15/III-71

И-20

БЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

убна

761/2-71

Р9 - 5535

И.Н. Иванов, Э.А. Перельштейн, В.П. Саранцев

К ВОПРОСУ ОБ УСКОРЕНИИ ИОНОВ ЭЛЕКТРОННЫМ КОЛЬЦОМ В СПАДАЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ОТДЕЛ НОВЫХ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ

1970

P9 - 5535

И.Н. Иванов, Э.А. Перельштейн, В.П. Саранцев

К ВОПРОСУ ОБ УСКОРЕНИИ ИОНОВ ЭЛЕКТРОННЫМ КОЛЬЦОМ В СПАДАЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Доклад на II -ом Всесоюзном совещании по ускорителям заряженных частиц. Москва 1970 г.

В коллективных линейных ускорителях ионов в качестве ускоряющего сгустка используется электронное кольцо. При выводе из адгезатора кольцо ускоряется в спадающем магнитном поле. В ускорителе, рассчитанном на ускорение протонов до сверхвысоких энергий, этап ускорения в магнитном поле является предварительным. Как показывают расчёты, при ускорении в спадающем поле электронного кольца, нагруженного тяжелыми ионами, последние могут приобрести энергию до 10 Мэв/нуклон, что является достаточным для физических экспериментов.

В данной работе рассматривается проблема удержания ионов в потенциальной яме электронного кольца, при ускорении его в спадающем магнитном поле. При этом приняты следующие предположения:

- электронное кольцо считается тороидом с круглым поперечным сечением; отношение малого радиуса a к большому радиусу R тороида удовлетворяет неравенству: $a / R \ll 1$;

- суммарная масса всех ионов значительно меньше суммарной массы электронов;

- поляризация ускоренного ионно-электронного кольца считается малой и форма электронного сгустка остается неизменной при ускорении; влиянием поля ионной компоненты на электронный сгусток пренебрегается;

– до начала ускорения ионы в электронном шнуре моноэнергетичны и имеют энергию E_0 , а функция распределения ионов имеет вид:

$$f = \frac{N_0}{2\pi^2 a^2} \psi(z_0)\, \delta(E - E_0) \quad \text{, где} \qquad (1)$$

N_0 – число ионов в кольце до ускорения;

E – энергия ионов;

$\psi(z_0)$ – некая функция от координаты иона, смысл которой станет ясен из дальнейшего.

Градиент магнитного поля в лабораторной системе постоянен, скорость кольца в направлении ускорения считается нерелятивистской.

Основные параметры задачи следующие:

Ω – частота колебаний иона в потенциальной яме электронного шнура:

$$\Omega^2 = \frac{2\nu_e\, mc^2 Z}{mA a^2}; \quad \nu_e = \frac{N_e}{2\pi R} \frac{e^2}{mc^2} \text{, где} \qquad (2)$$

N_e – число электронов в шнуре;

M, m – массы покоя иона и электрона;

e, Z, A – заряд иона и его атомный вес соответственно;

w_0 – величина ускорения в лабораторной системе координат:

$$w_0 = - \frac{e\beta}{m\gamma} \frac{R}{2} \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial z}; \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} , \qquad (3)$$

β – отношение скорости вращения электронов во внешнем магнитном поле H_z к скорости света; $\overline{H}_z = \frac{2}{R^2} \int_0^R H_z(x)\, x\, dx$;

t – время ускорения, которое можно связать с длиной ускоряющего тракта $L = \frac{w_0 t^2}{2}$.

Принятые нами приближения позволяют заменить поле, действующее на ион со стороны электронного кольца, полем прямого электронного шнура круглого сечения, ввести x и z – отклонения иона от центра шнура, и в системе, связанной с ускоряющим шнуром, записать уравнения движения иона в виде:

$$
\begin{aligned}
M\ddot{z} &= -M w(t) + e\,\epsilon_z \qquad z(0) = z_0 \qquad \dot{z}(0) = \dot{z}_0 \\
M\ddot{x} &= e\,\epsilon_x \qquad\qquad\qquad\quad x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

В формуле (4) ϵ_z и ϵ_x – компоненты электрического поля шнура ($\vec{\epsilon} = -\operatorname{grad}\phi$), а ускорение $w(t)$ является функцией времени, что позволяет учесть момент начала ускорения шнура. Положим:

$$
w(t) = w_0\,\sigma(t), \quad \text{где} \quad \sigma(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}
\tag{5}
$$

Такая форма временной зависимости $w(t)$ упрощает вычисление и не является принципиальной для конечных результатов. Найдем первый интеграл движения системы (4):

$$\frac{\dot{z}^2 + \dot{x}^2}{2} = -w_0 z - \frac{e}{M}\Phi + E_0 ,$$

$$\frac{e}{M}\Phi = \Omega^2 \left\{ \frac{r^2}{2}\sigma(a-r) - a^2 \ln\left(\frac{a\ell^{-1/2}}{r}\right)\sigma(r-a) \right\} ,$$

$$r^2 = x^2 + z^2; \quad \ell = 2{,}718 \ldots \tag{6}$$

$$E_0 = \frac{\Omega^2 a^2}{2}\sigma(-t) + \left(\frac{\Omega^2 a^2}{2} + w_0 z_0\right)\sigma(t) .$$

Приступим к исследованию потенциальной энергии иона U в поле шнура. Из уравнений (6) следует:

$$U = w_0 z + \Omega^2 \left\{ \frac{r^2}{2}\sigma(a-r) - a^2 \ln\left(\frac{a\ell^{-1/2}}{r}\right)\sigma(r-a) \right\} \tag{7}$$

Функция U имеет экстремумы в плоскости $x = 0$; при $|z| < a$ в точке $z_{min} = -\frac{w_0}{\Omega^2}$, U минимальна:

$$U_{min} = -\frac{w_0^2}{2\Omega^2} , \tag{8}$$

а при $|z| > a$, в точке $z_{max} = -\dfrac{\Omega^2 a^2}{w_0}$ – максимум:

$$U_{max} = \Omega^2 a^2 \, \ell n \left(\frac{\Omega^2 a}{w_0} \ell^{-1/2} \right) . \qquad (9)$$

На рис. 1 дана форма U в плоскости $x = 0$, для различных w_0. Из рисунка видно, что при $w_0 < \Omega^2 a \ell^{-1}$ ускорение не влияет на движение иона, яма для иона остается. При $\Omega^2 a \ell^{-1} < w_0 < \Omega^2 a$, значение U_{max} становится меньше начальной энергии иона $\Omega^2 a^2/2$, а при $w \geq \Omega^2 a$ ямы не существует. Исходя из картины деформации потенциальной ямы, можно написать условие, при выполнении которого ион остается в электронном шнуре. Будем считать, что функция $\psi(z_0)$ описывает эти условия. Поскольку E для $t \geq 0$ является функцией z_0 [ур. (6)], то решим систему (5) и найдем z_0 [$z(t)$, $\dot z(t)$]:

$$z_0 = z \cos \Omega t - \frac{\dot z}{\Omega} \sin \Omega t - \frac{w_0}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t) . \qquad (10)$$

Теперь легко найти число ионов в момент времени t по формуле:

$$N = \int f \, dx \, dz \, d\dot x \, d\dot z = \frac{N_0}{\pi^2 a^2} \int \frac{\sigma(\dot x_0^2) \psi(z_0)}{\dot x_0} dx \, dz \, d\dot z ,$$

где

$$-\frac{\dot x_0^2}{2} = \frac{\dot z^2}{2} + w_0 \left(z + \frac{w_0}{\Omega} \right) (1 - \cos \Omega t) + \frac{w \dot z}{\Omega} \sin \Omega t + \frac{\Omega^2 (x^2 + z^2 - a^2)}{2} \qquad (11)$$

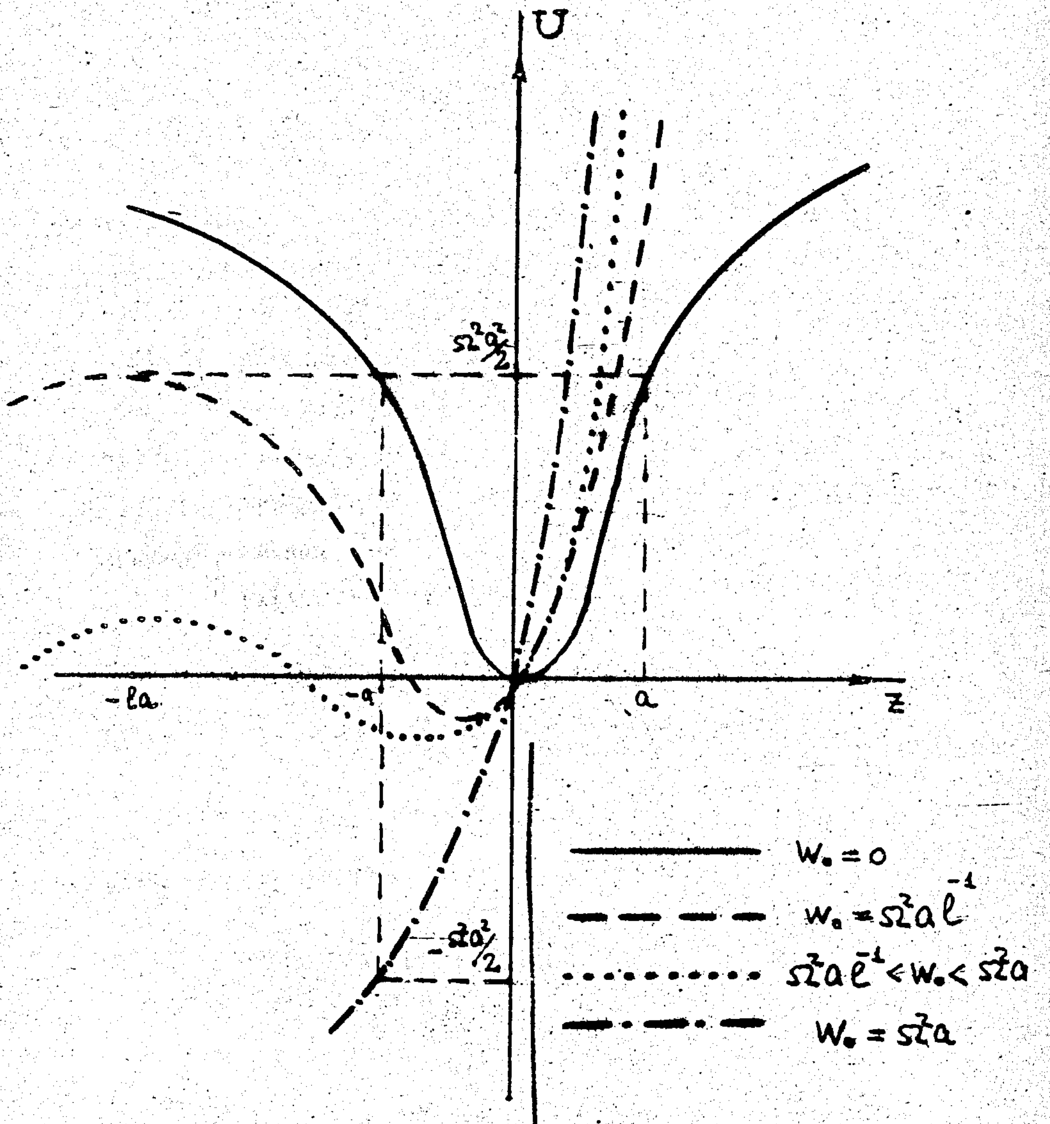

Рис. 1. Потенциальная яма электронного шнура в плоскости для различных значений w_0 .

Рассмотрим два режима ускорения:

I. $w < \Omega^2 a$, $\Omega t \geq 2\pi$. Из рис. 1 ясно, что за такое время в шнуре останутся ионы с $E_0 < U_{max}$. Из (6) и (9) найдем, что это условие выполняется для ионов с начальной координатой:

$$-a < z_0 < a \frac{\Omega^2 a}{w_0} \ell n \frac{\Omega^2 a \ell^{-1}}{w_0} \equiv a V . \qquad (12)$$

Из (12) определяется вид $\psi(z_0)$:

$$\psi(z_0) = \sigma(z_0 + a)\,\sigma(aV - z_0) . \qquad (13)$$

Производя интегрирование в (11) с учётом (13), получим:

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} + V\sqrt{1 - V^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin V . \qquad (14)$$

В табл. 1 приведены численные расчёты по формуле (14). Заметим только, что $|V| < 1$. Из условия $V = 1$ находится то максимальное ускорение, при котором, согласно (13), все ионы удерживаются в шнуре.

II. $w_0 > \Omega^2 a$, $\Omega t < 2\pi$. Будем считать, что в этом режиме остаются все ионы, координаты которых в любой момент времени $z < a$.

Отсюда $\psi(z_0) = \sigma(a^2 - z^2)$ и

$$\frac{N}{N_0} = \sigma(1 + U)\left[\frac{1}{2} + U\sqrt{1 - U^2} + \frac{1}{\pi} \arcsin U\right] \qquad (15)$$

$$U = 1 - \frac{w_0}{\Omega^2 a}(1 - \cos \Omega t) .$$

В табл. 1 содержатся результаты расчётов $\frac{N}{N_0}(U)$ также и для этого режима ускорения.

Функция $1 + U$ положительна для $w_0 > \Omega^2 a$ при $\Omega t < \pi$, а для $\Omega t > \pi$, при $w_0 < \Omega^2 a$.

Формулы (14) и (15) совместно с табл. 1 дают ответ на поставленную задачу в пределах принятой модели.

В заключение можно отметить следующее:

предположение о моноэнергетичности ионов в начале ускорения можно считать несущественным. Можно обобщить результаты, введя в функцию распределения (1) зависимость $N_0(E_0)$ и проинтегрировать конечные результаты по E_0; за короткие времена ускорение можно осуществлять $(w_0 > \Omega^2 a)$ ценою потерь некоторого количества ионов; можно осуществлять режим ускорения из двух этапов: первый – $w_0 < \Omega^2 a$ и $\Omega t > 2\pi$, второй – $w_0 > \Omega^2 a$, $\Omega t < \pi$. При этом под N_0 в формуле (15) следует понимать N из формулы (14).

Рукопись поступила в издательский отдел
23 декабря 1970 года.

Таблица 1

Результаты расчётов по формулам (14) и (15)

$\alpha = \frac{W_0}{\Omega^2 a}$	$x = \begin{cases} u \\ v \end{cases}$	$F(x) = \frac{1}{2} + x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x$
1.02	-0.9998	0.000002
1.10	-0.9952	0.000202
1.20	-0.9812	0.0015
1.30	-0.9589	0.0049
1.40	-0.9289	0.0112
1.50	-0.8918	0.0210
1.60	-0.8480	0.0347
1.70	-0.7979	0.0528
1.80	-0.7420	0.0755
1.90	-0.6805	0.1030
2.00	-0.6137	0.1354
2.10	-0.5419	0.1727
2.20	-0.4654	0.2148
2.30	-0.3843	0.2615
2.40	-0.2989	0.3126
2.50	-0.2093	0.3677
2.60	-0.1157	0.4265
2.70	-0.0182	0.4884
	0.0100	0.5064
	0.10	0.5635
	0.20	0.6265
	0.30	0.6881
	0.40	0.7477
	0.50	0.8045
	0.60	0.8576
	0.70	0.9059
	0.80	0.9479
	0.90	0.9813
	1.00	1.0000