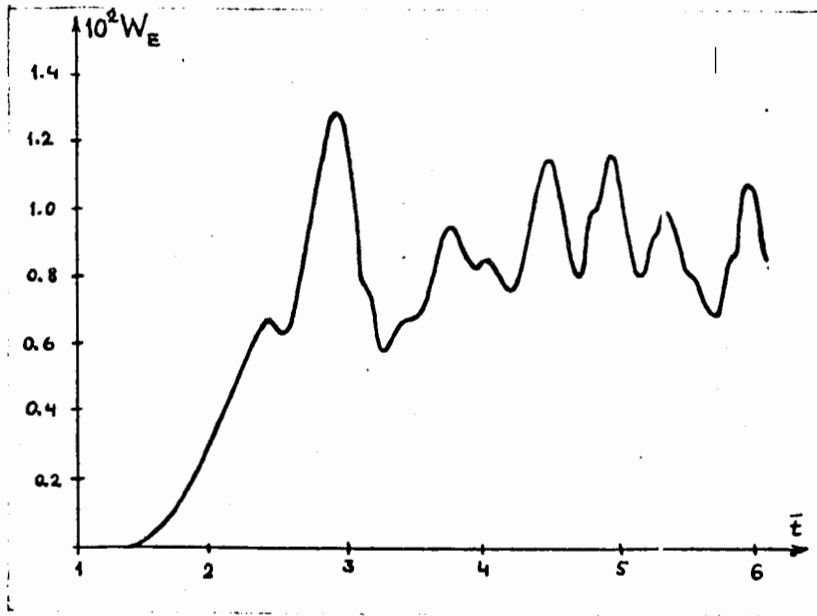


Рис. 1, а и б. Два вида начальных распределений энергии поля возмущений по номерам гармоник. Графики эволюции на рис. 3-6 даны для случая а .



a



b

Рис. 2, а и б. Полная энергия поля возмущений как функция времени (начальные условия а и б соответственно).

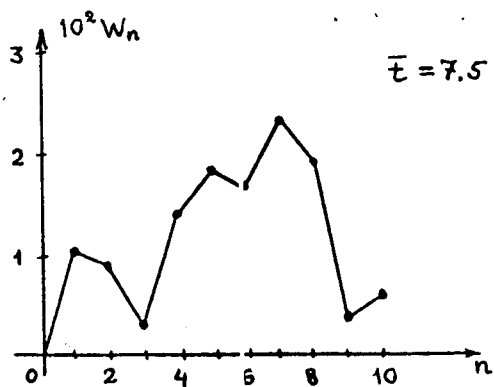
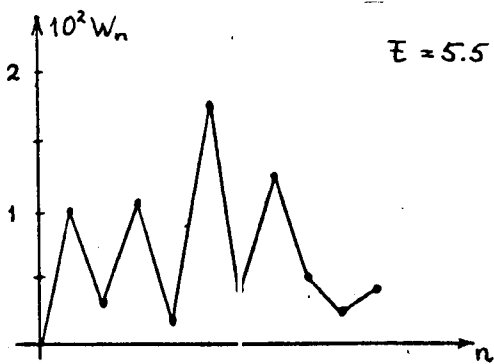
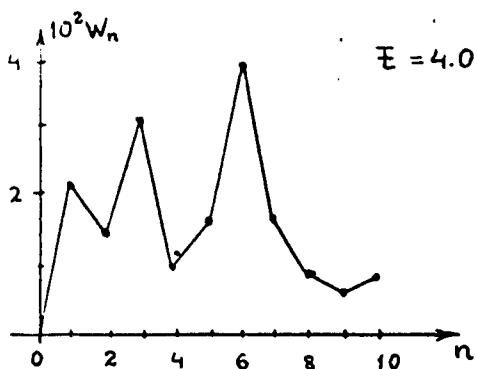
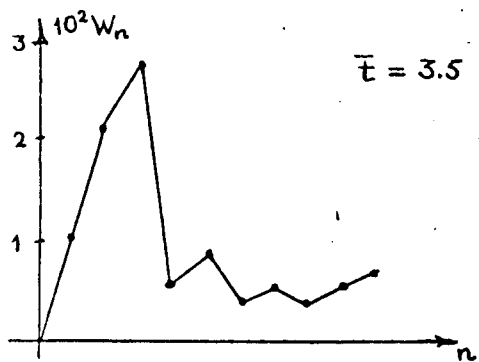


Рис. 3. Спектр возмущений - распределение энергии поля по номерам гармоник для моментов времени $\bar{t} = 3,5; 4,0; 5,5; 7,5$.

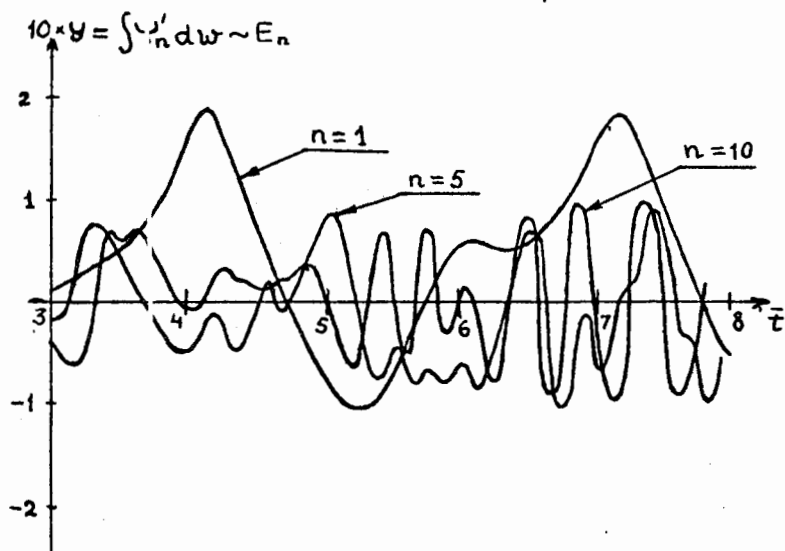


Рис. 4. Поведение амплитуд поля первой, пятой, десятой гармоник во времени.

моник стремится к некоторому среднему значению, почти не зависящему от номера гармоники. Такая ситуация может быть физически понята как стремление системы к равномерному распределению энергии по гармоникам из-за их нелинейного взаимодействия.

Одной из важных характеристик является изменение нулевой гармоники, описывающей распределение частиц по энергиям в кольце ($\psi_0 = \int \psi d\theta$). До момента $\bar{t} = 3.5$, когда возникает первый нелинейный сбой фаз, результаты имеют некоторую аналогию с известной картиной динамики квазилинейной релаксации^{/14/}. На рис. 5 видно возникновение ступеньки типа "ударной волны" в энергетическом пространстве, "распространяющейся" в сторону меньших энергий. Отметим, что в рассматриваемой задаче квазилинейное приближение, строго говоря, не применимо, так как изменение "фоновой" функции распределения происходит примерно с тем же характерным временем, что и "осциллирую-

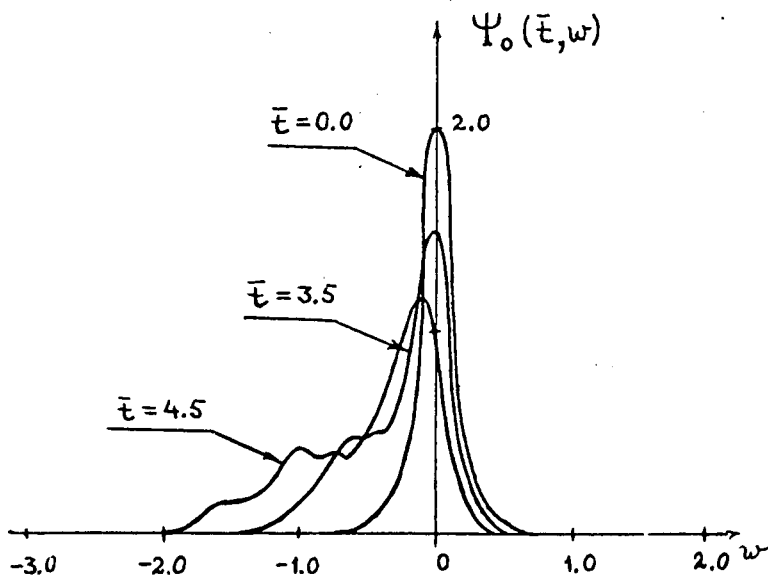


Рис. 5. Эволюция функции распределения частиц по ω в кольце $\psi_0(\bar{t}, \omega)$.

шей". Кроме того, "ударная волна" возникает на основной функции распределения в случае гидродинамической неустойчивости. Таким образом, полученные результаты показывают, что эффект распространяющейся ударной волны является характерным для динамики развития значительно более широкого класса неустойчивостей. Возможно, что неким физическим основанием этого факта является то, что само образование "ударной" волны приводит к наличию двух различных характерных времен. В общей динамике развития неустойчивости эта стадия занимает относительно небольшое время $\Delta \bar{t} = 0,5$ (от $\bar{t} = 3$ до $\bar{t} = 3,5$). В момент $\bar{t} = 3,5$ появляется сбой фаз и возникает новая "ударная" волна, и затем появляются осцилляции в результате наложения ряда таких "ударных" волн (см. рис. 6).

Фронт результирующей волны постепенно замедляется (при $\bar{t} \approx 4,5$), и возникают относительно слабые и медленные "ударные" волны, распространяющиеся в сторону больших энергий. Отметим, что после сбоя

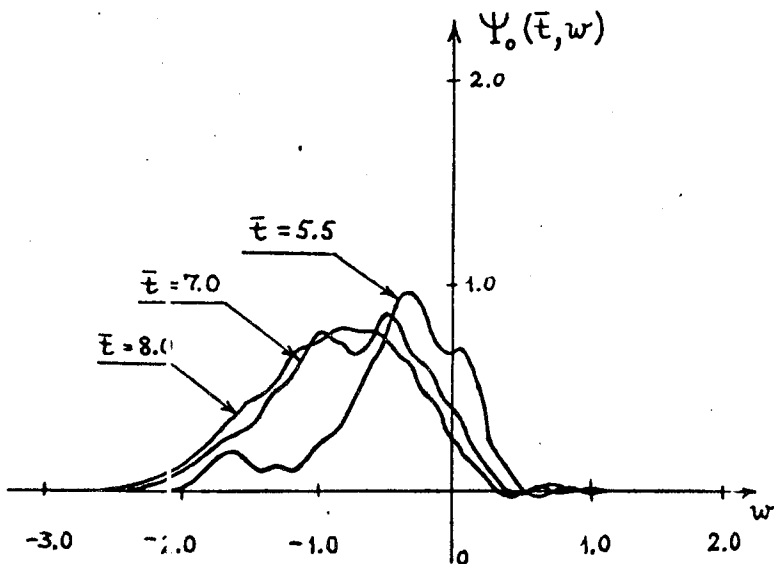


Рис. 6. Эволюция функции распределения частиц по w в кольце $\psi_0(\bar{t}, w)$.

фаз апри $\bar{t} = 3,5$ от $\bar{t} = 3,5$ до $\bar{t} = 4$, как следует из рис. 2а, "квазилинейные" процессы заменяются резким возрастанием W_E , что может быть интерпретировано как нелинейная взрывная неустойчивость^{/16/}, быстро стабилизирующаяся с ростом энергии поля.

Настоящие расчёты показывают, что динамика развития ψ_0 имеет характерные необратимые черты (преимущественное уширение ψ_0 в сторону меньших энергий). В результате возникает сложный нелинейный самосогласованный режим, в котором разброс по энергиям достаточно высок и сравним по всем рассмотренным случаям по порядку величины с линейным критическим разбросом.

Существующие в настоящее время эксперименты^{/1,2/} соответствуют начальному разбросу $\bar{w}_0 \approx 2\%$, что находится вблизи порога устойчивости, при этом, как показывают измерения^{/2/}, излучение из кольца длится весьма короткое время, порядка нескольких оборотов; оценивая

время развития неустойчивости до насыщения $\bar{t} \approx 5+6$ (см. рис. 2а) при $\bar{y} \approx 10^8$ сек⁻¹, находим, что излучение кольца в рассчитанном нами случае длится примерно 50 нсек, что находится в хорошем согласии с наблюдениями.

Авторы весьма благодарны Э.А. Перельштейну, В.П. Саранцеву за интерес к работе и обсуждение, М.Г. Мещерякову за поддержку, М.Г. Нехаевой за выполненные численные расчёты импеданса и М.Е. Головой за помощь в оформлении рукописи.

Приложение

Вычисление σ_n в формуле (13)

Введенная в формуле (13) величина σ_n просто связана с импедансом z_n /5/:

$$\sigma_n = \frac{e^2 \bar{\omega}}{2\pi} Z_n. \quad (П1)$$

Для нахождения σ_n будем исходить из общего выражения импеданса для пучка в цилиндрическом волноводе, полученном в /5/.

Устремляя радиус волновода к бесконечности в формуле (1.20) из /5/, приходим к следующему выражению для Z_n :

$$Z_n = -\frac{4\pi^2 n^2}{c} \left[\int_0^1 \frac{J_n^2(n\beta x) \sqrt{1-x^2}}{x} dx + \beta^2 \int_0^1 \frac{J_n'^2(n\beta x) x dx}{\sqrt{1-x^2}} - \right. \quad (П2)$$

$$\left. -i \left(\int_1^\infty \frac{J_n^2(n\beta x) \sqrt{x^2-1}}{x} dx - \beta^2 \int_1^\infty \frac{J_n'^2(n\beta x) x}{\sqrt{x^2-1}} dx \right) \right].$$

Выражение (П2) перепишем в несколько другом виде:

$$Z_n = \frac{4\pi^2 n^2}{c} [-I_1 + i I_2 + i I_3]. \quad (\text{П3})$$

Здесь

$$I_1 = \int \left[\frac{J_n^2(n\beta x) \sqrt{1-x^2}}{x} + \beta^2 \frac{J_n'^2(n\beta x) x}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx, \quad (\text{П4})$$

$$I_2 = \frac{1}{\gamma^2} \int_1^\infty \frac{J_n^2(n\beta x) \sqrt{1-x^2}}{x} dx, \quad (\text{П5})$$

$$I_3 = \beta^2 \int_1^\infty \left[\frac{J_n^2(n\beta x) \sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{J_n'^2(n\beta x) x}{\sqrt{x^2-1}} \right] dx. \quad (\text{П6})$$

Нетрудно убедиться, что интеграл I_2 расходится на верхнем пределе, I_1 и I_3 - конечные выражения^{x/}. Расходимость связана с тем, что исходное выражение Z_n написано для бесконечно тонкого кольца. Учитывая, что поперечное сечение кольца имеет радиус, равный a , следует, как нетрудно показать (см.^{/5/}), ограничить верхний предел интегрирования в I_2 величиной $\frac{1}{n\beta} \frac{R}{a}$, где $n \ll \frac{R}{a}$. Тогда I_2 имеет оценку

$$I_2 \approx \frac{2}{\pi n \beta \gamma^2} \ln R/a. \quad (\text{П7})$$

^{x/} В работе^{/5/} при вычислении импеданса в свободном пространстве была допущена неточность: интегралы I_2, I_3 были отброшены по сравнению с I_1 . На самом деле, как нам любезно указал М.Л. Левин, I_1 и I_3 одного порядка. Нетрудно показать, что учёт этого обстоятельства изменяет количественные результаты линейной теории (инкремент и порог неустойчивости) примерно на 25%.

Для дальнейшего преобразования интегралов I_1 и I_3 используем следующие формулы для бесселевых функций:

$$J_n'^2(n\beta x) = \left[1 - \frac{1}{\beta^2 x^2} + \frac{1}{2n^2 x^2} \left(\frac{1}{\beta} \frac{d}{d\beta} + \frac{d^2}{d\beta^2} \right) \right] J_n^2(n\beta x), \quad (\text{П8})$$

$$J_n^2(n\beta x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_0(2n\beta x \sin y) \cos 2ny \, dy. \quad (\text{П9})$$

В интеграле I_1 после использования (П8) и (П9) сделаем замену переменных $x = \cos \theta$, тогда:

$$I_1 = - \frac{1-\beta^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\pi J_0(2n\beta \cos \theta \sin y) \cos 2ny \cos \theta \, dy + \quad (\text{П10})$$

$$+ \frac{\beta^2}{\pi n} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{d}{d\beta} \right) \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\pi J_1(2n\beta \cos \theta \sin y) \cos 2ny \sin y \, dy.$$

Взяв интегралы по θ в (П10) с помощью формулы^{/17/}

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2\mu \theta J_{2\nu}(2a \cos \theta) \, d\theta = \frac{\pi}{2} J_{\nu+\mu}(a) J_{\nu-\mu}(a) \quad (\text{П11})$$

и выразив функции Бесселя половинного индекса через тригонометрические функции, получим

$$I_1 = - \frac{1-\beta^2}{2\pi n \beta} \int_0^\pi \frac{\cos 2ny \sin(2n\beta \sin y)}{\sin y} \, dy + \frac{\beta}{2\pi n^2} \frac{d}{d\beta} \int_0^\pi \cos 2ny \cos(2n\beta \sin y) \, dy. \quad (\text{П12})$$

Интегралы в (П12) легко выразить через функцию Бесселя с помощью интеграла Бесселя и окончательно имеем:

$$I_1 = \frac{1}{\beta n^2} \left[n\beta^2 J_{2n}'(2n\beta) - n^2(1-\beta) \int_0^\beta J_{2n}(2n\xi) \, d\xi \right]. \quad (\text{П13})$$

Выражение (П13) отличается численным коэффициентом от известной формулы Шотта^{/18/} для синхротронного излучения одиночного электрона.

Перейдем теперь к интегралу I_3 , определяющему мнимую часть импеданса. Используя опять (П8) и (П9) и сделав подстановку $x = \text{ch } \theta$, получим I_3 в виде:

$$I_3 = \frac{1 - \beta^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\theta}{\text{ch } \theta} \int_0^\pi J_0(2n\beta \text{ch } \theta \sin y) \text{Cos } 2ny \, dy - \frac{\beta^2}{2\pi n^2} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{d}{d\beta} \right) \frac{d}{d\beta} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{d\theta}{\text{ch } \theta} \int_0^\pi J_0(2n\beta \text{ch } \theta \sin y) \text{Cos } 2ny \, dy. \quad (\text{П14})$$

Интегралы по θ в (П14) берутся с помощью формулы^{/17/}:

$$\int_0^\infty J_{\nu+\mu}(2a \text{ch } \theta) \text{ch} [(\beta - \nu)\theta] \, d\theta = -\frac{\pi}{4} [J_\mu(a) N_\nu(a)^+ N_\mu(a) J_\nu(a)], \quad (\text{П15})$$

и после небольших преобразований приходим к следующему результату для I_3 :

$$I_3 = (1 - \beta^2) \int_0^\beta \frac{1}{\xi} E_{2n}(2n\xi) \, d\xi - \frac{\beta}{n} E'_{2n}(2n\beta). \quad (\text{П16})$$

Здесь введена функция Вебера $E_m(z)$:

$$E_m(Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(my - z \sin y) \, dy. \quad (\text{П17})$$

Теперь импеданс (П2) будет иметь вид

$$Z_n = \frac{4\pi^2}{c} \left[-n\beta J'_{2n}(2n\beta) - in\beta E'_{2n}(2n\beta) + i \frac{2n}{\pi\beta\gamma^2} \ln R/a + \right. \\ \left. + \frac{n^2}{\beta\gamma^2} \int_0^\beta J_{2n}(2n\xi) d\xi + \frac{in^2}{\gamma^2} \int_0^\beta \frac{1}{\xi} E_{2n}(2n\xi) d\xi \right]. \quad (\text{П18})$$

В интересующем нас случае тонких релятивистских пучков будем считать, что выполнено условие

$$n \ll \gamma^3. \quad (\text{П19})$$

Тогда при малых n численный расчёт, а при больших n (но удовлетворяющих все же условию (П19)) анализ, подобный проведенному в /18/, показывает, что три последние члена в (П18) порядка $(\frac{n}{\gamma^3})$ от первых двух и ими можно пренебречь. При $1 \ll n \ll \gamma^3$ для производной от функции Вебера нетрудно получить приближенное выражение

$$E'_{2n}(2n\beta) \approx - \frac{\Gamma(2/3)}{2\pi n^{2/3} 3^{1/3}}. \quad (\text{П20})$$

Соответственно

$$J'_{2n}(2n\beta) \approx \frac{3^{1/6} \Gamma(2/3)}{2\pi n^{2/3}}. \quad (\text{П21})$$

Расчёты показывают, что приближение (П20) с 5%-ной точностью годится для любых n , а (П21) - начиная с $n = 4$.

В соответствии с (П1) σ_n запишем в виде

$$\sigma_n = \frac{2\pi e^2}{R} (-a_n + i b_n). \quad (\text{П22})$$

Точные значения для первых четырех значений n сведены в таблицу 2, а при $n > 4$

$$a_n \approx \sqrt{3} b_n \approx 0,26 n^{1/3}. \quad (\text{П23})$$

Таблица 2

n	1	2	3	4
a_n	0,284	0,298	0,349	0,389
b_n	0,156	0,195	0,222	0,244

Л и т е р а т у р а

1. В.И. Векслер и др. Доклад на IV Международной конференции по ускорителям, Кембридж, США, 1967.
2. D. Keefe, G.F. Lambertson, L.I. Laslett, W.A. Perkis, J.M. Peterson, A.M. Sessler, R.W. Allison, Jr. W.W. Chupp, A.U. Luccio and J.B. Rechen. Phys. Rev. Lett., 22, 558 (1969).
3. А.В. Галонов. Изв. вузов, Радиофизика, 2, №5, 836 (1959).
4. В.Н. Сазонов, Э.Н. Цытович. Изв. вузов, радиофизика, 11, 1287 (1968)

5. А.Г. Бонч-Осмоловский, Э.А. Перельштейн. Препринты ОИЯИ Р9-4425, Р9-4426, Дубна, 1969; Известия вузов, радиофизика, т. XIII, №7, 1081, 1089 (1970).
6. А.А. Коломенский, А.Н. Лебедев. Атомная энергия, 7, 549 (1959); C. Nielsen, A. Sessler, K. Symon. CERN Symposium 1959, p. 115 (русский перевод "Накопление релятивистских частиц", Госатомиздат, 1963).
7. А.Г. Бонч-Осмоловский, Э.А. Перельштейн, В.Н. Цытович. Препринт ОИЯИ, Е9-1751, Дубна, 1969.
8. Т.Р. Armstrong, D. Montgomery. Phys. of Fluids, 12, 2094 (1969).
9. В.И. Телегин. Вестник МГУ (физика), №5, 25 (1968).
10. С.В. Иорданский. Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, т. 60, 1961, стр. 181.
11. Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений, Наука, М., 1968.
12. С.К. Годунов, В.С. Рябенский. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, М., 1962.
13. В.В. Русанов. В сборнике "Численные методы решения задач механики сплошных сред". ВЦ АН СССР, М., 1969, стр. 9.
14. А.А. Иванов, Л.И. Рудаков. ЖЭТФ, 51, 1522 (1966); ДАН, 166, 1084 (1966).
15. В.М. Дикасов, Л.И. Рудаков, Д.Д. Рютов. ЖЭТФ, 48, 913 (1965).
16. V. Coppi, M.N. Rosenbluth, R.N. Sudan. Ann. Phys. (N.Y.), 55, 207 (1969).
17. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм ... , Физматгиз, Москва, 1963.
18. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля, Наука, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 февраля 1971 года.