

5441

ЭКЗ. ЧИТ. ЗАЛА

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна



P9 - 5441

В.И. Данилов, М. Ианович

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СОЛЕНОИДА
КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ
С ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

1970

P9 - 5441

В.И. Данилов, М. Ианович

**МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СОЛЕНОИДА
КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ
С ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ**

Направлено в "Nuclear Instruments and Methods"

1. Введение

Магнитное поле катушек постоянного тока рассматривалось рядом авторов. Были получены выражения, описывающие магнитные поля катушек разных видов.

Магнитное поле кругового витка, поле на оси соленоида, а также поле тороидального соленоида рассматриваются, например, в работах ^{/1,2/}.

Поле однослойных соленоидов рассматривалось такими авторами как А. Вейганд ^{/3/}, И.И. Пеккер ^{/4/}, Р. Казенав ^{/5/}.

Магнитное поле трехмерных катушек прямоугольной формы подробно исследовано в работе ^{/6/}, а тонких катушек эллипсоидальной формы - Блюэттом ^{/7/}.

Распределение компонент поля сферических однослойных катушек изучено Эвереттом и Осемейкианом ^{/8/}.

Общий случай распределения магнитного поля аксиального, радиального и тороидального секториальных соленоидов исследован нами ранее ^{/9/}.

Расчёт компонент поля соленоида конечных размеров дан Ч. Сноу ^{/10/}, Г. Брауном и Л. Флаксом ^{/11/}. Последними магнитное поле соленоида конечных размеров рассматривалось как суперпозиция магнитных полей четырех соответствующих полубесконечных соленоидов.

В данной работе путем интегрирования векторного потенциала кругового витка с током получены выражения, позволяющие найти распределения магнитного поля соленоидов конечных размеров в виде комбинации известных функций с эллиптическими интегралами первого, второго и третьего рода. Последнее, по нашему мнению, будет способствовать как более быстрому расчёту полей с помощью ЭВМ соленоидов конечных размеров, так и более детальному исследованию особенностей их распределения.

2. Векторный потенциал

Если \bar{J} - плотность тока в обмотке соленоида, то векторный потенциал может быть представлен в виде объемного интеграла по пространству, в котором \bar{J} отлично от нуля, в виде

$$\bar{A} = (\mu_0 / 4\pi) \int_{v'} \bar{J} \frac{dv'}{|\bar{\rho}|}, \quad (1)$$

где $\bar{\rho} = \bar{r}' - \bar{r}$ - расстояние от точки наблюдения P до элементарного объема dv' ; \bar{r}' и \bar{r} , соответственно, векторы - положения dv' и точки наблюдения P (рис. 1).

Для конечных размеров аксиально-симметричного соленоида постоянного тока, обмотка которого состоит из некоторого числа токовых витков, плотность тока \bar{J} имеет только азимутальную компоненту $J_{\phi} = J$.

В цилиндрической системе координат, показанной на рис. 1, выражение векторного потенциала можно представить как

$$\bar{A} = (\mu_0 / 4\pi) \bar{e}_{\phi} \bar{J} \int_{v'} \frac{\cos \phi' dv'}{|\bar{\rho}|}. \quad (2)$$

Здесь \vec{e}_ϕ - азимутальный единичный вектор. Тогда векторный потенциал имеет только азимутальную составляющую, которая в рационализованной системе единиц MKS имеет вид

$$A_\phi = (\mu_0/2\pi) J \int_0^\pi \cos \phi' d\phi' \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \int_{-h}^h [(z'-z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos(\phi'-\phi)]^{-1/2} dz',$$

где r' , ϕ' , z' - координаты переменной точки элементарного объема, r , ϕ , z - координаты точки наблюдения P, а R_1 , R_2 , $2h$ - геометрические параметры обмотки соленоида.

При интегрировании соотношения (3) необходимо учитывать, что соленоид является аксиально-симметричным, а $|z'-z|$ - модуль.

Тогда при $z < -h$, если ввести обозначение

$$\gamma = z' - z, \quad (4)$$

$$D = \gamma^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \phi', \quad (5)$$

выражение (3) можно переписать следующим образом

$$A_\phi = (\mu_0/2\pi) J \int_0^\pi \cos \phi' d\phi' \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} D^{-1/2} d\gamma, \quad (6)$$

где

$$\gamma_2 = h - z, \quad \gamma_1 = -h - z. \quad (7)$$

Для области $-h \leq z \leq h$ интегрирование по z' необходимо провести, разбивая эту область на две части: 1) от $z' = -h$ до z и 2) от $z' = z$ до h .

Для этого случая соотношение (3) имеет вид

$$A_{\phi} = (\mu_0 / 2\pi) J \int_0^{\pi} \cos \phi' d\phi' \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \left[\int_{-h}^z [(z-z')^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \phi']^{-1/2} dz' + \int_z^h [(z'-z)^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \phi']^{-1/2} dz' \right]. \quad (8)$$

Используя (5) и вводя

$$\gamma = \begin{cases} z - z' \\ z' - z \end{cases} \quad (9)$$

получим

$$A_{\phi} = (\mu_0 / 2\pi) J \int_0^{\pi} \cos \phi' d\phi' \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \left[\int_0^{\gamma_1} D^{-1/2} dy + \int_0^{\gamma_2} D^{-1/2} dy \right], \quad (10)$$

где

$$\gamma_2 = h - z, \quad \gamma_1 = z + h. \quad (11)$$

При $z > h$ решение получается аналогичным способом, как и при $z < -h$.

Поэтому в дальнейшем ограничим рассмотрение векторного потенциала, компонент поля и производных составляющих магнитного поля только для областей $z < -h$ и $-h \leq z \leq h$.

Интегрируя (6) или (10) по γ и r' , имеем

$$A_{\phi} = (\mu_0 / 2\pi) J \{ [A_{0\phi}(R_2, \gamma_2) - A_{0\phi}(R_1, \gamma_2)] \mp [A_{0\phi}(R_2, \gamma_1) - A_{0\phi}(R_1, \gamma_1)] \} , \quad (12)$$

где

$$A_{0\phi}(r', \gamma) = \int_0^{\pi} \cos \phi' \{ (\gamma/2) D^{1/2} + [(r'^2 - r^2 \cos 2\phi')/2] \operatorname{Arsh}(\gamma/B^{1/2}) + \gamma r \cos \phi' \operatorname{Arsh}[(r' - r \cos \phi') / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi')^{1/2}] - r^2 \sin \phi' \cos \phi' \operatorname{arc} \operatorname{tg} [\gamma (r' - r \cos \phi') / r \sin \phi' D^{1/2}] \} d\phi' , \quad (13)$$

а

$$B = r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \phi' . \quad (14)$$

В соотношении (12) и также при последующих расчётах знак минус и γ_2, γ_1 , определенные (7), необходимо использовать в области $z < -h$, а знак плюс и γ_2, γ_1 определенные (11) - в области $-h \leq z \leq h$.

Выражение (12), как показывает непосредственная проверка, удовлетворяет соотношению $\Delta A_\phi = 0$ в области, где нет токов проводимости, и $\Delta A_\phi = -\mu_0 J$ - в области, где существуют токи проводимости, причем оператор ΔA_ϕ определяем как

$$\Delta A_\phi = (\mu_0 / 2\pi) J \{ \Delta A_{0\phi}(R_2, \gamma_2) - \Delta A_{0\phi}(R_1, \gamma_2) \} \mp$$

$$\mp [\Delta A_{0\phi}(R_2, \gamma_1) - \Delta A_{0\phi}(R_1, \gamma_1)] \}, \quad (15)$$

где

$$\Delta A_{0\phi}(r, \gamma) = (\partial^2 A_{0\phi} / \partial \gamma^2) (\partial \gamma / \partial z)^2 + \partial^2 A_{0\phi} / \partial r^2 +$$

$$+ (1/r) (\partial A_{0\phi} / \partial r) - A_{0\phi} / r^2. \quad (16)$$

3. Компоненты поля

Аксиальная составляющая поля.

При $z < -h$ и $-h \leq z \leq h$ с помощью (12) и (13) найдем, что

$$H_z(r, z) = (1/\mu_0) [\partial(r A_\phi) / \partial r] =$$

$$= (J/2\pi) \{ [H_{0z}(R_2, \gamma_2) - H_{0z}(R_1, \gamma_2)] \mp [H_{0z}(R_2, \gamma_1) - H_{0z}(R_1, \gamma_1)] \}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}
 H_{0z}(r', \gamma) = & \int_0^\pi \cos \phi' \{ (\gamma / 2r) D^{1/2} + [(r'^2 - 3r^2 \cos^2 \phi') / 2r] \operatorname{Arsh}(\gamma / B^{1/2}) + \\
 & + 2\gamma \cos \phi' \operatorname{Arsh}[(r' - r \cos \phi') / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi')^{1/2}] - \\
 & - \frac{3}{2} \sin 2\phi' \arctg[\gamma(r' - r \cos \phi') / r \sin \phi' D^{1/2}] \} d\phi'.
 \end{aligned} \quad (18)$$

Используя соотношение $\cos^2 \phi' = \frac{1}{2}(\cos 2\phi' + 1)$ и интегрируя (18) по частям, получим

$$\begin{aligned}
 H_{0z}(r', \gamma) = & -(\gamma r' / 2) \int_0^\pi D^{-1/2} d\phi' + (\gamma r' / 2) \int_0^\pi \cos^2 \phi' D^{-1/2} d\phi' + \\
 & + (\gamma r' / 2)(r'^2 - r^2) \int_0^\pi (1 / B D^{1/2}) d\phi' - (\gamma r' / 2)(r' - 3r^2) \int_0^\pi (\cos^2 \phi' / B D^{1/2}) d\phi' - \\
 & - \gamma r^3 \int_0^\pi (\cos^3 \phi' / B D^{1/2}) d\phi' + 2\gamma r' r^2 \int_0^\pi (\cos^4 \phi' / B D^{1/2}) d\phi' - \\
 & - \gamma r(r^2 + \gamma^2) \int_0^\pi [\cos \phi' / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi') D^{1/2}] d\phi' - \gamma r' r^2 \int_0^\pi [\cos^2 \phi' / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi') D^{1/2}] d\phi' + \\
 & + \gamma r(r^2 + \gamma^2) \int_0^\pi [\cos^3 \phi' / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi') D^{1/2}] d\phi' - \gamma r^3 \int_0^\pi [\cos^5 \phi' / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi') D^{1/2}] d\phi' + \\
 & + \gamma \int_0^\pi \operatorname{Arsh}[(r' - r \cos \phi') / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi')^{1/2}] d\phi' + C_1(r', r),
 \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$C_1(r', r) = r \cos^3 \phi' \operatorname{arctg} [\gamma (r' - r \cos \phi') / r \sin \phi' D^{1/2}] \Big|_0^\pi =$$

$$= -r(\pi/2) [1 + \operatorname{sign}(r' - r)] . \quad (20)$$

После ряда преобразований^{/9,13/} выражение величины $H_{0z}(r', \gamma)$ можно представить в следующем виде

$$H_{0z}(r', \gamma) = -3\gamma r' [(r' + r)^2 + \gamma^2]^{-1/2} K(k) + r' Q(n_3) \Pi(n_3, k, \pi/2) +$$

$$+ (\gamma^2 + r^2)^{1/2} [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \pi/2) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \pi/2)] + \quad (21)$$

$$+ \gamma \int_0^\pi \operatorname{Arsh} [(r' - r \cos \phi') / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi')^{1/2}] d\phi' + C_1(r', r) ,$$

где $K(k)$, $\Pi(n, k, \pi/2)$ - полные эллиптические интегралы первого и третьего рода, а

$$Q(n) = [(1 - n^2)(1 - k^2/n^2)]^{1/2} , \quad k^2 = (4r'r) / [(r' + r)^2 + \gamma^2] , \quad (22)$$

$$n_1^2 = -\frac{2r}{(\gamma^2 + r^2)^{1/2} - r} , \quad n_2^2 = \frac{2r}{(\gamma^2 + r^2)^{1/2} + r} , \quad n_3^2 = \frac{4r'r}{(r' + r)^2} .$$

Отметим, что при $\gamma = 0$, $H_{0z}(r', 0) = C_1(r', r)$.

Если ввести пределы R_2 и R_1 для r' в постоянную $C_1(r', r)$, то она имеет вид

$$C_1(r', r) \Big|_{R_1}^{R_2} = -r(\pi/2) [\text{sign}(R_2 - r) - \text{sign}(R_1 - r)] . \quad (23)$$

Или

$$C_1(r', r) \Big|_{R_1}^{R_2} = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq R_1, \quad r > R_2 . \\ -\pi r & \text{при } R_1 < r \leq R_2 . \end{cases} \quad (24)$$

Таким образом, если ввести (21) и (24) в выражение (17), то получим окончательную формулу для аксиальной составляющей поля.

В более удобной для расчётов форме выражение $H_{0z}(r', \gamma)$ можно представить, если воспользоваться результатами работы /14/ по табулированию эллиптических интегралов, как

$$H_{0z}(r', \gamma) = (\pi/2) \{ -\gamma r' [3r' + (\gamma^2 + r^2)^{1/2}] [r' + (\gamma^2 + r^2)^{1/2}]^{-1} \times \\ \times [(r' + r)^2 + \gamma^2]^{-1/2} F_0(a) + r' \Lambda_0(a_1 \beta_3) + (\gamma^2 + r^2)^{1/2} [\Lambda_0(a_1 \beta_1) - \\ - \Lambda_0(a_1 \beta_2)] \} + \gamma \int_0^\pi \text{Arsh} [(r' - r \cos \phi') / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi')^{1/2}] d\phi' , \quad (25)$$

где

$$\alpha = \arcsin k, \quad \beta_1 = \arcsin \left\{ \frac{[(r'+r)^2 + y^2]^{1/2}}{[(y^2 + r^2)^{1/2} + r']} \right\}, \quad (26)$$

$$\beta_2 = \arcsin \left\{ \frac{[(y^2 + r^2)^{1/2} - r']}{[(r' - r)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}, \quad \beta_3 = \arcsin \left\{ \frac{y}{[(r' - r)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}.$$

Радиальная составляющая поля.

В области $z < -h$ и $-h \leq z \leq h$ из (12) и (13) найдем, что

$$\begin{aligned} H_r(r, z) = & -(1/\mu_0) (\partial A / \partial z) = (J/2\pi) \{ [H_{or}(R_2, \gamma_2) - H_{or}(R_1, \gamma_2)] \times \\ & \times (\partial \gamma_2 / \partial z) \mp [H_{or}(R_2, \gamma_1) - H_{or}(R_1, \gamma_1)] (\partial \gamma_1 / \partial z) \}. \end{aligned} \quad (27)$$

С учётом величин $\partial \gamma_2 / \partial z$ и $\partial \gamma_1 / \partial z$ получим, что во всем пространстве

$$\begin{aligned} H_r(r, z) = & (J/2\pi) \{ H_{or}(R_2, \gamma_2) - H_{or}(R_1, \gamma_2) - \\ & - H_{or}(R_2, \gamma_1) + H_{or}(R_1, \gamma_1) \}. \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} H_{or}(r', \gamma) = & 2 \int_0^\pi \cos \phi' D^{1/2} d\phi' + \\ & + 2r \int_0^\pi \cos^2 \phi' \operatorname{Arsh} \left[\frac{(r' - r \cos \phi')}{(y^2 + r^2 \sin^2 \phi')^{1/2}} \right] d\phi'. \end{aligned} \quad (29)$$

Учитывая соотношение $\cos^2 \phi' = \frac{1}{2}(\cos 2\phi' + 1)$, из (29) имеем

$$\begin{aligned}
 H_{or}(r', \gamma) = & 2(r'^2 + r^2 + \gamma^2) \int_0^\pi \cos \phi' D^{-1/2} d\phi' - 4r'r \int_0^\pi \cos^2 \phi' D^{-1/2} d\phi' + \\
 & + r \int_0^\pi \cos 2\phi' \operatorname{Arsh} [(r' - r \cos \phi') / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi')^{1/2}] d\phi' + \\
 & + r \int_0^\pi \operatorname{Arsh} [(r' - r \cos \phi') / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi')^{1/2}] d\phi'.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Используя преобразования, аналогичные преобразования при выводе аксиальной составляющей, можно представить выражение $H_{or}(r', \gamma)$ как

$$\begin{aligned}
 H_{or}(r', \gamma) = & (r'/r) [(r' + r)^2 + \gamma^2]^{1/2} E(k) + (r'/r) (r'^2 - r^2 + 3\gamma^2) [(r' + r)^2 + \gamma^2]^{-1/2} K(k) - \\
 & - (\gamma/r) (\gamma^2 + r^2)^{1/2} [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \pi/2) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \pi/2)] + \\
 & + r \int_0^\pi \operatorname{Arsh} [(r' - r \cos \phi') / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi')^{1/2}] d\phi'.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Таким образом, при расчёте радиальной составляющей поля необходимо использовать (28), где $H_{or}(r', \gamma)$ определяется (31), а $\gamma_2 \cdot \gamma_1$

имеют соответствующие значения для каждой рассматриваемой области пространства.

С помощью табулированных функций Хеумана^{/14/}, выражение $H_{or}(r', \gamma)$ можно также представить как

$$H_{or}(r', \gamma) = (\pi/2) \left\{ -(r'/r) [(r'+r)^2 + \gamma^2]^{1/2} E_0(a) + \frac{r'}{2r} [(r'^2 - r^2 + \gamma^2)((\gamma^2 + r^2)^{1/2} + r) + 2\gamma^2 r'] [(r'+r)^2 + \gamma^2]^{-1/2} [(\gamma^2 + r^2)^{1/2} + r']^{-1} F_0(a) - (\gamma/2r)(\gamma^2 + r^2)^{1/2} \times \right. \quad (32)$$

$$\left. \times [\Lambda_0(a_1, \beta_1) - \Lambda_0(a_1, \beta_2)] \right\} +$$

$$+ (r/2) \int_0^\pi \text{Arsh} [(r' - r \cos \phi') / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi')^{1/2}] d\phi',$$

где a , β_1 , β_2 определяются (26).

В выражениях для $H_z(r, z)$ и $H_r(r, z)$, описывающих магнитное поле соленоида конечных размеров с постоянным током, нам не удалось представить остаточный интеграл по ϕ' в виде комбинации известных функций. Однако при расчётах поля можно воспользоваться его приближенным решением. При этом, учитывая пределы R_2 и R_1 , остаточный интеграл по ϕ' можно представить как

$$\int_0^\pi \text{Arsh} [(r' - r \cos \phi') / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi')^{1/2}] d\phi' \Big|_R^{R_2} = \quad (33)$$

$$= \int_0^\pi \ln [r' - r \cos \phi' + D^{1/2}] d\phi' \Big|_{R_1}^{R_2} = \int_0^\pi \ln [1 + (r' - r \cos \phi') / D^{1/2}] d\phi' \Big|_{R_1}^{R_2} +$$

$$+ (\pi/2) \ln \{ r'^2 + r^2 + \gamma^2 + [(r'^2 + r^2 + \gamma^2)^2 - 4r'^2 r^2]^{1/2} \} \Big|_{R_1}^{R_2}.$$

Если $\gamma \neq 0$, $-1 < \frac{r' - r \cos \phi'}{(r^2 + r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \phi')^{1/2}} < 1$. Тогда подинтеграль-

ное выражение в соотношении (33) можно разложить в ряд, и, ограничиваясь первыми членами, привести указанный выше интеграл к полным эллиптическим интегралам первого и второго рода.

Из свойств магнитного поля от соленоида конечных размеров отметим, что

1) аксиальная составляющая поля является четной функцией от z ,

т.е.

$$H_z(r, z) = H_z(r, -z) ; \quad (34)$$

2) радиальная компонента поля является нечетной функцией

от z , т.е.

$$H_r(r, z) = -H_r(r, -z) . \quad (35)$$

4. Производные компонент магнитного поля по пространственным координатам

Используя производные эллиптических интегралов по модулю k и параметру n [15, 16], найдем следующие выражения для производных компонент $H_z(r, z)$ и $H_r(r, z)$ по пространственным координатам

$$\begin{aligned} \partial H_z(r, z) / \partial z = & (J/2\pi) \{ D_{z_z}(R_1, \gamma_2) - D_{z_z}(R_1, \gamma_2) - \\ & - D_{z_z}(R_2, \gamma_1) + D_{z_z}(R_1, \gamma_1) \} , \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$Dz_z(r', \gamma) = 2r' [(r' + r)^2 + \gamma^2]^{-1/2} K(k) - \int_0^\pi \text{Arsh} [(r' - r \cos \phi') / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi')^{1/2}] d\phi' . \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \partial H_z(r, z) / \partial r = \partial H_r(r, z) / \partial z = (J/2\pi) \times \\ \times \{ [Dz_r(R_2, \gamma_2) - Dz_r(R_1, \gamma_2)] \mp \\ \mp [Dz_r(R_2, \gamma_1) - Dz_r(R_1, \gamma_1)] \} , \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} Dz_r(r', \gamma) = -(2r'\gamma/r) [(r' + r)^2 + \gamma^2]^{-1/2} K(k) + \\ + [(\gamma^2 + r^2)^{1/2}/r] [Q(n_1)\Pi(n_1, k, \pi/2) - Q(n_2)\Pi(n_2, k, \pi/2)] + \\ + C_2(r', r) + C_3(r', r) , \end{aligned} \quad (39)$$

а

$$C_2(r', r) = \cos^3 \phi' \text{arc tg} [\gamma (r' - r \cos \phi') / r \sin \phi' D^{1/2}] \Big|_0^\pi = -(\pi/2) [1 + \text{sign}(r' - r)] \quad (40)$$

$$C_3(r', r) = -\gamma r' r \cos^3 \phi' \sin \phi' / (r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \phi') D^{1/2} \Big|_{\pi}^0, \quad (41)$$

или в разных областях пространства

$$C_2(r', r) \Big|_{R_1}^{R_2} = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq R_1, r > R_2 \\ -\pi & \text{при } R_1 < r \leq R_2 \end{cases} \quad (42)$$

$$C_3(r', r) \Big|_{R_1}^{R_2} = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq R_1, r \neq R_2 \\ -\frac{1}{2} & \text{при } r = R_1 \\ \frac{1}{2} & \text{при } r = R_2 \end{cases} \quad (43)$$

Отметим, что при $\gamma = 0$, $Dz_r(r', 0) = C_2(r', r) + C_3(r', r)$.

$$\partial H_r(r, z) / \partial r = (J/4\pi) \{ DR_r(R_2, \gamma_2) - DR_r(R_1, \gamma_2) - \quad (44)$$

$$-DR_r(R_2, \gamma_1) + DR_r(R_1, \gamma_1) \},$$

где

$$\begin{aligned}
 DR_r(r', \gamma) = & (r'/r^2) [(r'+r)^2 + \gamma^2]^{1/2} E(k) - (r'/r^2)(r'^2 + 3r^2 + 3\gamma^2) [(r'+r)^2 + \gamma^2]^{-1/2} K(k) + \\
 & + [\gamma(\gamma^2 + r^2)^{1/2} / r^2] [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \pi/2) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \pi/2)] + \\
 & + \int_0^\pi \text{Arsh} [(r' - r \cos \phi') / (\gamma^2 + r^2 \sin^2 \phi')]^{1/2} d\phi' .
 \end{aligned} \quad (45)$$

Из свойств производных компонент магнитного поля по пространственным координатам отметим следующие:

$$\partial H_z(r, z) / \partial z = -\partial H_z(r, -z) / \partial z , \quad (46)$$

$$\partial H_z(r, z) / \partial r = \partial H_z(r, -z) / \partial r , \quad (47)$$

$$\partial H_r(r, z) / \partial r = -\partial H_r(r, -z) / \partial r . \quad (48)$$

5. Частные случаи

На оси (при $r = 0$) легко найти из (17), (21), (28) и (31), что

$$H_z(0, z) = (J/2) \left\{ \gamma_2 \ln [r' + (r'^2 + \gamma_2^2)^{1/2}] + \gamma_1 \ln [r' + (r'^2 + \gamma_1^2)^{1/2}] \right\} \Big|_{R_1}^{R_2} \quad (49)$$

Это соотношение является известным выражением аксиальной составляющей поля на оси конечных размеров соленоидов постоянного тока.

$$H_r(0, z) = 0, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \partial H_z(0, z) / \partial z = (J/2) \{ r' / (r'^2 + \gamma_2^2)^{3/2} - \ln [r' + (r'^2 + \gamma_2^2)^{1/2}] - \\ - r' / (r'^2 + \gamma_1^2)^{3/2} + \ln [r' + (r'^2 + \gamma_1^2)^{1/2}] \} \Big|_{R_1}^{R_2}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\partial H_z(0, z) / \partial r = 0 \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \partial H_r(0, z) / \partial r = (J/4) \{ \ln [r' + (r'^2 + \gamma_2^2)^{1/2}] - r' / 2 (r'^2 + \gamma_2^2)^{3/2} - \\ - \ln [r' + (r'^2 + \gamma_1^2)^{1/2}] + r' / 2 (r'^2 + \gamma_1^2)^{3/2} \} \Big|_{R_1}^{R_2}. \end{aligned} \quad (53)$$

В случае полубесконечного соленоида с нулевым внутренним радиусом, для которого Г. Браун и Л. Флакс^{/11/} построили расчётные номограммы, удобно переходить к новой системе координат (начало в точке $z = -h$, $r = 0$). Тогда после соответственных преобразований выражений компонент поля (17) и (28) при $2h \rightarrow \infty$, $R_1 = 0$, $R_2 = R$ найдем, что

$$H_z^{(\infty)}(r, z) = (J/2\pi) \{ \pi R - 3Rz [(R+r)^2 + z^2]^{-1/2} K(k) + RQ(n_3) \Pi(n_3, k, \pi/2) + \\ + (r^2 + z^2)^{1/2} [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \pi/2) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \pi/2)] + \quad (54)$$

$$+ z \int_0^\pi \ln \{ (R - r \cos \phi' + D^{1/2}) / \{ (r^2 + z^2)^{1/2} - r \cos \phi' \} \} d\phi',$$

$$H_r^{(\infty)}(r, z) = (J/4\pi) \{ (R/r) [(R+r)^2 + z^2]^{1/2} E(k) - \\ - (R/r) (R^2 - r^2 + 3z^2) [(R+r)^2 + z^2]^{-1/2} K(k) + \\ + (z/r) (r^2 + z^2)^{1/2} [Q(n_1) \Pi(n_1, k, \pi/2) - Q(n_2) \Pi(n_2, k, \pi/2)] - \quad (55)$$

$$- r \int_0^\pi \ln \{ R - r \cos \phi' + D^{1/2} \} / \{ (r^2 + z^2)^{1/2} - r \cos \phi' \} d\phi' \},$$

где D , k , n получены из (5) и (22) при замене y на z и r' на R . Следует также отметить, что при дифференцировании выражений компонент поля (17) и (29) по r' и последующей подстановке $r' = R$ можно найти известные выражения составляющих магнитного поля от тонкого однослойного соленоида^{3,4,5/}.

6. Пример распределения магнитного поля от соленоида конечных размеров с постоянным током

На рис. 2 и 3 приведен частный случай распределения магнитного поля от соленоида конечных размеров.

Расчёты проводились для разных плоскостей $z = \text{const}$ ($z = 0$, $-h/2$, $-h$, $-3h/2$, $-2h$) для соленоида со следующими геометрическими параметрами: $2h / R_2 = 3$ и $R_1 / R_2 = 0,5$.

Распределение магнитного поля от этого соленоида представлено безразмерными величинами H_z / JR_2 , $(\partial H_z / \partial r) / J$, H_r / JR_2 и $(\partial H_r / \partial r) / J$ в зависимости от безразмерной координаты $r = r / R_2$.

Программа расчёта компонент поля их производных по пространственным координатам написана на языке ФОРТРАН-63. Значения полных эллиптических интегралов первого и второго рода вычислялись с помощью приближений Чебышева в форме Гастинга^{17/}, а значения полных эллиптических интегралов третьего рода определялись путем интегрирования по методу Симпсона.

При вычислении полей в плоскостях $z = \pm h$ ($\gamma = 0$) нижний предел в остаточном интеграле, учитывая его особенности, следует брать отличным от нуля, но близкими к нему, например, 10^{-5} . При этом ошибка в вычислении остаточного интеграла пренебрежимо мала.

Расчёт безразмерных функций, характеризующих распределение магнитного поля в одной из точек пространства, составлял менее одной секунды на машине CDC-1604A.

Характерной особенностью распределений магнитного поля является то, что аксиальная компонента в разных плоскостях $z = \text{const}$ при $-h < z < h$ имеет максимум при $r = R_1$, затем быстро падает в области, где циркулирует ток, до отрицательных значений при $r \geq R_2$, приближаясь к нулевым значениям на больших расстояниях от соленоида.

В плоскостях $z = \text{const}$ вне геометрических размеров соленоида максимум аксиальной составляющей имеет место при $r = 0$.

Максимальные значения радиальной составляющей поля имеют место в плоскостях $z = -h$ или $z = h$. Положение максимума в распределении поля $H_r = f(r)$ в плоскостях $z = \text{const}$ разное.

Л и т е р а т у р а

1. E.M. Pugh, E.W. Pugh. Principles of Electricity and Magnetism, Reading, Massachussets, 1960.
2. В. Смайт. Электростатика и электродинамика. Изд-во Иностранной литературы, 1954.
3. A. Weigand. Deutsche Electrotechnik 6 (1952).
4. И.И. Пекер. Тр. Новочерк. Политехн. Ин-та, 43/57 (1956) 81.
5. R. Cazenave. Rev. Gén. de l'electr. 65 (1956) 301.
6. В.А. Бирюков и В.И. Данилов, ЖТФ, 31, (1961) 428.
7. J. Blewett. J. Appl. Phys., 18 (1947) 968.
8. J.E. Everett and J.E. Osemeikhian, J. Sci. Instr. 43 (1966) 470.
9. V.I. Danilov and M. Ianovici. Nucl. Instr. Meth. 79 (1970) 29.
10. Ch. Snow, Magnetic field of cylindrical coils and annular coils, N.B.S. appl. Math. Series. Dec, 1953.
11. G.V. Brown and L. Flax. J. Appl. Phys., 35 (1964) 1764.
12. E. Durand. Electrostatique et Magnetostatique, Masson, Paris, 1953.
13. И.М. Рыжик и И.С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз (1963).
14. C. Neuman. J. Math. Phys., 20 (1942) 127.

15. Е. Янке, Ф. Емде и Ф. Леш. Специальные функции, Издательство "Наука", 1964.
16. E. Durand. Compt. Rend., 242 (1956) 887.
17. W.J. Cody. Math. Comp. 19 (1965) 105.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 ноября 1970 года.

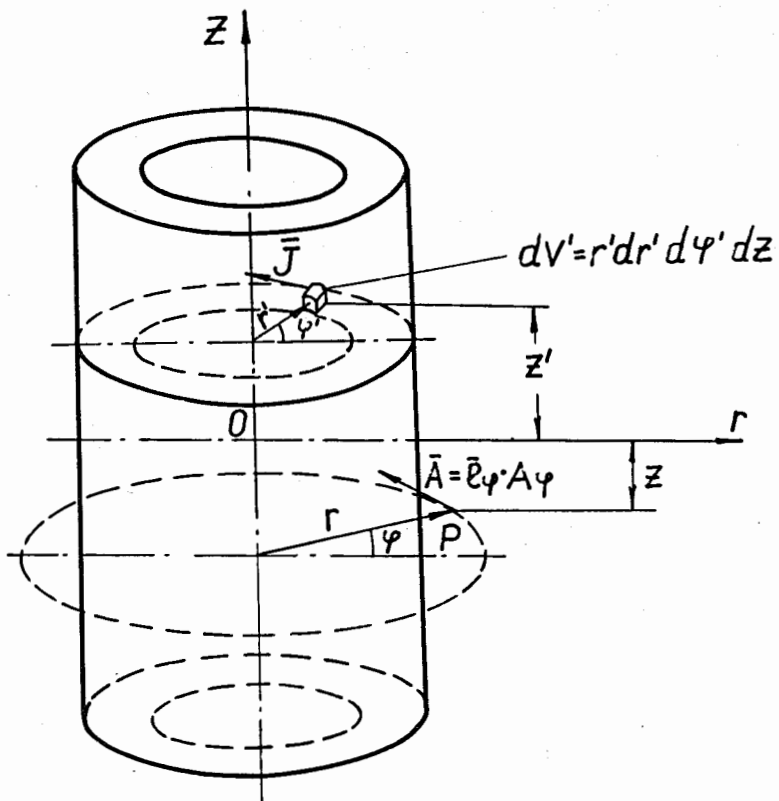


Рис. 1. Система координат при расчёте магнитного поля соленоида конечных размеров.

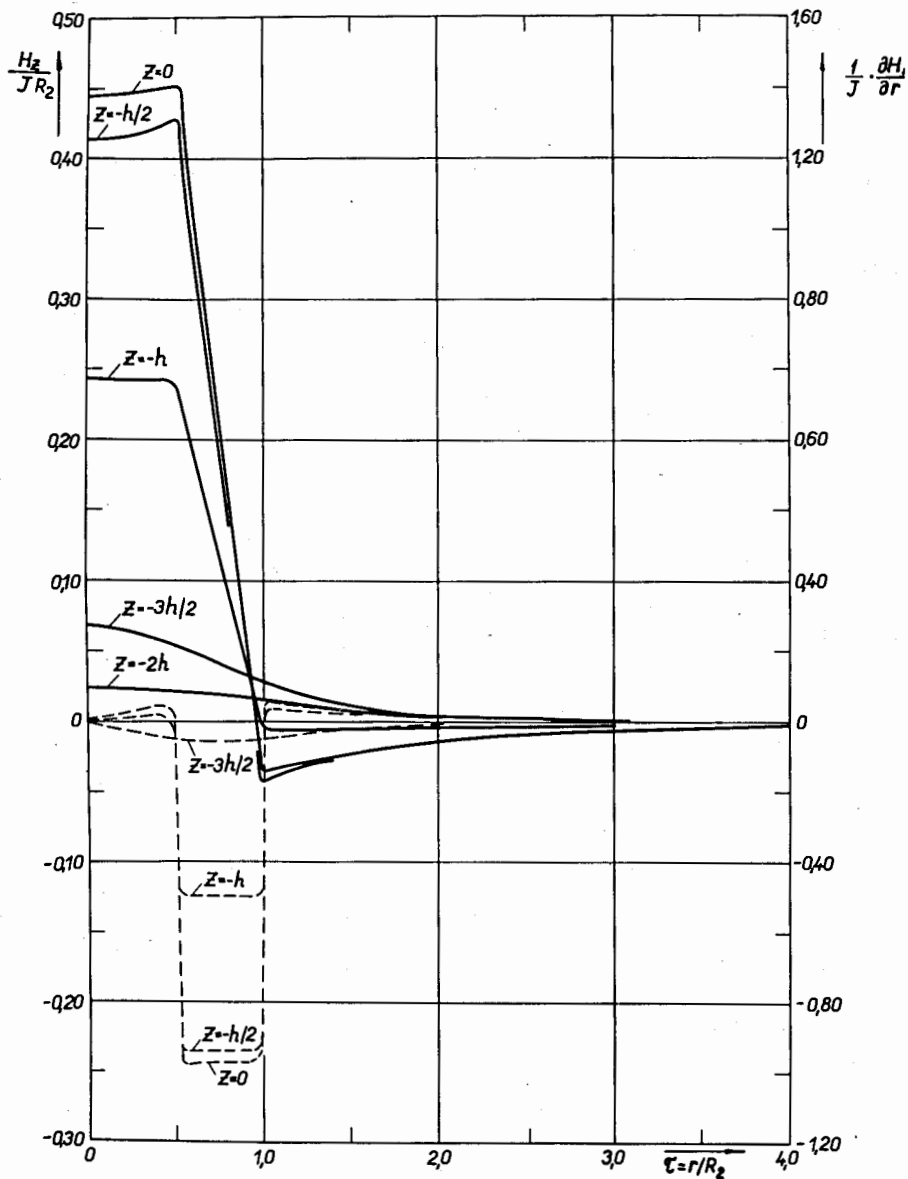


Рис. 2. Распределение аксиальной компоненты и ее производной ($\partial H_z / \partial r$) в зависимости от радиуса.

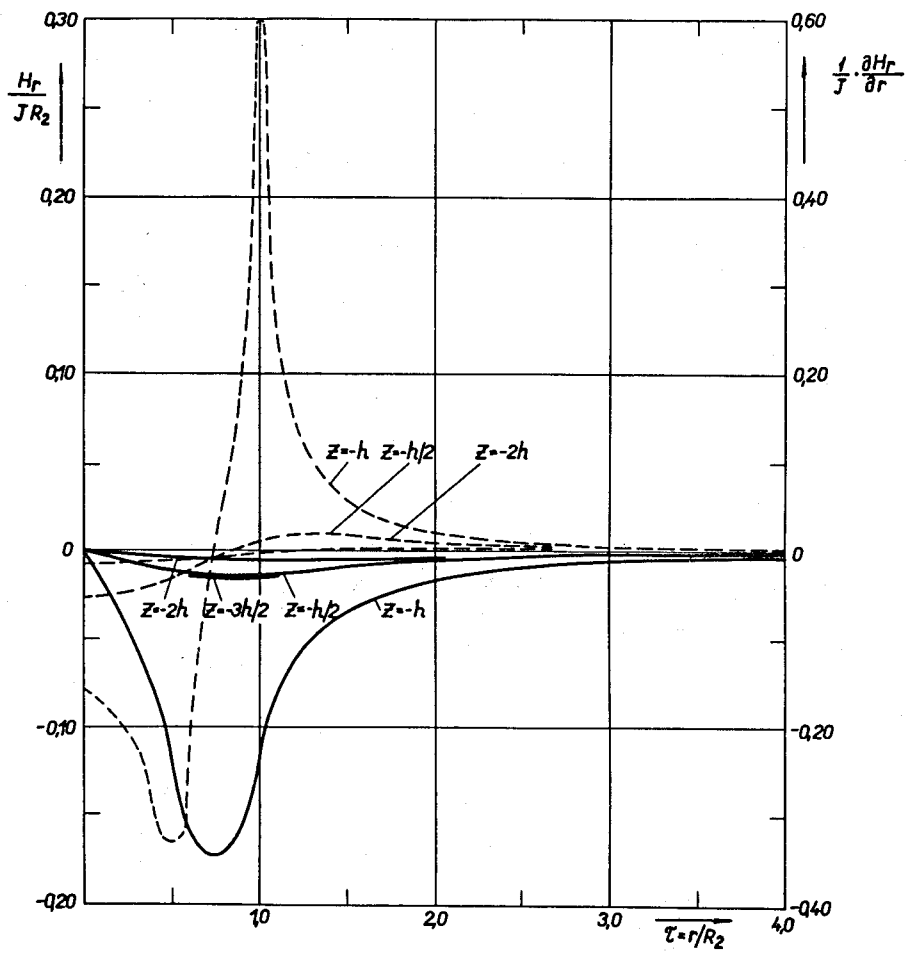


Рис. 3. Распределение радиальной компоненты и ее производной $(\partial H_r / \partial r)$ в зависимости от радиуса.